SUMA 39
febrero 2002, pp. 47-52

# Programar en Logo: enseñar al ordenador el cálculo con fracciones

Guido Angelo Ramellini

El autor, a modo de continuación de un artículo suyo publicado en el número 32 de *Suma*, presenta un desafío aún mayor, en el que los alumnos deben enseñar al ordenador cómo resolver cálculos y expresiones con fracciones, expresando en fracción el resultado.

ARTÍCULOS

SE PUEDE considerar este trabajo como la continuación de la actividad: «Cómo calcular el Máximo Común Divisor y el Mínimo Común Múltiplo», que forma parte del artículo: «Algunos contenidos matemáticos con Logo» (Ramellini, 1999).

## Por qué *Logo*[1]

En la premisa del artículo citado, daba un cuantas razones que nos llevaron a escoger *Logo* como lenguaje de programación, una vez decidido empezar una alfabetización informática en el último trienio de la Escuela Primaria y en el primero bienio de la ESO[2].

Me limité a exponer estas razones para evitar abrir un debate sobre si es necesario enseñar a programar o si, dado el escaso tiempo y los limitados medios que tenemos en las escuelas, no es más conveniente concentrar los esfuerzos en que los alumnos aprendan a ser usuarios conscientes de los grandes medios que ofrece el *software* didáctico y, sobre todo, la red.

Mantendré esta prudencia, porque el tema necesita tiempo y competencias que no poseo, pero me gustaría citar unas declaraciones de Umberto Eco[3] para *Liberation* en la inauguración del sitio *Internet* sobre la educación de la diversidad (www:\\academie-universelle.asso.fr):

> [...] Existe el riesgo de un universo a lo Orwell, fundado sobre tres clases, pero no en sentido marxista: la clase de los que interaccionan activamente con la red, que reciben y emiten mensajes; la pequeña burguesía de los usuarios pasivos, y el proletariado que se limita a mirar lo que pasa la televisión [...].

Para evitar la tecno-exclusión «[...] tenemos que buscar la solución fuera de la red, en las escuelas. Para permitir que cada niño sea parte de esa aristocracia de masa, la escuela debe enseñarle a programar y no sólo a utilizar programas».

Enseñar a los niños a programar «[...] es la cosa más fácil del mundo, porque esta generación nace con un talento para el ordenador».

Evidentemente, ni creo haber resuelto el debate con estas palabras, de fuente tan competente, ni comparto totalmente el optimismo de la última afirmación: enseñar a los niños a programar es difícil, en parte porque requiere esfuerzo, tiempo, una estrategia correcta y eficaz, medios, objetivos claros y, especialmente, una sociedad que esté volcada a incentivar en los niños la participación activa. Desdichadamente, estoy convencido de que el modelo cultural dominante induce, por el contrario, a la pasividad y que ésta juega un papel importante en la crisis que sufren los modelos educativos democráticos, que incentivan la participación crítica.

*…enseñar a los niños a programar es difícil…*

## El cálculo con fracciones

Creo que todos los compañeros que trabajamos con niños de primaria o de los primeros años de secundaria compartimos la impresión de que se ha perdido de forma considerable la capacidad de cálculo a todos los niveles.

No sé de qué depende: si del estímulo social de habilidades distintas (Hidalgo y otros, 1999), o de un uso excesivo y equivocado de los aparatos tecnológicos de cálculo, si del rechazo de contenidos áridos y repetitivos compartido por el alumnado y por parte del profesorado, o si de un poco de todo esto.

En los *Programmi della Scuola Media*[4], las indicaciones finales para la enseñanza de las matemáticas, dicen textualmente:

> Se desaconseja insistir en aspectos puramente mecánicos y mnemónicos, y por esto de escaso valor formativo. [...] Por ejemplo, argumentos como la descomposición en factores primos, el cálculo del Máximo Común Divisor y el Mínimo Común Múltiplo, el cálculo de largas expresiones aritméticas, el algoritmo para la extracción de la raíz cuadrada, el cálculo literal sin referencias concretas, no deben de tener un valor preponderante en la enseñanza, y menos aún en la evaluación.

Esta postura oficial, que recogía las experiencias pedagógicas más avanzadas, ayudó a cambiar las prioridades y la metodología de la enseñanza de las matemáticas en Italia, que, hasta aquel momento (a pesar de que experiencias tan renovadoras como la de Emma Castelnuovo son de los años cincuenta), estaba basada en la repetición mecánica y eterna de expresiones aritméticas antes y ecuaciones después.

Es difícil no compartir esta postura, pero tampoco podemos cruzarnos de brazos ante las dificultades de cálculo, que sigue siendo un instrumento fundamental para el desarrollo de capacidades matemáticas más elevadas.

## Objetivos

Continúo pensando que, además de querer reforzar el aprendizaje de los contenidos matemáticos (esenciales, en esto caso), e informáticos, que resultarán evidentes en la explicación de nuestra experiencia, trabajar con un lenguaje para ordenador implica para el alumno el esfuerzo de traducir sus estrategias y razonamientos en algo que la máquina pueda «entender» y aplicar.

Este esfuerzo, que comporta una reflexión profunda sobre los contenidos disciplinares y la comparación entre distintas maneras de aproximarse a ellos, me parece el principal aspecto formativo del trabajo con el ordenador en esta etapa escolar.

Un trabajo sistemático de este tipo resalta las diferencias en la forma de trabajar del ordenador y la del ser humano, y asienta la capacidad de buscar soluciones alternativas y el hábito de modificar la propia forma de pensar.

## Prerrequisitos

- Haber trabajado en clase con fracciones y con las reglas del cálculo.
- Haber desarrollado en el laboratorio de informática los procedimientos para calcular con el ordenador el Máximo Común Divisor y el Mínimo Común Múltiplo.

## Actividad con el ordenador

### *Primeros pasos*

Se propone a los alumnos que experimenten las respuestas del ordenador a distintos input con fracciones. Es:

```
PRINT 2/3      → 0,666666666666667
PRINT 2*2/3    → 1,33333333333333
```

1 *Microsoft Windows Logo*, versión 6.2g, Softronics, Inc.: http://www.softronix.com

2 Las Escuelas Italianas de Madrid siguen los planes de estudio italianos y están divididas entre: 5 años de primaria, 3 de secundaria de I grado y 5 de II grado. Los alumnos trabajan en el laboratorio de informática 1 hora a la semana a partir del IV año de Primaria. No se trabaja exclusivamente con *Logo*.

3 En *La Repubblica*,(8 de enero de 2000: 13) La traducción es mia.

4 Los *Programmi della Scuola Media Inferiore* de 1979, que han sido una de las fuentes de inspiración de la LOGSE que ha reformado la escuela española, recogen los objetivos, los contenidos, la metodología y las comprobaciones de todos los currículos de las materias que se imparten en el primer nivel de la Escuela Secundaria Italiana. La traducción es mia.

```
PRINT 1/6*6/5   →0,2
PRINT 2/3 + 5/3 →2,33333333333333...
```

El ordenador reconoce las fracciones, pero las transforma en números decimales para poder resolver las operaciones y darnos el resultado. Podemos así:

a) transformar el resultado de número decimal en fracción (*input* = fracción → cálculo = número decimal → *output* = fracción);

b) «enseñar» al ordenador a trabajar con fracciones, sin pasar a través de los números decimales.

Esta estrategia comporta una dificultad difícilmente superable, porque el ordenador no distingue entre números decimales finitos e infinitos periódicos (trabajando a partir de fracciones, evidentemente nunca obtendremos números decimales infinitos no periódicos).

La estrategia que debemos utilizar es la de introducir y operar separadamente con los numeradores y los denominadores de las fracciones.

## ¿Con qué operación empezamos?

Podemos dejar que cada alumno escoja por qué operación empezar. O bien, podemos asignar una operación distinta a cada alumno (o pareja de alumnos), según las distintas habilidades y competencias. Y también podemos proponer a la clase un *brain storming* en el que se evidencia:

- que el algoritmo de la adición, por el que todos los alumnos proponen empezar, no es el más fácil con los números fraccionarios;
- que hay unas evidentes y fuertes relaciones entre los algoritmos de adición y sustracción (en un caso se suman y en el otro se restan los numeradores) y los de multiplicación y división (dividir es igual a multiplicar por la fracción inversa);
- que el resultado final tiene que ser una fracción primitiva, o sea simplificada.

Podemos además ponernos de acuerdo para empezar operando con sólo dos fracciones, y por lo tanto tendremos cuatro variables diferentes: los dos numeradores (*n*1 y *n*2) y los dos denominadores (d1 y d2).

*La estrategia que debemos utilizar es la de introducir y operar separadamente con los numeradores y los denominadores de las fracciones.*

## Preparación de los procedimientos básicos

*Para calcular el MCD*

| | |
|---|---|
| TO MCD :*a* :*b* | Para calcular el MCD entre *a* y *b* |
| MAKE "*r* REMAINDER :*a* :*b* | se llama r el resto de a/b |
| IF :*r*=0 [MAKE "*MCD* :*b* PRINT [MCD= ] | si r=0, b es el MCD, se imprime |
| PRINT :*MCD* STOP] | y se termina el trabajo |
| MAKE "*a* :*b* MAKE "*b* :*r* | si r > 0, *b* se convierte en *a* y *r* en *b* |
| MCD :a :b | se repite el procedimiento |
| END | hasta que *r* = 0 |

*Para calcular el MCM*

```
TO MCM :a :b
MCD :a :b
MAKE "MCM :a*:b/:MCD
PRINT :MCM
END
```

*Para simplificar una fracción* n/d

| | |
|---|---|
| TO SEM :*a* :*b* | |
| MCD :*a* :*b* | (eliminando, si no nos sirven, las |
| MAKE "*a* :*a*/:*MCD* MAKE "*b* :*b*/:*MCD* | instrucciones para imprimir el MCD) |
| END | |

*Algoritmo de la multiplicación*

| | |
|---|---|
| TO PRO :*n1* :*d1* :*n2* :*d2* | |
| ***(SEM :*n1* :*d1* | ***estas líneas sirven para simplificar las fracciones iniciales: |
| MAKE "*n1* :*a* "*d1* :*b* | son opcionales, se pueden |
| SEM :*n2* :*d2* | añadir a los cuatro procedimientos*** |
| MAKE "*n2* :*a* "*d2* :*b*)*** | |
| MAKE "*n* :*n1**:*n2* MAKE "*d* :*d1**:*d2* | se multiplican los dos numeradores y los dos denominadores |
| SEM :*n* :*d* | se simplifica el resultado |
| PRINT (LIST :*n* "/ :*d*) | se imprime el resultado en forma |
| END | de fracción |

*Algoritmo de la división*

| | |
|---|---|
| TO CUO :*n1* :*d1* :*n2* :*d2* | |
| PRO :*n1* :*d1* :*d2* :*n2* | sólo es necesario invertir numerador y deno- |
| END | minador de la segunda fracción y multiplicar |

*Algoritmo de la potencia*

No tiene secretos: una vez comprobado si numerador y denominador se pueden simplificar, se multiplican cada uno por sí mismo las veces indicadas por el exponente:

```
TO PT :n1 :d1 :e
SEM :n1 :d1
MAKE "n :n1 MAKE "d :d1
REPEAT :e [MAKE "n :n*:n1 MAKE "d :d*:d1]
PRINT (LIST :n "/ :d)
END
```

*Algoritmos de la adición y de la resta*

Se puede enfocar el trabajo de dos formas distintas (profundizaremos en la discusión las dos opciones):

a) obteniendo pragmáticamente, en modo rápido y simple, el resultado correcto;

b) desarrollando didácticamente los contenidos: MCD, MCM, común denominador, etc.

a)

```
TO SUMA :n1 :d1 :n2 :d2
MAKE "d :d1*:d2          el denominador común es el producto
                         de los denominadores y no el MCM
MAKE "n1 :n1*:d2
MAKE "n2 :n2*:d1
MAKE "n :n1+:n2
SEM :n :d                es fundamental simplificar el resultado
END
TO RES n1 :d1 :n2 :d2         TO RES n1 :d1 :n2 :d2
MAKE "n2 :n2*-1               SUMA :n1 :d1 -:n2 :d2
SUMA :n1 :d1 :n2 :d2          END
END
```

b)

```
TO SUMA :n1 :d1 :n2 :d2
MCM :d1 :d2              el denominador común es el MCM
MAKE "d :mcd
MAKE "n1 :n1*:mcm/:d1
MAKE "n2 :n2*:mcm/:d2
MAKE "n :n1+:n2
SEM :n :d                simplificar el resultado no tiene la misma
END                      importancia que en el otro procedimiento
TO RES n1 :d1 :n2 :d2         TO RES n1 :d1 :n2 :d2
MAKE "n2 :n2*-1               SUMA :n1 :d1 -:n2 :d2
SUMA :n1 :d1 :n2 :d2          END
END
```

*Ejercicios más complejos*

Una vez construidos los procedimientos básicos, podemos aprovechar la estructura modular de Logo para elaborar super-procedimientos que resuelvan expresiones.

Siguen unos ejemplos, algunos fáciles y otros más complejos:

```
TO EXP1
;(3/5+2/3)*5/19=1/3
SUMA 3 5 2 3
MAKE "n1 :n MAKE "d1 :d
PRO :n1 :d1 5 9
PRINT (LIST :n "/ :d)
END
```

```
TO EXP2
;(2/5*15/8-1/18:5/6)*30/41
PRO 2 5 15 8
MAKE "z1 :n MAKE "v1 :d
CUO 1 18 5 6
MAKE "z2 :n MAKE "v2 :d
RES :z1 :v1 :z2 :v2
MAKE "n1 :n MAKE "d1 :d
PRO :n1 :d1 30 41
PRINT (LIST :n "/ :d)
END
```

```
TO EXP3
;[13/5-(3/20*2/3)]^3:(7/6+4/3)^4
PRO 3 20 2 3
MAKE "n2 :n MAKE "d2 :d
RES 13 5 :n2 :d2
PT :n :d 3
MAKE "nn1 :nn MAKE "dd1 :dd
SUMA 7 6 4 3
PT :n :d 4
MAKE "nn2 :nn MAKE "dd2 :dd
CUO :nn1 :dd1 :nn2 :dd2
PRINT (LIST :n "/ :d)
END
```

```
TO EXP4          (este ejercicio combina los dos
                 precedentes: EXP2 y EXP3)
;[(2/5*15/8-1/18:5/6)*30/41]*[13/5-
-(3/20*2/3)]^3:(7/6+4/3)^4
EXP2
;MAKE "nt1 :n MAKE "dt1 :d
EXP3
MAKE "nt2 :n MAKE "dt2 :d
PRO :nt1 :dt1 :nt2 :dt2
PRINT (LIST :n "/ :d)
END
```

*La estructura modular de* Logo *evidencia el procedimiento de resolución de las expresiones y las reglas para su resolución. Si la expresión es larga, se puede partir en distintos trozos, resolverlos separadamente y, finalmente, llegar al resultado final.*

La estructura modular de *Logo* evidencia el procedimiento de resolución de las expresiones y las reglas para su resolución. Si la expresión es larga, se puede partir en distintos trozos, resolverlos separadamente y, finalmente, llegar al resultado final:

```
TO EXP5
;(2/5+8/15-1/3)*(7/6-4/3+4/4)
EE1
```

```
MAKE "n1 :n MAKE "d1 :d
EE2
MAKE "n2 :n MAKE "d2 :d
PRO :n1 :d1 :n2 :d2
PRINT (LIST :n "/ :d)
END

TO EE1
;(2/5+8/15-1/3)
SUMA 2 5 8 15
RES :n :d 1 3
PRINT (LIST :n "/ :d)
END

EE2
;(7/6-4/3+1/2)
RES 7 6 4 3
SUMA :n :d 1 2
PRINT (LIST :n "/ :d)
END
```

## Conclusiones

Como decía esquematizando los objetivos, la actividad presentada permite reforzar algunos contenidos y competencias muy importantes, que muchos alumnos aprenden normalmente de forma superficial y mecánica, y olvidan, aún cuando mantengan algunas habilidades y sepan resolver operaciones con fracciones.

Sin adentrarme demasiado en el tema, creo que muchos profesores conocemos la facilidad con que alumnos de capacidad suficiente, después de meses en que han resuelto ejercicios largos y complejos, se equivocan todavía ante simples operaciones como: 2 + 3/5 (donde contestan 5/5), 1/2 – 1/4 (con varios errores posibles), 1/4 : 1/2 (que normalmente resulta igual a 1/8), y muchas otras del mismo tipo.

De poco sirve que les hayamos obligado a imaginar tartas, que las hayan dibujado en papel cuadriculado, coloreado, recortado con tijeras: en sus casas, los alumnos nunca cortan tartas, que, además, está claro que no llevan cuadrículas, sino, como mucho, guindas, que no siempre ayudan a una repartición matemáticamente correcta.

*De poco sirve que les hayamos obligado a imaginar tartas, que las hayan dibujado en papel cuadriculado, coloreado, recortado con tijeras: en sus casas, los alumnos nunca cortan tartas, que, además, está claro que no llevan cuadrículas, sino, como mucho, guindas, que no siempre ayudan a una repartición matemáticamente correcta.*

No pretendo afirmar que las actividades con el ordenador resuelvan por sí solas este tipo de problemas, pero reconducen los contenidos a un ambiente operativo distinto, en donde las reglas, por abstractas que sean, adquieren una operatividad, producen una respuesta de la máquina, correcta o no, realizan un *feed back.*

Esta interacción con la máquina me parece un aspecto muy importante cuando trabajamos con contenidos abstractos (evidentemente, las operaciones con las fracciones no tienen en un contexto social amplio la misma centralidad que les otorga el currículo de matemáticas) o formalizado.

> El ordenador puede convertir en concreto (y personal) lo que es formal. (Papert, 1980)

Es evidente que mejores serán las respuestas de un mayor número de alumnos cuanto más cercanos, concretos y motivadores sean los temas que el laboratorio de informática les sabe proponer, respetando de este modo el *principio de continuidad* (la relación entre las matemáticas y los conocimientos personales), el *principio de potencia* (permitiendo a los alumnos la elaboración de proyectos significativos) y el *principio de resonancia cultural* (la materia debe de tener un sentido en un contexto social más amplio) (Papert, 1980).

Por otro lado, es inútil forzar la significatividad o la pragmaticidad de unos contenidos: el riesgo es aumentar aún más la artificialidad de la situación.

Podemos aprovechar el hecho de que el trabajo con el ordenador ejerce una fuerte fascinación sobre los alumnos y tiene una aceptación social muy positiva. Tiene también reglas, lenguajes, situaciones comunicativas propias, a veces muy rígidas y áridas; otras veces mucho más dinámicas que algunas de las tareas que ofrecemos día a día en nuestras clases.

Además, se puede potenciar el valor comunicativo de la actividad, organizando a los alumnos por parejas o pequeños grupos y permitiendo la confrontación de las ideas.

Otro aspecto importante que se manifiesta a menudo en el trabajo con el ordenador es la relativización de la importancia de los contenidos.

Sin considerar el aspecto formal y conceptual, si comparamos la importancia operativa, en el contexto de las operaciones con fracciones, parece evidente que el MCM desarrolla un papel mucho más importante que el MCD. Saber calcular el MCM es fundamental para sumar y restar fracciones, si queremos evitar cálculos complicados, mientras que, en la tarea de simplificar fracciones, el rol del MCD puede ser sustituido eficazmente por unas simples divisiones progresivas.

En los procedimientos del ordenador, por el contrario, no parece en absoluto necesario calcular el MCM (la computadora no teme los grandes números) y resulta esencial calcular el MCD (procedimiento SEM).

El cálculo del MCM aparece sólo si decidimos acercar las tareas del ordenador a nuestra forma de proceder (ADD, versión 2).

En todo caso, el ordenador no es una medicina definitiva ni, mucho menos, inmediata.

Así, el objetivo transversal de conducir los alumnos a reflexionar sobre su forma de pensar no se mide con comprobaciones rápidas, al terminar una tarea, sino a lo largo de varios años y en situaciones concretamente problemáticas.

> Empecé a ver cómo los niños que habían aprendido a programar un ordenador podían utilizar modelos informáticos para reflexionar sobre cómo se piensa, para aprender cómo se aprende, y, de este modo, para desarrollar sus capacidades de psicólogos y epistemólogos. (Papert, 1980)

**Guido Angelo Ramellini**
Scuola Media Statale Italiana.
Madrid.
Sociedad Madrileña
de Profesores de Matemáticas
«Emma Castelnuovo»

## Referencias bibliográficas

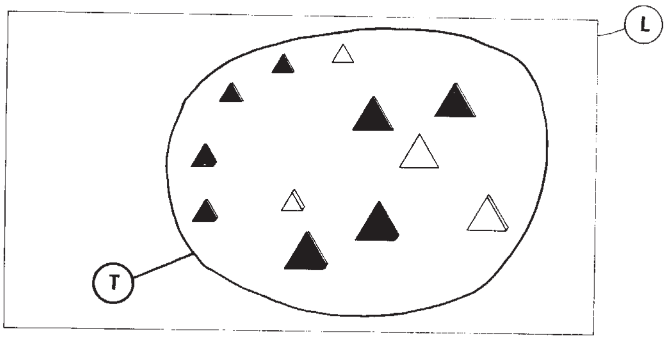
HIDALGO ALONSO S. y otros (1999): «Evolución de las destrezas básicas para el cálculo y su influencia en el rendimiento escolar en matemáticas», *Suma* n.° 30, 37-45.

HIDALGO ALONSO S. y otros (1999): «La destreza para el cálculo elemental como factor de aprovechamiento en Matemáticas en el primer ciclo de la ESO», en *Actas de las 9as JAEM,* 538-541.

RAMELLINI, G. A. (1999): «Algunos contenidos matemáticos con Logo», *Suma*, n.° 32, 91-97.

PAPERT, S. (1980): *Mindstorm*, Basic Book, New York.

Coge la caja de Bloques Lógicos, o conjunto L. La línea roja encierra el subconjunto T = { triángulos }.




— Con un trazo azul encierra { triángulos pequeños }. Le llamarás P.

— Completa:

| | | |
|---|---|---|
| ........ ∈ P | △ ........ T | Podemos decir |
| ........ ∈ P | △ ........ T | P ........ T |
| ........ ∈ P | △ ........ T | |
| ........ ∈ P | △ ........ T | |
| ........ ∈ P | △ ........ T | |
| ........ ∈ P | △ ........ T | |

En la ficha 2 A has encontrado que $T \subset L$.

Si $P \subset T$
y $T \subset L$ } podemos afirmar que $P \subset L$.

— Repite todo el ejercicio, formando el subconjunto { círculos } y luego { círculos pequeños }.

— Traza el esquema.

Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$
**Esta propiedad de la inclusión es la propiedad transitiva.**

3.° EGB