SUMA 40
junio 2002, pp. 87-90

Método de determinación de máximos y mínimos previo a la enseñanza del cálculo diferencial

Francisco Raúl Tomás Blanquer

IDEAS Y RECURSOS

En este artículo se obtiene un método de obtención de rectas tangentes a curvas polinómicas sin necesidad de conocer el cálculo de derivadas. Incluso no precisa conocimientos previos de trigonometría. El cálculo de máximos y mínimos es inmediato. El procedimiento que se presenta puede considerarse como una primera toma de contacto del estudiante, de manera inmediata, con los problemas con los que se va a encontrar posteriormente al estudiar el cálculo diferencial. Este método está pensado para incitar al alumno el interés por las derivadas.

UNA DE LAS PREOCUPACIONES de mi vida, como docente, es la de simplificar al máximo la exposición de temas de Matemáticas, hacerlos más asequibles al estudiante, que éste vea su utilidad desde el principio. Esto ya lo hice en la integración de funciones racionales. En el artículo que publiqué en la revista *Educación Matemática* (Tomás, 1995), propongo un método de descomposición más simple y rápido que los que existen. En muchos casos resulta mucho más efectivo que el método de Hermite.

En este trabajo me ocupo de presentar un procedimiento para calcular rectas tangentes, máximos y mínimos de funciones polinómicas sin necesidad de emplear el cálculo de derivadas. Como se verá a lo largo de este artículo, el estudiante tan sólo necesitará saber un poco de resolución de ecuaciones algebraicas, el triángulo de Tartaglia para desarrollar potencias de binomios y desenvolverse con cierta soltura tanto en la representación gráfica como en la representación algebraica de funciones polinómicas. Con todo esto, el principiante inmediatamente se ve inmerso de lleno en tales cuestiones, lo que le puede motivar en su profundización en el estudio de funciones no polinómicas.

En los actuales planes de estudio, los problemas de optimización en los que se usa el cálculo diferencial están enclavados en el Bachillerato. El abordaje de tales problemas es delicado y árido. Los estudiantes necesitan tener un considerable grado de abstracción que, en general, no poseen cuando se ponen en contacto con ellos por primera vez. El profesor dedica muchas clases enseñándoles a emplear las reglas de derivación. En muchas ocasiones realizan ejercicios abstractos, desprovistos de interés práctico. Esto produce una dejadez en el alumno que puede ser fatal a la hora de introducir los máximos y los mínimos con problemas interesantes. Cuando el estudiante se da cuenta de la utilidad del cálculo de derivadas, puede que ya sea tarde. El tema ya le desborda.

Sin embargo, el conocimiento de algunos de estos problemas puede resultar interesante, pues se podrían presentar en la vida no académica. Pongamos por caso el de un granjero que desea construir un corral de máxima superficie adosado a un muro con cierta longitud de valla.

En matemáticas, la resolución de estos problemas pasa generalmente por el cálculo de derivadas de funciones polinómicas que han de determinarse previamente. Se iguala la primera derivada a cero y se clasifican los posibles puntos singulares en máximos y mínimos.

También exponemos, con este trabajo, un procedimiento alternativo para resolver dichos problemas. Trataremos de presentar un método para determinar rectas tangentes a las gráficas de funciones polinómicas, sin hacer uso del cálculo diferencial. La optimización se logrará exigiendo la anulación del coeficiente de la x en la expresión algebraica de la recta para que su expresión gráfica sea horizontal, con lo que se obtienen ciertos valores que serán posibles máximos y mínimos. Para saber si son máximos o mínimos, se procederá tomando valores próximos a los obtenidos y comparándolos con ellos.

Trataremos de presentar un método para determinar rectas tangentes a las gráficas de funciones polinómicas, sin hacer uso del cálculo diferencial.

El método permite resolver casi de inmediato problemas de optimización con poco esfuerzo por parte del alumno. Luego, cuando se le introducen las derivadas, ya tiene cierta idea de la importancia de las mismas, pues se halla familiarizado con las cuestiones que va a estudiar con el nuevo procedimiento, no se le introducen de sorpresa. Las reglas de derivación no le van a resultar tan áridas, pues intuye que es una potente vía para tratar los problemas de optimización mucho más general.

Rectas tangentes a curvas polinómicas

Consideremos un sistema de ecuaciones formado por una ecuación de una función polinómica de segundo grado (parábola en la representación gráfica) y de una función polinómica de primer grado (recta).

$$y = ax^2 + bx + c$$
$$y = mx + n$$

Para que esta recta sea tangente a la parábola, el sistema formado por sus respectivas representaciones algebraicas debe tener solución y, además, doble, es decir el trinomio de segundo grado formado al igualar los segundos miembros del sistema tiene que ser un cuadrado perfecto:

$$ax^2 + b + c - mx - n = a(x - \alpha)^2$$

donde α es la solución doble.

Por tanto

$$ax^2 + b + c - a(x - \alpha^2) = mx + n = y$$

con lo que

$$ax^2 + bx + c - ax^2 + 2a\alpha x - a\alpha^2 =$$
$$= mx + n = y$$

Simplificando la expresión de la izquierda

$$(b + 2a\alpha)x + (c - a\alpha^2) = mx + n = y$$

y, por identificación de coeficientes indeterminados, obtenemos

$$m = b + 2a\alpha;\ n = c - a\alpha^2$$

con lo que conocemos la recta tangente en el punto de abscisa α.

A continuación expondremos dos ejemplos, en el primero el polinomio será mónico, no siéndolo en el segundo de ellos. Creemos que el profesor debe poner ejemplos con polinomios mónicos y no mónicos debido al gran protagonismo que tiene el coeficiente de la x de mayor grado.

Ejemplo 1

Hallar la expresión de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 - 5x + 4$ en el punto de abscisa 3.

Como en este caso

$$a = 1;\ b = -5;\ c = 4;\ \alpha = 3;$$

por el resultado teórico que hemos obtenido anteriormente tendremos que la expresión algebraica de la recta tangente es $y = x - 5$.

Ejemplo 2

Hallar la expresión de la recta tangente a la gráfica de $y = 3x^2 - 10x + 14$ en el punto de abscisa 2.

En este caso

$$a = 3;\ b = -10;\ c = 14;\ \alpha = 2;$$

Con lo que la expresión de la recta tangente será $y = 2x + 2$.

Pasemos a continuación a intentar generalizar este cálculo para expresiones algebraicas de grado superior a 2. Consideremos la curva

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad [1]$$

Hemos de hallar una expresión polinómica de grado 2 cuya gráfica sea tangente a la gráfica de [1] en el punto de abscisa α.

Sea el trinomio

$$y = P_2(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$$

cuya gráfica no es preciso determinar para conseguir nuestro objetivo, pero para que ésta tenga un contacto de tercer orden con [1] debe verificarse

$$ax^3 + bx^2 + cx + d - (a_1x^2 + b_1x + c_1) = \\ = a(x - \alpha)^3$$

de donde

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = \\ = ax^3 + bx^2 + cx + d - a(x - \alpha)^3$$

con lo que

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = ax^3 + bx^2 + cx + d - \\ - ax^3 + 3a\alpha x^2 - 3a\alpha^2x + a\alpha^3$$

Agrupando la expresión de la derecha

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = (b + 3a\alpha)x^2 + \\ + (c - 3a\alpha^2)x + (d + a\alpha^3)$$

Identificando los coeficientes hallaremos la expresión del polinomio $y = P_2(x)$ que es tangente en $x = \alpha$ a [1], bastará hallar su recta tangente en $x = \alpha$, por el procedimiento descrito anteriormente, pues ésta también es recta tangente en el citado punto a la gráfica de la curva [1].

Veamos dos ejemplos prácticos.

Ejemplo 3

Hallar la expresión de la recta tangente a la gráfica de $y_1 = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$ en el punto de abscisa 1.

Como en este caso

$$a_1 = 1;\ b_1 = -4;\ c_1 = 6;\ d_1 = -4;\ \alpha = 1; \\ b_1 - 3a_1\alpha = -1;\ c_1 - 3a_1\alpha^2 = 3; \\ d_1 + a_1\alpha^3 = -3;$$

Por tanto la curva tangente a la gráfica de

$$y_1 = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$$

es

$$y_2 = -x^2 + 3x - 3.$$

donde

$$a_2 = -1;\ b_2 = 3;\ c_2 = -3;\ \alpha = 1.$$

Y, procediendo como en los ejemplos 1 y 2, obtenemos

$$b_2 + 2a_2\alpha = 1;\ c_2 - a_2\alpha^2 = -2;$$

y, en consecuencia, la recta tangente será $y = x - 2$

...si sólo nos sale un extremo bastará elegir dos puntos, uno anterior y otro posterior al extremo, y obtener las imágenes de los mismos

Ejemplo 4

Hallar la expresión de la recta tangente a la gráfica de $y_1 = 2x^3 - 4x^2 + 6x - 4$ en el punto de abscisa 1.

En este caso

$$a_1 = 2;\ b_1 = -4;\ c_1 = 6;\ d_1 = -4;\ b_1 + 3a_1\alpha = 2; \\ c_1 - 3a_1\alpha^2 = 0;\ d_1 + a_1\alpha^3 = -2;$$

Por tanto la curva tangente a la gráfica de

$$y_1 = 2x^3 - 4x^2 + 6x - 4$$

es

$$y_2 = 2x^2 - 2$$

donde

$$a_2 = 2;\ b_2 = 0;\ c_2 = -2;\ \alpha = 1, \\ b_2 + 2a_2\alpha = 4;\ c_2 - a_2\alpha^2 = -4;$$

con lo que la recta tangente que obtenemos es $y = 4x - 4$.

De este modo se pueden determinar las rectas tangentes a cualquier curva polinómica. El procedimiento consistiría en ir calculando sucesivamente expresiones polinómicas de grado una unidad menor a la dada hasta conseguir la de primer grado, que será la recta tangente a la gráfica de todas ellas, y, en particular, a la inicial.

Máximos y mínimos

Fijándonos en la gráfica de las funciones polinómicas, sabemos que los máximos y mínimos que éstas alcanzan, cuando su dominio son todos los reales, coinciden con los puntos donde la recta tangente anula su pendiente. Esto quiere decir que la representación algebraica de la misma se reducirá a una constante. Por la propia definición de máximo y mínimo, tenemos que si sólo nos sale un extremo bastará elegir dos puntos, uno anterior y otro posterior al extremo, y obtener las imágenes de los mismos. Si estas imágenes son mayores que la del extremo en cuestión, tendremos un mínimo; en caso contrario, obtendríamos un máximo. Si nos salen varios extremos, procederemos de la misma manera. Los puntos que escogeremos, el anterior y el posterior, pertenecerán a un intervalo abierto, comprendido entre el extremo dado y otro extremo contiguo.

Un ejemplo aclarará esta idea: hallaremos los máximos y mínimos de la curva $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

Procedamos en primer lugar a determinar la recta tangente en $x = \alpha$:

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 1 - (x - \alpha)^3 = 3(\alpha - 1)x^2 - 3(\alpha^2 + 3)x + \alpha^3 + 1$$

Volvemos a aplicar el método al polinomio de segundo grado que nos ha salido:

$$3(\alpha-1)x^2 - 3(\alpha^2+3)x + \alpha^3 + 1 - 3(\alpha-1)(x-\alpha)^2 =$$
$$= (3\alpha^2 - 6\alpha - 9)x - 2\alpha^3 + 3\alpha^2 + 1$$

Para anular la pendiente de esta recta hemos de resolver la ecuación

$$3\alpha^2 - 6\alpha - 9 = 0$$

obtenemos como soluciones $\alpha_1 = 3$ y $\alpha_2 = -1$, que serán los posibles máximos o mínimos. Para α_1 obtenemos como valor en el eje de ordenadas $y_1 = -26$, y para α_2 obtenemos $y_2 = 6$. Sea el intervalo $(-1, 3)$. Escojamos el valor $\alpha^* = 2$, cuya imagen es $y^* = -21$. Como $y_1 < y^*$ tendremos que α_1 es un mínimo. Como $y^* < y_2$ tendremos que α_1 es un máximo.

Cabe decir, que como lo que buscamos en este trabajo es conseguir una motivación para los estudiantes que afronten el cálculo de derivadas, creemos que el profesor deberá proponer ejercicios con polinomios de grado menor o igual a 3, debido a que al anular el coeficiente de la x en la recta tangente a un polinomio de más de tercer grado, el alumno se encontrará con el problema de tener que hallar las raíces de un polinomio de grado mayor que dos, algo que podría resultar muy costoso y retrasaría, en demasía, estas intenciones motivadoras.

Resolvamos un problema de optimización en lo que aplicamos lo visto hasta ahora:

> Un granjero dispone de 60 metros de valla. Con ella y aprovechando un muro de piedra suficientemente largo que hay en su propiedad, quiere construir un corral rectangular adosado al muro, de la mayor superficie posible.

Tomemos como lados del rectángulo x e y, de manera que

$$2x + y = 60$$

La superficie será

$$S = x(60 - 2x) = -2x^2 + 60x$$

Por tanto $a = -2$, $b = 60$, $c = 0$, con lo que

$$m = b + 2a\alpha = 60 - 4\alpha \text{ y } n = c - a\alpha^2 = 2\alpha^2.$$

Luego la recta tangente que buscábamos es

$$y = (60 - 4\alpha)x + 2\alpha^2$$

Para encontrar los extremos habremos de resolver la ecuación $60 - 4\alpha = 0$, y obtenemos como solución $\alpha = 15$.

Escojamos el valor $\beta = 1$, cuya imagen es $y(\beta) = 58$.

La imagen de $\alpha = 15$ es $y(\alpha) = 450$.

Como $y(\beta) < y(\alpha)$ tenemos que $\alpha = 15$ es un máximo.

Veamos ahora un resumen de los pasos del algoritmo:

1.° Exigimos que el sistema formado por las expresiones algebraicas de una parábola y una recta tengan una solución doble en un punto de abscisa dado.

2.° Identificamos los coeficientes de ambos lados de la ecuación obtenida, consiguiendo así los parámetros de la recta tangente.

3.° Generalizamos este método para «parábolas» de grado superior.

4.° Este procedimiento nos conduce a resolver problemas de máximos y mínimos con curvas polinómicas.

La idea de este trabajo surgió resolviendo problemas de intersección de curvas polinómicas junto a estudiantes que me pidieron ayuda.

Comentarios finales

La introducción de máximos y mínimos siempre ha necesitado del conocimiento del cálculo diferencial. Conseguir llegar a su dominio es tarea bastante pesada, ya que el alumno no logra ver ninguna aplicación inmediata. Con este trabajo, intento que el alumno empiece por ver estas aplicaciones utilizando tan sólo algo que ya debe conocer, como es el dominio de las representaciones gráfica y algebraica de las funciones polinómicas.

La idea de este trabajo surgió resolviendo problemas de intersección de curvas polinómicas junto a estudiantes que me pidieron ayuda. Se sabe que intersecando rectas con parábolas obtenemos dos puntos de intersección como máximo. Si se aproximan estos dos puntos de intersección hasta confundirse en uno solo, la secante se convierte en una tangente. Esta idea no entraña ninguna dificultad para los alumnos al igual que el problema de encontrar los posibles máximos y mínimos, es decir, la anulación de la pendiente de la recta tangente anteriormente conseguida. La dificultad más grande que he tenido poniendo en práctica este método ha sido la de generalizar estas ideas primarias a «parábolas» de grado superior, la cual fue solventada con un par de ejemplos.

Al ser el algoritmo el mismo y repetitivo, tanto si la «parábola» es de segundo grado o de grado superior, por parte de los alumnos fue rápido y bastante fácil.

Francisco Raúl Tomás