SUMA 40
junio 2002, pp. 129-132

Un gran matemático

Carlos Usón Villalba
Ángel Ramírez Martínez

DESDE LA HISTORIA

EL NÚMERO 19 de la renovada revista *SIGMA* (septiembre de 2001), que anima desde Bilbao Santiago Fernández, incluye un artículo de Julián Aguirre: «Todo lo que siempre quisiste saber sobre ≠». Se trata de un atractivo paseo histórico por el problema de la cuadratura del círculo y los valores que las distintas civilizaciones han ido asignando a ese «número-letra», así como por los métodos empleados para obtenerlos. Por lo que al mundo árabe se refiere sólo aparecen las aproximaciones utilizadas por el inevitable al-Jwarizmi. Aprovechamos esta excusa para dedicar este artículo a un matemático que atrajo nuestro interés, en un primer momento, precisamente por su aproximación de ≠.

Nos estamos refiriendo a Ghiyath al-Din Jamshid al-Kashi, a quien ya hemos citado en otras ocasiones. Nació cerca de Isfahan (Irán), en la segunda mitad del siglo XIV. Hacía doscientos años que las invasiones mongolas habían destruido el califato de Bagdag y la actividad científica se había trasladado a Samarkanda que bajo el despotismo ilustrado de Ulugh Beg, nieto de Tamerlán, se convirtió en un centro intelectual de cuyo observatorio astronómico fue director al-Kashi. En una carta a su padre le escribía que

> …los entendidos se reúnen y los profesores que imparten clases de todas las ciencias están asequibles, y los estudiantes se afanan todos en el arte de las matemáticas.

Los intereses de al-Kashi no se limitaron a sus estudios sobre astronomía. Resaltaremos solamente que entre los temas que trató en los cuatro libros de su obra más importante, *La llave de la aritmética*, se encuentra una recopilación de lo mejor de la aritmética y el álgebra árabes, la primera exposición sistemática que se conoce sobre las fracciones decimales[1], el desarrollo de un método iterativo para obtener la raíz enésima de un número y problemas de medida relacionados con la arquitectura (en particular, la construcción de decoraciones con mocárabes). A su muerte, en 1429, Ulugh Beg alabó su obra:

> …el admirable mullah conocido entre los famosos del mundo, que había dominado y completado la ciencia de los antiguos, y que había resuelto las cuestiones más difíciles.

Un error menor que el grosor de un cabello

Al-Kashi siguió para su cálculo de ≠ (recogido en *Tratado sobre el círculo*, obra que terminó en 1424) el método de Arquímedes –aproximar la longitud de una circunferencia mediante polígonos regulares inscritos y circunscritos de un número de lados cada vez mayor– trabajando con un polígono de $3 \times 2^{28} = 805.306.368$ lados. Por más que la cifra impresione a nuestros alumnos y alumnas de Secundaria[2], el mérito teórico no está en la cantidad. Una vez encontrado un procedimiento iterativo para pasar de un perímetro al del polígono de un número doble de lados, el resto es posible si se dispone de una refinada habilidad calculística. El que utilizó al-Kashi se basa en un sorprendente resultado.

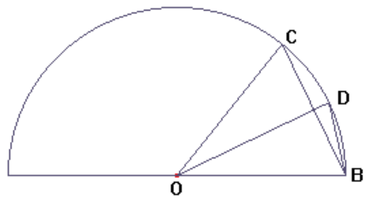

Figura 1

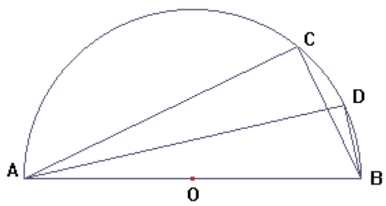

Figura 2

En la figura 1 están dibujados los lados de dos polígonos regulares inscritos en la circunferencia, de tal manera que uno de ellos (lado *DB*) tiene el doble de lados que el otro (lado *CB*). En general, suponemos que corresponden a los polígonos n–1 y n de una serie de polígonos regulares inscritos de $k2^n$ lados (para un valor de k inicial, fijo)[3]. Podemos designar entonces *CB* como l_{n-1} y *DB* como l_n. Youschkevitch enuncia la proposición empleada por al-Kashi en términos de una igualdad entre superficies (figura 3):

El rectángulo que tiene por lados el semidiámetro OA por una parte, y la suma del diámetro AB y de la cuerda AC (c_{n-1}) *por otra, tiene un área igual que el cuadrado construido sobre la cuerda AD* (c_n).

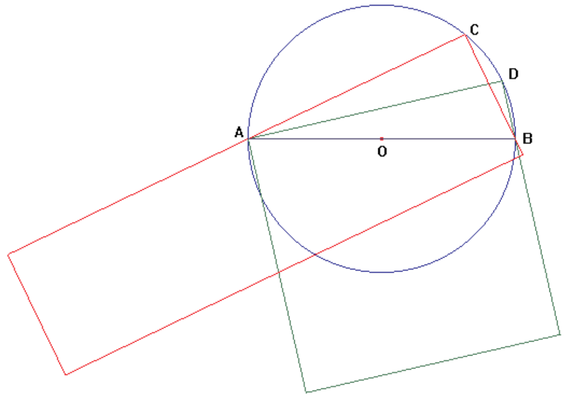

Figura 3

Así expresada, hemos tenido necesidad de algunas pruebas para empezar a convencernos empíricamente de su validez. La pregunta es la de siempre en estos casos: ¿cómo se le pudo ocurrir esto? Si se traslada el resultado a un contexto trigonométrico queda en la forma

$$\cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1 + \cos a}{2}$$

que nos resulta muy familiar, como sin duda lo era para al-Kashi, pero que parece improbable como vía de acceso a la igualdad de áreas del enunciado.

En cualquier caso, el método iterativo buscado está servido. Puesto que (llamando d al diámetro)

$$\frac{1}{2} d(c_{n-1} + d) = (c_n)^2$$

conocida la cuerda c_{n-1} (*AC* en la figura 2) correspondiente al polígono n–1, se puede calcular la cuerda c_n (*AD*) correspondiente al polígono n. El teorema de Pitágoras permite obtener (triángulo *ADB*)

$$(l_n)^2 = d^2 - (c_n)^2$$

El resto es cálculo, pero guiado por un objetivo. Al-Kashi necesita el polígono número 29 de la serie porque, después de criticar la insuficiencia del valor de ≠ dado por al-Biruni (3,1417) y lo que él creía un error de Abu-l-Wafa, decide que

> la circunferencia de un círculo debe ser expresada en función del diámetro con una precisión tal que el error sobre la longitud de la circunferencia de un círculo cuyo diámetro sea igual a 600.000 veces el de la Tierra no sobrepase el espesor de un cabello.

Aunque operó en base sexagesimal, él mismo hizo la traslación a base 10. Nos sigue venciendo el encanto de la comparación entre las dos expresiones:

$$p = 3,\ 08\ \ 29\ \ 44\ \ 00\ \ 47\ \ 25\ \ 53\ \ 07\ \ 25_{(60} =$$
$$= 3,\ 14159265358979325_{\ (10}$$

Youschkevitch sugiere que en la literatura matemática árabe empezó a afirmarse la convicción de la irracionalidad de ≠. Algo de ello hay seguramente en el comentario del propio al-Kashi

> nadie puede conocer toda la verdad sobre esta cuestión excepto Allah.

Una técnica muy antigua

Entre los misterios nunca revelados en las clases de matemáticas –también es cierto que muy pocas veces reclaman alumnos y alumnas que lo sean– se encuentra el de cómo se calcularon los primeros valores de las funciones trigonométricas y de los logaritmos. La referencia a los desarrollos en serie no satisface la curiosidad histórica porque son muy tardíos[4]. Las calculadoras han hecho desaparecer los listados de columnas con seis o más decimales y quizás con ellas se haya ido también todo conato de curiosidad. La calculadora dota al seno de un ángulo o al logaritmo de un número de un tono aséptico y del carácter de indiscutible que acompaña sesgadamente a la ciencia y tecnología actuales. Aquí es imprescindible la Historia para democratizar la ciencia (en este caso las matemáticas) y contribuir a una didáctica humanista.

Dentro del mundo árabe, antes de al-Kashi calcularon sen 1° (por procedimientos distintos y sin alcanzar su altísimo grado de aproximación), entre otros, Abu-l-Wafa (s. X), y al-Biruni (s. XI). Abu-l-Wafa merece ser recordado en clase de primero de bachillerato por sus aportaciones personales en trigonometría y por su labor consciente de sistematización de esta materia, de forma similar a lo hecho para el álgebra por al-Khwarizmi. Si se decide efectuar la visita a la Historia que proponemos a continuación, deberemos resaltar el empleo del álgebra como instrumento de resolución de problemas en trigonometría. Pero antes de comenzarla recordaremos con un ejemplo una idea «moderna» de tradición muy antigua.

Hace quince años, en los viejos tiempos en los que parecía posible que las calculadoras ocuparan el escaño que en justicia les corresponde en las aulas, se puso de moda –estaba en el aire, si se prefiere– una propuesta de problema con calculadora científica. Puesto que la conocimos a través de Paco Hernán, empleamos sus palabras (Hernán, 1991)) para presentarla:

> Supongamos que escribo un número cualquiera en la calculadora y pulso sucesivamente, una y otra y muchas veces, la tecla coseno. ¿Qué ocurrirá?

Un análisis detallado de esta cómoda y eficaz manera de resolver la ecuación[5] $\cos x = x$ puede verse en Grupo Azarquiel y José Colera (1983). La pátina de modernidad que proporciona a los algoritmos iterativos su adaptación a la tecnología actual queda sorprendentemente puesta en cuestión si se estudia su devenir histórico. Hay noticia de su presencia hace 2000 años en China, aunque el primer escrito conservado que explica lo que los occidentales en el XIX llamarían «método de Horner» sea del siglo XIII (Chiu Chiu Sao). Métodos similares al empleado por al-Kashi en su cálculo de sen 1° fueron utilizados en occidente, 200 años después, por Viète y Kepler. Todo ello testimonia el ingenio heurístico del ser humano en su búsqueda de soluciones –en este caso en cuestiones relacionadas con álgebra y trigonometría– con antelación a la existencia de una teoría consolidada que, por otra parte, sólo puede llegar a desarrollarse con estas etapas previas.

Una ingeniosa estrategia

Los pasos seguidos por al-Kashi para su cálculo del valor de sen 1° fueron los siguientes:

1) Recurre a una igualdad ya conocida por los matemáticos árabes desde hacía trescientos años:

$$\mathrm{sen}3\alpha = 3\mathrm{sen}\alpha - 4\mathrm{sen}^3\alpha$$

para plantear

$$\mathrm{sen}3° = 3\mathrm{sen}1° - 4\mathrm{sen}^3 1°.$$

2) Calcula, por el método recogido en la obra de Abu-l-Wafa, el valor de sen 3° = 0,052335956.

3) Los dos pasos anteriores le llevan a plantear la ecuación (tomamos x = sen 1°)

$$x^3 - 0{,}75x + 0{,}013083989 = 0 \qquad (*)$$

que resolvió por un procedimiento iterativo. Los matemáticos árabes empleaban estas técnicas al menos desde el siglo XII. Obsérvese que todo esto puede interpretarse como la trisección algebraica de un ángulo de 3°.

Al-Kashi, al igual que en su aproximación del valor de ≠, realizó sus cálculos en sistema sexagesimal. Al pasar su resultado a base 10 se obtienen 18 cifras decimales exactas:

$$\mathrm{sen}\ 1° = \ 0{,}017452406437283571_{(10}$$

El interés de esta visita al Museo de la Historia en una clase de primero de Bachillerato nos parece fuera de toda duda. Hemos dado argumentos para justificarla, si no expresamente sí de forma implícita, en todos los artículos anteriores: valoración del ingenio no occidental, comprobación de que las matemáticas no son un producto acabado descendido desde el inmóvil olimpo platónico de las Ideas, admiración ante el esfuerzo desplegado por los seres humanos en la resolución de problemas y en la búsqueda de certezas. Pero nos basta en este caso con pensar en la sorpresa que puede producir en alumnos y alumnas acostumbrados a la resolución de ecuaciones por procedimientos «exactos» tipo «fórmula de la ecuación de 2.° grado». La ecuación de tercer grado de al-Kashi se adapta peor que cos $x = x$ a una calculadora científica normal, pero puede ser una buena excusa para explorar el funcionamiento de una calculadora gráfica, que permite trabajar a la vez con tablas de valores de dos funciones. En este caso, por ejemplo[6]

$$f(x) = x \quad \text{y} \quad g(x) = 1{,}\overline{3}x^3 + 0{,}0174453187.$$

Es cierto que al proponer el mismo algoritmo iterativo para las dos ecuaciones no estamos siendo estrictamente fieles a la Historia, pero esto es claramente un inconveniente menor.

No podemos dejar sin comentario el cálculo de sen 3° según el método de Abu-l-Wafa. Puesto que había obtenido las fórmulas para seno y coseno de la suma y diferencia de dos ángulos, llega a sen 12° como resultado de sen (72° – 60°). El valor de sen 60° era ya conocido por los hindúes, y para sen 72° recurre a una ingeniosa construcción geométrica[7] en un triángulo isósceles de ángulos 36°, 72° y 72° (un «pico» de la estrella pitagórica de cinco puntas). Una vez obtenido sen 12°, dos aplicaciones sucesivas de la fórmula del seno del ángulo mitad llevan a sen 3°.

Libros citados

GRUPO AZARQUIEL y J. COLERA (1983): *La calculadora de bolsillo como instrumento pedagógico*, ICE de la Universidad Autónoma de Madrid, Madrid.

GHEVERGHESE JOSEPH, G. (1996): *La cresta del pavo real,* Pirámide, Madrid.

HERNÁN, F. (1991): *Retrato de una profesión imaginada*, Proyecto Sur, Granada.

YOUSCHKEVITCH (1976): *Les mathématiques arabes (VIII-XV siècles)*, Librairie philosophique J. Vrin, Paris.

Notas

1 Propone, por tanto, que el sistema decimal posicional no sólo es válido para escribir y manejar números enteros sino también las fracciones de la unidad. Véase C. Usón y A. Ramírez: «¿Por qué seguir anclados en Egipto?», *Suma*, n.° 35.

2 La idea de Arquímedes para el cálculo de ≠ puede ser explotada didácticamente con excelentes resultados. Véase A. Ramírez y C. Usón: *Variaciones sobre un mismo tema*, Proyecto Sur, Granada, 1998.

3 En el dibujo hemos utilizado $k = 7$. La serie de al-Kashi es $3x2^n$ pero como se verá el razonamiento empleado es válido para cualquier valor de k (en rigor, claro, $k \geq 3$).

4 Aunque menos de lo que nuestra formación podría hacernos pensar. G. Gheverghese Joseph (1996) recoge desarrollos en serie del seno, coseno y arco tangente, realizados ¡¡¡por procedimientos geométricos!!! por los matemáticos de la región de Kerala, en la India, ¡¡¡en el siglo XIV!!!

5 La calculadora, claro, debe estar preparada para operar en radianes. Pero también da solución (incluso converge antes) si está en grados. ¿Por qué no es real la solución que se obtiene en este caso?

6 Para seguir el sencillo modelo de $x = \cos x$, despejamos x en (*):

$$0{,}75x = x^3 + 0{,}013083989$$

de donde resulta

$$x = 4/3\ x^3 + 0{,}0174453187.$$

7 Es inevitable seleccionar la información recogida en el artículo que puede ser consultada en los libros. Remitimos para esta construcción al texto de G. G. Joseph. Youschkevitch muestra otra similar, esta vez de al-Biruni, para resolver otra ecuación de tercer grado, planteada con la finalidad de calcular el lado de un polígono regular de nueve lados. Como la austera edición de este libro puede dificultar su localización, advertimos que se encuentra en la página 93 y figura 20 del apéndice de notas.