SUMA 40
junio 2002, pp. 113-117

Isoperímetros: Resolución del problema de los isoperímetros mediante la función cuadrática

Grupo Construir las Matemáticas*

TALLER DE PROBLEMAS

YA HEMOS PRESENTADO al problema isoperimétrico utilizando diferentes escenarios. Con el fondo de la Historia, lo presentamos desde su nacimiento y, por ahora, lo hemos dejado en el siglo XVII de la mano del Cálculo de Variaciones (en el próximo número de SUMA lo acercaremos hasta nuestros días). Con el fondo de una clase de Matemáticas, ha salido, también cogido de la mano, de la Geometría y del Álgebra. Hoy toca pasear por los jardines que las Funciones ofrecen; en particular con la función cuadrática resolveremos un caso particular.

Desde la antigüedad ha interesado encontrar la relación entre el perímetro y el área de las figuras planas. Así, Ptolomeo, en su *Almagesto*, escribe:

> Puesto que entre las figuras diferentes pero isoperimétricas, las que tienen más lados son más grandes, entre las figuras planas el círculo es la mayor y de entre los sólidos, la esfera.

Tratamos de reconstruir el histórico y clásico problema de los isoperímetros de forma que pueda ser entendido y tenga interés para nuestros alumnos y alumnas de Secundaria.

Esto nos va a permitir desarrollar el pensamiento matemático al buscar las soluciones, así como poner de manifiesto lo que de cultura matemática hay en el mundo real, para llegar a la conclusión de que hay Matemáticas en todo lo que nos rodea, ¡hasta en un cuadro! Comprobémoslo.

> Deseamos saber cuál es el mayor cuadro de forma rectangular que tiene 3 metros de perímetro.

Este es el enunciado del problema de los isoperímetros bajo el cual trabajaremos con nuestros estudiantes. Éstos, en su resolución, deben emplear heurísticos que les ayuden a desarrollar sus capacidades matemáticas y a sistematizar sus resultados y conclusiones parciales, despertando en ellos actitudes positivas hacia la investigación y gusto por el trabajo bien hecho.

* Los componentes del Grupo Construir las Matemáticas son Rafael Pérez, Isabel Berenguer, Luis Berenguer, Belén Cobo, M.ª Dolores Daza, Francisco Fernández, Miguel Pasadas y Ana M.ª Payá.

Comenzamos estableciendo una discusión entre el alumnado sobre los distintos cuadros que se pueden construir con un listón metálico de 3 metros de longitud, lo suficientemente fino y flexible, como para poder hacer las esquinas doblándolo.

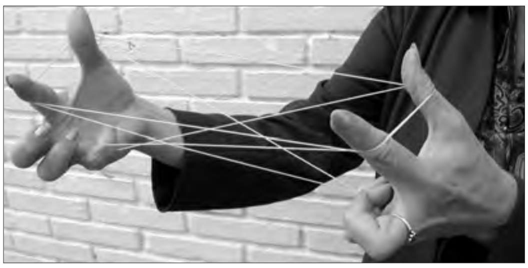
Siguiendo las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele[1], les planteamos la pregunta de si todos los cuadros son igual de grandes –es decir, tienen igual área– y muchos responden que sí, pero casi al mismo tiempo otros dicen que no, tras comprobarlo con dos o tres casos concretos. Esta situación nos permite disponer de un diagnóstico previo del grado de asimilación y conocimiento de la cuestión por parte del alumnado, y es el punto de arranque para analizar en profundidad el problema e intentar resolverlo.

Para continuar, podemos usar diversas estrategias matemáticas de simulación, como la de hacer el cuadro sobre el papel o sugerirles que utilicen un cordón o, bien, ayudarnos del programa Cabri-géomètre II, etc.

Con un cordón

La simulación del problema mediante un cordón, es similar al inicio de un juego muy popular, que consiste en anudar los extremos del mismo y sostenerlo tirante con los dedos índice y pulgar de ambas manos, a modo de un rectángulo, tal como nos indican las fotos adjuntas.

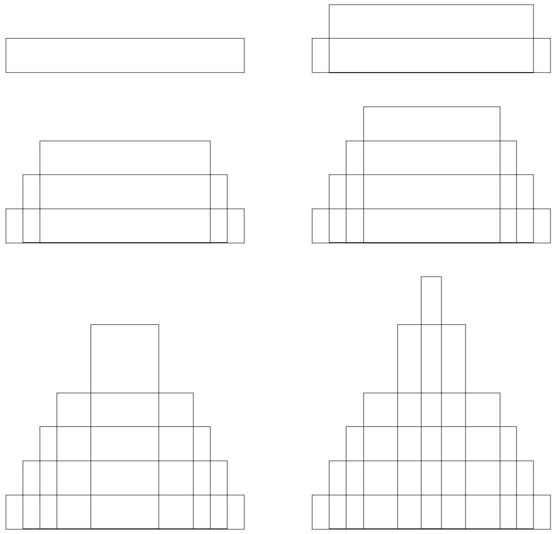
El juego continúa con la realización de diversas figuras con el cordón según nos muestra estas otras fotos.



Podemos comenzar, por ejemplo con los dedos índice y pulgar, de cada una de las manos, prácticamente unidos, y, a continuación, iríamos separándolos cada vez más.

Sobre un papel

La simulación sobre un papel, que ha sido anteriormente citada, quedaría reflejada en la siguiente serie de dibujos.



El estudiante utiliza sus conocimientos lógicos y construye algunos cuadros mediante los diversos procedimientos que hemos enunciado. En cualquier caso, necesita conocer la longitud de los lados del cuadro rectangular. Si es necesario, se les da una pista a aquellos que lo precisen; por ejemplo, se les dice que si la base la toman de 1 metro, la altura tendrá que ser necesariamente de 0,5 metros, de forma que los cuatro lados sumen 3 metros; el área del tablero así construido es de 0,5 m^2. Se les solicita que piensen en seis cuadros más, con otras dimensiones, y que tengan en cuenta que basta ir fijando la base y a partir de ahí calcular todo lo demás; y, por supuesto, que anoten sus cálculos.

Cuando los hayan hecho, se les pregunta sobre la forma de organizar toda esa información para poderla comparar mejor, observar regularidades y ayudarles en sus decisiones. En el caso de que tengan dificultades para hacerlo se les puede preguntar, ¿os facilitaría vuestro trabajo de investigación la construcción de una tabla? Esta pregunta se les hará en el caso de que nadie haya organizado la información usando este tipo de heurístico. Incluso en caso necesario, se les puede proponer una tabla en concreto; por ejemplo, que anoten en una fila la longitud de la base en forma ordenada y en la otra, el resultado del cálculo del valor de la superficie.

Base (en metros)		0,1		0,5		0,6		1	
Área (en m^2)		...		0,5		...		...	

Llegado a este punto, se les solicita que intenten hacer la tabla de otra forma. Tras sus sugerencias se establece un debate para poner de manifiesto distintos caminos de plantear y resolver el problema.

Una posible ficha o esquema de trabajo que proponemos a los alumnos y alumnas consiste en:

- Completa la tabla, con todos los datos que necesites.
- ¿Se repiten algunos de los valores del área?
- ¿Crees que sería más cómodo usar centímetros en vez de metros?
- Observa la tabla detenidamente y comprueba si se da alguna regularidad.
- ¿Estás en condiciones de decidir sobre las dimensiones del cuadro de mayor área? ¿Cuáles son?
- Para que tengas más seguridad en tu respuesta, comprueba con un valor mayor y otro menor, próximos al de la base que has calculado.
- Si necesitas más valores en la tabla puedes ayudarte de la calculadora, si lo estimas oportuno.
- ¿Te decides ya?

Con esta primera parte del esquema el estudiante aprende a organizar su información de forma correcta, observa regularidades, adecua las unidades de medida al contexto del problema, comprueba soluciones, maneja la calculadora…

Completemos la ficha, usando otra estrategia que nos permita confirmar que la decisión adoptada es la correcta.

- Construye una gráfica, representando sobre el eje de abscisas la variable «base» y sobre el eje de ordenadas la variable «Área». No olvides graduar los ejes de forma adecuada, para ello recuerda todo lo aprendido sobre esta cuestión.
- Si ya has construido la gráfica, obsérvala detenidamente.
- ¿A mayor base le corresponde mayor área? ¿Ocurre siempre?
- ¿La gráfica es ascendente? ¿Para qué valores de la base lo es?
- ¿A partir de qué valor de la base disminuye el área?
- Comprueba si aparece alguna regularidad.
- ¿Qué conclusiones obtienes?
- ¿Cuál es el mayor cuadro que tiene 3 metros de perímetro? ¿Es el mismo que obtuviste antes usando sólo la tabla?
- ¿Qué te aporta la gráfica?
- Escribe en tu cuaderno las reflexiones que te hayas ido haciendo en la lectura de la tabla y de la gráfica para reafirmar o modificar tu decisión sobre las dimensiones que debes darle al cuadro rectangular para que salga lo más grande posible.

Si profundizamos, para el segundo ciclo de la ESO, podemos ampliar la resolución del problema añadiendo a la organización de los datos en la tabla y a la visión intuitiva de la gráfica la potencia del lenguaje simbólico mediante la fórmula del área que nos da la expresión matemática de la función cuadrática de la que queremos calcular el máximo absoluto.

La ficha que sugerimos en esta segunda fase es la siguiente:

Rellenar la tabla siguiente:

Base (en m) = b			0,4						
Altura (en m) = $1{,}5–b$			1,1						
Área (en m^2) = $b(1{,}5–b) = 1{,}5b–b^2$			0,44						

Teniéndola en cuenta responde a las siguientes cuestiones:

- ¿Cuál es la variable independiente? ¿Podía haber sido otra?
- ¿Cuál es la variable dependiente?
- ¿Hay una relación funcional entre ellas?
- ¿De qué tipo?
- ¿Qué expresión matemática tiene esta función?
- Expresa cuál es el dominio.
- Con ayuda de tus conocimientos determina el vértice de la parábola.
- Representa la función.
- Determina el recorrido.
- ¿En qué intervalos es creciente?, ¿y decreciente?
- ¿Qué ocurre en el vértice?
- Debes estar en condiciones de decir cuáles son las dimensiones del cuadro de mayor área, sabiendo que su perímetro es de 3 metros.
- ¿Conocer la fórmula de la función te permite resolver el problema con más seguridad, precisión y economía de esfuerzo?

Con este esquema el alumnado aprende a valorar la importancia del uso de las fórmulas. Asimismo, el conocimiento del modelo matemático de la función cuadrática le permite, al aplicarlo en este caso, determinar con total precisión el máximo absoluto de la función y encontrar, finalmente, la solución del problema.

Construcción con Cabri II

La simulación del problema mediante un proceso constructivo puede realizarse a través del programa Cabri-géomètre II, tal como dijimos en un principio.

El problema de saber cuál es el mayor cuadro rectangular que tenga 3 metros de perímetro (longitud del listón), se reduce al de buscar el que tenga 1,5 metros de semiperímetro. Trazamos un segmento con esta nueva longitud y lo dividimos en dos partes, una será la base y la otra la altura del cuadro.

Con los dos trozos construimos un rectángulo, y medimos su área:

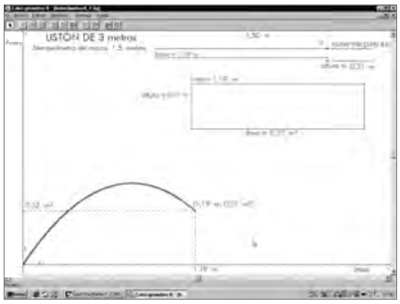
Llevamos las medidas de la base y la del área a un sistema de ejes de coordenadas, obtenemos un punto:

Si cortamos el listón por otro punto obtendremos una nueva situación:

Si lo hacemos por otro lugar, obtendremos otro rectángulo y un nuevo punto en el sistema de ejes coordenados:

Podemos hacerlo de muchas formas:

Si el punto P por donde cortemos el listón, lo sometemos a una animación, y activamos la traza del punto de la gráfica:



Va apareciendo la gráfica de la función.

Si nos situamos en la gráfica, más concretamente, en el máximo absoluto de la misma, tendremos la solución al problema. Se observa que la longitud de la base es de 0,75 y el área de 0,5625 (puede usarse una mayor precisión que la desarrollada en los gráficos). Estos resultados, como puede apreciarse, se corresponden con un cuadrado.

La ficha o esquema que, más concretamente, proponemos a los alumnos y alumnas para la realización de esta construcción es:

- Elige en *Opciones – Preferencias – Precisión mostrada y unidades*:
  Número de decimales - Longitud: 3.
  Unidades: Metro (m).
- Traza un segmento.
- Fija un extremo con el *Fijar/Liberar*.
- Mide dicho segmento, aparece una medida.
- Mueve el otro extremo del segmento hasta que aparezca la medida de 0,150 metros.
- Fija este otro extremo del segmento.
- Usa la escala de 1:10, para lo cual activa la calculadora, pincha en la medida de 0,150 metros, y multiplícala por 10, aparece la nueva medida de 1,5 metros (longitud del semiperímetro del marco).
  Con el ratón arrastra el resultado junto a la medida inicial y oculta ésta con *Ocultar/Mostrar*.
- Sitúa un punto sobre el segmento. Mediante *Etiqueta* asígnale la letra P.
- Comprueba con el ratón que puedes mover el punto P sobre dicho segmento.
- En *Modificar apariencia*, pincha en el punto más grueso y a continuación sitúate en P, aparece un pincel, pincha con él en dicho punto, harás que resalte bastante y así lo observarás con más facilidad.
- El segmento original ha quedado dividido en dos nuevos segmentos (son la base y la altura del marco). Mide ambos segmentos con *Distancia y longitud*, desde cada uno de los extremos hasta el punto P, aparecen dos nuevas medidas.
- Paralelamente y un poco más abajo, vas a construir separadamente la base y la altura del marco, para lo cual traza una semirrecta a la altura del extremo izquierdo del segmento y hacia la derecha, y realiza la *Transferencia de la medida*, sin escalar, del nuevo segmento situado a la izquierda sobre dicha semirrecta, oculta a continuación dicha semirrecta, te quedan dos puntos que los unes mediante un segmento, de esta manera acabas de construir la base del marco. Traza otra semirrecta, paralelamente y un poco más abajo, a la altura del extremo derecho del segmento inicial y hacia a la izquierda y procede de forma similar para el otro segmento obtienes la altura del marco.
- Mediante *Etiqueta*, ponles los nombres de base y altura respectivamente.
- Observa y comprueba qué ocurre al mover el punto P sobre el segmento inicial.
- Usando la escala anterior transforma las medidas de la base y altura en otras dos para que sean compatibles y se ajusten a nuestro problema (utiliza el mismo proceso, multiplica por 10).
- Para construir el marco procede, por ejemplo, así:
  Traza una semirrecta, y para que sea el borde superior del marco transfiere la medida correspondiente a la base, sobre el nuevo punto obtenido traza una semirrecta perpendicular a la anterior y lleva sobre ella la medida de la altura mediante la transferencia de medidas, sobre el nuevo punto recién obtenido traza una nueva semirrecta perpendicular a la anterior y transfiere la medida de la base, a partir del nuevo punto traza otra semirrecta perpendicular a la anterior y transfiere la medida de la altura. Mediante *Polígono* une los cuatro puntos, obtienes uno de los posibles marcos que se pueden construir.
- Oculta las semirrectas anteriores, para que se note bien dicho marco.
- Observa y comprueba lo que ocurre al mover el punto P.
- Mide las longitudes de la base y la altura del marco, y aplica la escala que se estableció al principio.
- Mide el área del polígono, en nuestro caso la del marco. Aplica doblemente la escala, es decir, multiplica por 100.
- Activa *Mostrar ejes*, y lleva el origen de coordenadas al extremo inferior izquierdo de la pantalla.
- El eje de abscisas será la base, y el de ordenadas, el área.
- Lleva las medidas del marco, mediante la transferencia de medidas, a los correspondientes ejes. Tendrás que escalar las medidas que lo precisen para que la gráfica que obtengas esté dentro de la visualización en pantalla.
- Oculta todas las medidas que no se ajusten a nuestro problema, y quédate con las que necesites para la compresión del mismo.
- Sobre los puntos que obtienes en los ejes traza perpendiculares a los mismos, y sitúa un punto en la intersección de ambas rectas, oculta dichas rectas, y traza segmentos discontinuos desde dicho punto a los ejes coordenados.
- Activa *Traza* para dicho punto, y *Animación* para el punto P (aparece un muelle, suéltalo. Prueba con diversas intensidades del mismo).
- Obtienes una gráfica. Analízala enumerando todas sus características y cuáles te ayudan a solventar el problema de forma razonada.

El alumnado debe reflexionar sobre lo realizado, y cómo este poderoso instrumento nos ayuda a la comprensión e investigación de determinados problemas. Las nuevas tecnologías, y programas como el utilizado, nos ayudan a comprender problemas históricos en una nueva dimensión educativa actual, con lo que los alumnos y alumnas se adentrarán en el conocimiento de dichos problemas con una atractiva perspectiva de cara al futuro, pudiendo a su vez generar nuevas situaciones problemáticas que es lo que en definitiva enriquece.

Notas

[1] Grupo Construir las Matemáticas: «Isoperímetros: Ficha didáctica en geometría. Métodos trigonométricos». Páginas 101-106. *Suma* n.º 36. Febrero 2001.