SUMA 40
junio 2002, pp. 69-73

Los números imitan al espacio

José Javier Escribano Benito

ARTÍCULOS

En este trabajo nos proponemos abordar un problema clásico: la división de un segmento en media y extrema razón. Nuestro interés se centra en ilustrar, con un ejemplo sencillo, los sucesivos pasos a la hora de interpretar una magnitud: primero como una longitud, un área o un volumen; después como un segmento; y, por último, como un número. Evolución que refleja el proceso de creación de la geometría analítica. Por otro lado, estos tres periodos coinciden con las tres fases por las que pasa una disciplina matemática: ingenua, formal (en la que se perfecciona el cálculo simbólico) y una fase crítica (en la que se revisan los fundamentos).

INTRODUCCIÓN

> Los únicos objetivos de la ciencia abstracta o de la demostración son la cantidad y el número... el resto son sofisterías e ilusión. (Hume, *An Enquiry concerning Human Understanding*, 1758)

En este trabajo nos proponemos abordar un problema clásico: *la división de un segmento en media y extrema razón*. Mas allá de los aspectos didácticos del propio problema (números irracionales, sección áurea, etc.) nuestro interés se centra en ilustrar, con un ejemplo sencillo, los sucesivos pasos a la hora de interpretar una magnitud: primero como una longitud, un área o un volumen; después como un segmento; y, por último, como un número. Esta evolución refleja «el verdadero proceso de creación de la geometría analítica» (Etayo, 1988: 17). Por otro lado, estos tres periodos coinciden con las tres fases por las que, según la idea hilbertiana (Lorenzo, 1998: 118), pasa una disciplina matemática: ingenua, formal (en la que se perfecciona el cálculo simbólico) y una fase crítica (en la que se revisan los fundamentos).

Sección áurea de un segmento

> ...ella (la Divina proporción) es una sola y no más, y no es posible asignarle otras especies ni diferencias. Y dicha unidad es el supremo epíteto de Dios mismo. (Luca Pacioli, *De Divina Proportione*, 1509).

Se dice que un punto X divide a un segmento AB *en media y extrema razón*, cuando la parte mayor AX es la media proporcional entre el segmento total y la parte menor XB. Si tomamos $AB = p$, $AX = x$ y, por tanto, $XB = p - x$ el problema se reduce a resolver la ecuación:

$$\frac{p}{x} = \frac{x}{p-x} \quad o \quad x^2 + px = p^2$$

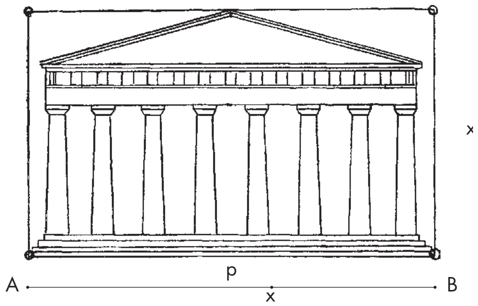

Figura 1. Partenón de Atenas

Álgebra geométrica

> ...no debemos atender a meras imágenes plausibles cuando se trata de los razonamientos que deben presentarse en nuestra doctrina geométrica. (Procolo).

El libro II de los *Elementos* (siglo III a. C.) está dedicado a lo que hoy se denomina álgebra geométrica[1], que servía «más o menos para los mismos fines que nuestra álgebra simbólica» (Boyer, 1992: 151). Pero los métodos del álgebra geométrica de los griegos distan mucho de nuestra geometría analítica; «más aún: en [el libro] II no hay ecuación alguna ni trasuntos algebraicos, sino la exposición de unos resultados deductivamente inconexos entre sí»[2]. Así, la proposición 6 del libro II equivale a la construcción de la ecuación cuadrática $x^2 + px = p^2$. Y la proposición 11, a la división de un segmento en media y extrema razón:

> Dividir una recta dada de manera que el rectángulo comprendido por la (recta) entera y uno de los segmentos sea igual al cuadrado del segmento restante (Euclides, 1991*a*: 284).

Aunque en este libro aparecen las longitudes y las áreas, es necesario esperar hasta el libro V para encontrar una noción general de magnitud como término de una relación de proporcionalidad. Euclides no define el concepto de magnitud y se limita a enumerar alguna de sus propiedades. Por ejemplo:

> *Definición 1*. Una magnitud es parte de una magnitud, la menor de la mayor, cuando mide a la mayor
>
> *Definición 3*. Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas.
>
> *Definición 4*. Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a la otra (Euclides, 1991*b*: 9-10).

Euclides deja claro que es posible definir una relación (un cociente) entre dos magnitudes homogéneas y (según la definición 4) arquimedianas aunque deja muchos puntos oscuros. Por ejemplo, la relación entre las magnitudes y los números (cuya teoría se expone en los libros VII-IX).

1 Denominación introducida por Zeuthen (*Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, 1886).

2 Vega en Euclides (1991*a*: 87).

El libro VI aplica la teoría de las proporciones a la geometría plana. En él encontramos la división en media y extrema razón que viene a ser una réplica de lo tratado en el libro II pero en un contexto diferente.

> *Definición 3*. Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el [segmento] mayor es al menor
>
> *Proposición 30*. Dividir una recta finita dada *AB* en extrema y media razón
>
> Constrúyase a partir de *AB* el cuadrado $B\Gamma$ y aplíquese a $A\Gamma$ el paralelogramo $\Gamma\Delta$ igual a $B\Gamma$ y que exceda en la figura $A\Delta$ semejante a $B\Gamma$.
>
> Ahora bien, $B\Gamma$ es un cuadrado; entonces $A\Delta$ es también un cuadrado. Y como $B\Gamma$ es igual a $\Gamma\Delta$, quítese de ambos ΓE; entonces el (paralelogramo) restante *BZ* es igual al (paralelogramo) restante $A\Delta$. Pero son también equiángulos; entonces los lados que comprenden los ángulos iguales de los (paralelogramos) *BZ*, $A\Delta$ son inversamente proporcionales; entonces, como *ZE* es a $E\Delta$, así *AE* a *EB*. Pero *ZE* es igual a *AB* y $E\Delta$, a *AE*. Por tanto, como *BA* es a *AE*, así *AE* a *EB*. Pero *AB* es mayor que *AE*; así pues, *AE* es también mayor que *EB*.
>
> Por consiguiente se ha dividido la recta *AB* en extrema y media razón por *E* y su segmento mayor es *AE* (Euclides, 1991*b*: 56, 103-104).

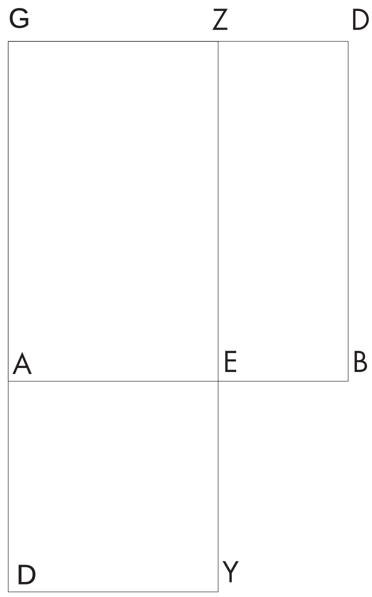

Figura 2.
División en extrema y media razón
(Euclides)

Aplicación del álgebra a la geometría

> Los números imitan el espacio, aunque son de naturaleza muy diferente. (Pascal, *Pensées*).

Debemos a Descartes (y simultáneamente a Fermat) la introducción de la *aplicación del álgebra a la geometría* o *geometría analítica*[3]. En el Libro I «De los problemas que se pueden construir sin emplear más que círculos y líneas rectas» de *La Géométrie* (1637), Descartes desarrolla procedimientos para efectuar las operaciones aritméticas de forma geométrica y establece un método «para construir todos los problemas de la geometría ordinaria [problemas planos] mostrando como se llega a las ecuaciones que sirven para resolver problemas». Entre éstos no se encuentra explícitamente el de la división áurea, pero sí la resolución de la ecuación cuadrática equivalente $z^2 = az + bb$:

> … construyo el triángulo rectángulo *MLN*, cuyo lado *LM* es igual a *b* (raíz cuadrada de la cantidad conocida *bb*) y el otro lado, *LN* es igual a *a*/2, esto es: la mitad de la otra cantidad conocida que estaba multiplicada por *z*, la cual he supuesto que es la línea desconocida. Seguidamente, prolongando *MN*, que es la base del triángulo, hasta *O*, de suerte que *NO* es igual a *NL*, la línea *OM* es *z*, la linea buscada. La cual se expresa de la siguiente forma:
>
> $$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$$
>
> (Descartes, 1981: 283-284).

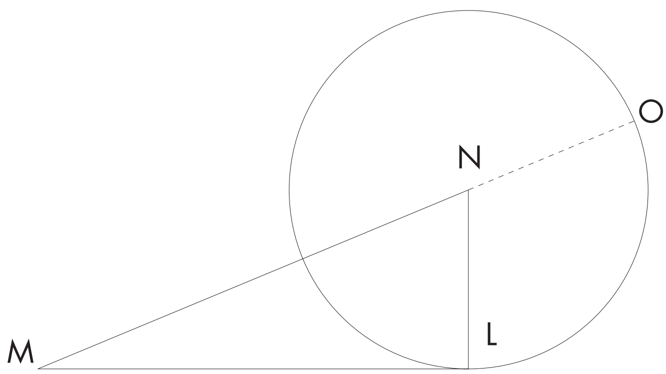

Figura 3. Ecuación $z^2 = az + b^2$ (Descartes)

Aunque las construcciones propuestas ya eran conocidas, el método de Descartes presenta un toque de genialidad: la introducción de un segmento unitario. Desde el *álgebra geométrica* de Eulides hasta el *álgebra especiosa* de Vieta, las magnitudes empleadas debían representar figuras geométricas y, por tanto, su dimensión no podía superar el número tres. Del mismo modo, todas las expresiones deben ser homogéneas ya que en otro caso dejan de ser inteligibles (la expresión $aa + b$, por ejemplo, representaba la imposible suma de una «superficie» y una «longitud»). La gran aportación de Descartes consiste en salvar estas limitaciones, considerando todas las magnitudes como segmentos:

> Así, si ha de extraerse la raíz cúbica de $aabb - b$, debemos considerar que la cantidad *aabb* está dividida una vez por la unidad y la cantidad *b* está multiplicada dos veces por la misma unidad. (Descartes, 1981: 281).

También hay que resaltar la importancia del cálculo simbólico, ausente en los *Elementos*, forjado a lo largo de los siglos y perfeccionado por Vieta, y que alcanza con Descartes prácticamente su notación actual:

> No es nada exagerado decir que, para el progreso humano, la introducción y difusión del cálculo literal, en sustitución del álgebra geométrica, ha sido una revolución comparable a la adopción de la máquina en lugar del trabajo manual (Radice, 1983: 58).

Como hemos podido observar, Descartes no alude a la solución negativa. Los números negativos llegaron a ser conocidos en Europa a través de los textos árabes, pero la mayor parte de los matemáticos de los siglos XVI y XVII se negaron a considerarlos como posibles raíces de una ecuación (Kline, 1985: 136). Descartes entendía que estas raíces eran *falsas*, aunque llegó a demostrar que una ecuación con raíces negativas podía ser transformada en otra con raíces positivas, y, por tanto, «podemos transformar las raíces falsas en raíces reales (positivas)».

La introducción sistemática de los signos en la *geometría pura* fue debida a Möbius (*Der barycentrische Calcul*, 1827). Unos años antes, Lazare Carnot, en su *Géométrie de Position* (1803), presentó un método, los sistemas correlativos, que permitía representar al mismo tiempo la magnitud y la posición de las figuras, sin utilizar los números negativos[4]. Para ilustrar el algoritmo de Carnot recurrimos a uno de los textos más clásicos de nuestra matemática: la *Geometría analítica-descriptiva* (1819), del coronel Mariano de Zorraquín.

Los pocos y confusos datos que se conocen de Zorraquín, nos evocan la figura de un prestigioso militar, que participó en la Guerra de la Independencia y que, al finalizar la misma, fue nombrado profesor de la Academia de Ingenieros del Ejército de Alcalá de Henares. Comprometido con la causa liberal, fue condenado a prisión en el restablecimiento del absolutismo en 1814. Al iniciarse el *Trienio Liberal* fue elegido diputado por Madrid y llegó a ser

3 Como es sabido Lacroix fue el primero en utilizar (Prólogo del *Traité de calcul*, 1797) el nombre geometría analítica en el sentido actual: «consiste en deducir las propiedades de la extensión del mínimo número posible de principios por procedimientos puramente analíticos». Los primeros que usaron el nombre de *geometría analítica* como título de un libro de texto fueron Lefrançais, en una edición de sus *Essais de géométrie* de 1804, y Biot en la edición de 1805 de sus *Essais de géométrie analytique* (Boyer, 1992: 602-603).

4 En una de sus obras más influyentes *Reflexiones sobre la metafísica del cálculo infinitesimal* (1797; 2ª ed, 1813), Carnot «afirmaba categóricamente que la noción de algo menor que nada era absurda. Los números negativos podían ser introducidos en el álgebra como entidades ficticias útiles para el cálculo. Sin embargo, no eran ciertamente cantidades y podían conducir a conclusiones erróneas» (Kline, 1985: 184).

nombrado Ministro de la Guerra el 24 de abril de 1823 en el gabinete que José María Calatrava formó en Sevilla, donde los liberales habían retenido a Fernando VII. Es posible, sin embargo, que no llegara a tomar posesión efectiva del ministerio, ya que se encontraba en Cataluña, como general jefe de Estado Mayor de la división de Espoz y Mina, donde falleció el 26 de mayo de 1823 en el curso de un ataque contra los absolutistas. En todo caso, su *Geometría analítica-descriptiva*, publicada en 1819, marca un hito de modernidad en la matemática española. Se trata de una geometría práctica, representativa del paradigma lagrangiano, que pretende representar el espacio (euclídeo) aunando los métodos de la geometría analítica y de la descriptiva.

Como era habitual en los textos de época, la Geometría de Zorraquín se presenta dividida en dos secciones: análisis determinada y análisis indeterminada. Esta división responde a la concepción, plenamente cartesiana, que Zorraquín tiene de la Aplicación del Álgebra a la Geometría. Considera nuestro autor que el método propio de la geometría que nos permite alcanzar un resultado «marchando de consecuencia en consecuencia» puede resultar penoso e incluso impracticable cuando las cuestiones no son elementales. Conviene, por tanto, utilizar el álgebra como una herramienta para facilitar y simplificar las investigaciones, y dar a las cuestiones y a sus resultados un carácter general, sin perder de vista que en toda expresión analítica hay siempre una construcción geométrica:

> Dos son los objetos de la geometría analítica: resolver las ecuaciones geométricas por el análisis e interpretar geométricamente o construir las fórmulas analíticas (Zorraquín, 1819: 4).

Entre los problemas propuestos en la primera parte está el que ahora nos ocupa: *Dividir la recta DB en media y extrema razón.*

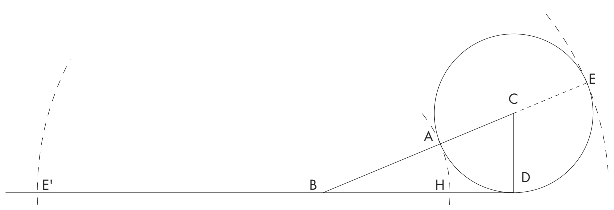

Figura 4. Sección áurea (Zorraquín)

La solución positiva es, como en el caso anterior *BH*, y se obtiene de *BA* = *BC* – *AC*.

La novedad radica, como ya hemos adelantado, en la introducción de la solución negativa siguiendo el algoritmo de Carnot:

> Siempre que el objeto de un Problema sea determinar la distancia de un punto desconocido al origen, debe suprimirse el signo de las soluciones negativas, y tomar las cantidades absolutas en sentido contrario al supuesto de la ecuación primitiva (Zorraquín, 1819: 42).

En el caso anterior la solución negativa será *BE'* donde *E'* se obtiene abatiendo *E* sobre *BD* en sentido contrario.

Los Fundamentos

> Así, pues, todo conocimiento humano comienza con intuiciones, de éstas se pasa a conceptos y termina con ideas. (Kant, *Kritik der reinen Vernunft*, 1781)

En 1872 Weirstrass, Cantor y Dedekind culminan la «aritmetización del análisis» con sus respectivas construcciones de los números reales. El concepto de número real se desliga así del de segmento de Descartes: la aritmética sustituye a la geometría en la fundamentación del análisis. De forma paralela, la difusión de las geometrías no euclideas y la expansión de la geometría proyectiva (donde desaparece la noción de métrica y, según Staud, la noción de número real) rompen con la idea kantiana de un espacio métrico euclideo dado *a priori*. La geometría se convierte en una ciencia pura, desligada de dependencias empíricas: «uno debería ser capaz –explicaba Hilbert– de decir siempre en lugar de puntos, líneas rectas y planos; mesas, sillas y jarras de cerveza».

En 1872 Weirstrass, Cantor y Dedekind culminan la «aritmetización del análisis» con sus respectivas construcciones de los números reales. El concepto de número real se desliga así del de segmento de Descartes: la aritmética sustituye a la geometría en la fundamentación del análisis.

Si admitimos la construcción de la geometría euclidea dada por Hilbert, es posible «introducir en la Geometría un cálculo con segmentos, en el cual las reglas dadas para números reales sean válidas sin modificación alguna» (Hilbert, 1996: 65)[5]. Y nuestro problema pasa, por tanto, a ser una simple cuestión numérica.

Sin embargo, nada nos impide dejar volar la imaginación («La esencia de la matemática es su libertad») y considerar, por ejemplo, como «plano» el conjunto de puntos interiores (contorno excluido) de una elipse dada. Llamando «pun-

5 Este cálculo se basa en el teorema de Pascal (otros autores lo denominan de Pappus) que, el geómetra alemán, demuestra sin utilizar los axiomas de continuidad.

tos» a todos los puntos interiores a dicha elipse y «rectas» a las cuerdas (excluidos los extremos) de la elipse. Podemos construir un modelo (Lobachewsky) que cumple las mismas propiedades que el plano euclideo, salvo el *Postulado del paralelismo* que ahora queda formulado del siguiente modo[6]:

Por un punto P exterior a una recta MN se pueden trazar dos paralelas a ella (MM´ y NN´) e infinitas no secantes.

Como medida del segmento *AB* se toma el logaritmo de la razón doble

$$\log(ABMN) = \log\left(\frac{AM}{AN}:\frac{BM}{BN}\right)$$

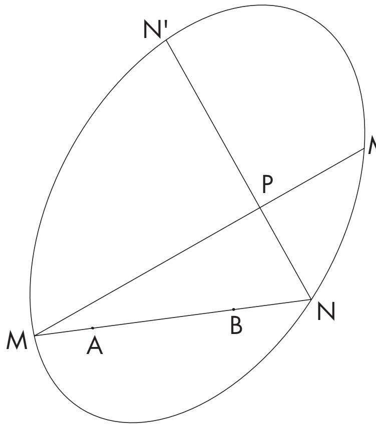

Figura 5. Plano interior a una cónica

De esta forma la proporción $\Phi = p/x$, que los matemáticos del Renacimiento denominaban «divina», porque –como Dios– «es siempre la misma y siempre invariable, y de ninguna manera puede cambiar ni de otro modo puede aprehenderla el intelecto» (Pacioli, 1991: 41-42), nos conduce ahora a dividir un segmento dado, *AB*, de forma diferente en función de la posición de sus extremos.

6 Esta construcción puede verse, por ejemplo, en Puig Adam (1978)

José Javier Escribano
IES Valle del Cidacos.
Calahorra (La Rioja).
Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas

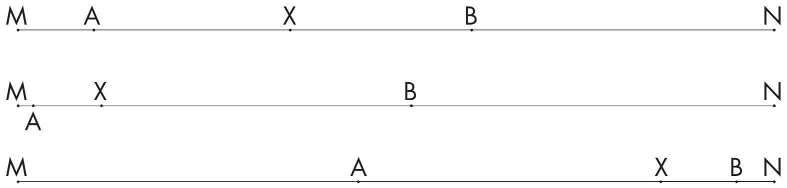

Figura 6. Media y extrema razón hiperbólica

Agradecimiento

Deseo expresar mi reconocimiento al Dr. Luis Español, profesor de la Universidad de La Rioja, por las sugerencias y los datos facilitados para la elaboración de este trabajo.

Bibliografía

BOYER, C. (1992): *Historia de la Matemática*, Alianza Universal, Madrid.

DESCARTES, R. (1981): *Discurso del método, Dióptrica, Meteoros y Geometría*, Alfaguara, Madrid. (Prólogo, traducción y notas de G. Quintás Alonso).

ETAYO MIQUEO, J. J. (1988): «Los caminos de la Geometría», en *Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (1988) Curso de Conferencias sobre Historia de la Matemática en los siglos XVII y XVIII*, Madrid, 11-29.

EUCLIDES (1991*a*): *Elementos. Libros I-IV*, Gredos, Madrid. (Introducción de L. Vegas, trad. y notas de M. L. Puertas Castaños).

EUCLIDES (1991*b*): *Elementos. Libros V-IX*, Gredos, Madrid. (Traducción y notas de M. L. Puertas Castaños).

HILBERT, D. (1996): *Fundamentos de la geometría*, CSIC, Madrid. (Traducido de la 7ª edición alemana, 1930, por F. Cebrián. Es una reimpresión de la obra publicada por el CSIC, en 1953 y esta precedida de una introducción de J. M. Sánchez Ron).

KLINE, M. (1985): *Matemáticas. La perdida de la certidumbre*, Siglo XXI, Madrid.

LORENZO, J. de (1998): *La matemática: de sus fundamentos y crisis*, Tecnos, Madrid.

PACIOLI, L. (1991): *La divina proporción*, Akal, Torrejón de Ardoz. (Introducción de A. M. González, traducción de J. Calatrava).

PUIG ADAM, P. (1978): *Curso de Geometría Métrica. Tomo II. Complementos*, Gómez Puig Ediciones, Madrid.

RADICE, L.L. (1983): *La matemática de Pitágoras a Newton*, Laia, Barcelona. (Traducido por J. Vivanco).

ZORRAQUÍN, M. (1819): *Geometría analítica-descriptiva*, Imprenta de Manuel Amigo, Alcalá.