SUMA 40
junio 2002, pp. 47-58

Algunos modelos matemáticos combinatorios básicos

Sergio Alonso Rodríguez
Carlos González Martín
Antonio Sedeño Moda

En este trabajo se plantea la necesidad de motivar el estudio de modelos matemáticos considerando algunos casos básicos de naturaleza combinatoria de importancia en el mundo real. El estudio de los correspondientes problemas de optimización y la introducción y aplicación de métodos de resolución sencillos se toma como base para argumentar a favor de su inclusión, como alternativa válida para motivar la utilidad de las Matemáticas, en los últimos cursos de la enseñanza secundaria.

ARTÍCULOS

UN NÚMERO importante de problemáticas reales motivan el uso de las Matemáticas para formalizar modelos combinatorios y resolver, a través del desarrollo de los correspondientes algoritmos, los problemas de optimización inherentes. En muchos de estos casos se presentan las características de sencillez del planteamiento de los problemas, una notable facilidad para lograr el desarrollo de un modelo expresado matemáticamente y la disposición de, al menos, un método eficaz y susceptible de ser aplicado sólo con el prerrequisito de poseer conocimientos matemáticos elementales.

Por tanto, estas situaciones, aparte de su importancia como problemas del entorno social, resultan muy interesantes para motivar, formular y resolver problemas matemáticos, manejando eficientemente ciertas estructuras combinatorias sobre las que se incentiva el uso del cálculo y se pone de manifiesto la necesidad de utilización de herramientas computacionales. Estamos convencidos de que los correspondientes contenidos científicos y técnicos son muy importantes en los primeros cursos de las carreras universitarias de ciencias, economía, gestión, ingenierías… (así están reconocidos actualmente en muchas de ellas), y que, por extensión, el inicio de la impartición de los mismos debería acometerse en los últimos cursos de la enseñanza secundaria (desgraciadamente no es así en los actuales programas de bachillerato). Consideramos que la introducción al estudio de algunos de los problemas del tipo propuesto en este trabajo, constituiría una alternativa interesante para ayudar en la tarea de motivar la comprensión de contenidos de tipo cuantitativo, tan esenciales en las enseñanzas de bachillerato y universitaria.

Hay que indicar que el estudio de los problemas de optimización es una parte fundamental de una ciencia de reciente implantación conocida como Investigación Operativa. Dicha parte es denominada Programación Matemática y reserva un lugar de privilegio para el estudio de los problemas de optimización combinatoria (bajo títulos como Programación Combinatoria, Análisis de Redes, Teoría de Grafos…). Las situaciones problemáticas susceptibles de ser analizadas desde la Investigación Operativa aparecen frecuentemente en los campos de la Economía, Ciencias de la Gestión, Ingenierías, etc.

Por todo lo anterior, con el fin de contribuir a difundir la utilidad de los conocimientos básicos propios del análisis de los problemas de optimización y con el propósito de motivar el interés por formular y resolver problemas de naturaleza combinatoria, en este trabajo introducimos tres casos relevantes y sencillos, habituales dentro de los elementos básicos de cualquier asignatura universitaria de Programación Combinatoria. La secuencia seguida conlleva el planteamiento del problema, su formalización como un problema de tipo combinatorio, la introducción de un método sencillo de resolución, la aplicación de este método sobre un ejemplo y comentarios sobre la eficiencia del procedimiento de resolución utilizado.

Algunos problemas de tipo combinatorio

Supongamos que estamos ante una de las siguientes situaciones:

a) Una red de carreteras conecta los diferentes núcleos poblacionales de una región. Fijados dos de estos núcleos interesa determinar la ruta más corta para ir de uno al otro.

b) En una determinada región se quiere establecer una red terrestre de comunicaciones telefónicas que conecte los diferentes lugares en los que existe población. Interesa determinar la longitud mínima de cable necesario para llevar a cabo la conexión.

c) Una red de distribución de un determinado producto (por ejemplo, de abastecimiento de aguas), ofertado en un determinado lugar y demandado en otro preestablecido, tiene limitaciones en las conexiones existentes entre cada par de puntos. Interesa determinar la cantidad máxima de producto que puede circular por la red entre el punto de oferta y el punto de demanda.

Todos los casos anteriores tienen en común el carácter combinatorio del análisis de las posibles alternativas de solución. Entendemos que este carácter está presente cuando la solución al problema que se plantea se habrá de buscar entre un conjunto finito de alternativas. Las situaciones relacionadas se estudian dentro de la Investigación Operativa recibiendo los diferentes problemas las denominaciones*: problema de camino mínimo*, *problema de árbol generador mínimo* y *problema de flujo máximo*, respectivamente. Trataremos de estudiar más detalladamente estos problemas para proponer algún algoritmo que los resuelva e ilustrar su aplicación sobre un ejemplo.

Las situaciones problemáticas susceptibles de ser analizadas desde la Investigación Operativa aparecen frecuentemente en los campos de la Economía, Ciencias de la Gestión, Ingenierías, etc.

El concepto de red

Con frecuencia los problemas de tipo combinatorio se plantean sobre una estructura que se identifica como grafo o red. Un grafo resulta de la abstracción de un sistema de comunicaciones (telefónicas, por carreteras, aéreas, etc.) en el que existen una serie de lugares (denominados vértices, nodos, etc.) y un determinado número de conexiones (conocidas como aristas, arcos...) entre pares de esos lugares. Con carácter general, se admite que una red es un grafo para el que existen determinadas magnitudes asociadas a los vértices o a las conexiones. También es habitual que por las redes circule algún tipo de flujo. Ejemplos familiares son las redes de distribución y abastecimiento, las redes de comunicaciones, las redes de servicios (de información, sanitarios, bancarios...). Un ejemplo gráfico, en el que las aristas tienen asociadas distancias entre los nodos que conectan, es el que aparece en la figura 1.

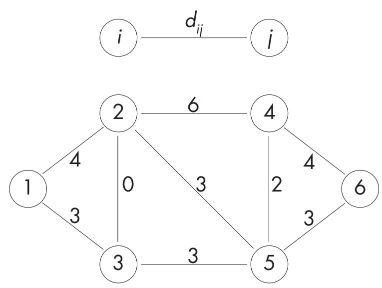


Figura 1

Problemas de caminos mínimos

Son problemas de la clase a la que pertenece el primero de los introducidos previamente (a). Podríamos entender, con carácter general, que estamos sobre un grafo que tiene asociadas determinadas cantidades (longitudes) a cada una de sus conexiones. Nos interesa determinar el camino de longitud total mínima (camino mínimo) entre dos vértices prefijados.

Ejemplo

En una determinada comarca existen 9 pueblos, numerados del 1 al 9. Los pueblos están conectados por una red de carreteras que tienen las longitudes (en kilómetros) que se especifican en la tabla 1.

Se ha de entender que entre los pares de pueblos para los que aparece el signo – no existen conexiones. La correspondiente red de carreteras se representa en la figura 2.

Un problema de camino mínimo sería el de determinar la forma de ir desde el pueblo número 1 al pueblo número 9 de manera que la distancia total recorrida sea mínima.

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
1		6	6	3	–	–	–	–	–
2			1	–	3	–	–	–	–
3				2	–	4	3	–	–
4					–	–	4	–	–
5						3	–	5	–
6							3	3	5
7								–	8
8									1
9									

Tabla 1

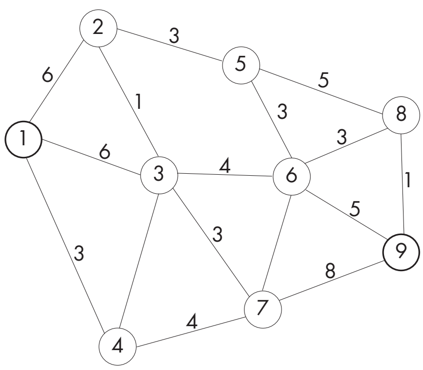


Figura 2

Un método para resolver problemas de caminos mínimos fue propuesto por Dijkstra (1959). Este método procede asignando a cada vértice unas etiquetas o marcas provisionales que, cuando se convierten en definitivas, establecen la distancia mínima respecto al vértice de partida.

Un método para resolver el anterior problema

Un método para resolver problemas de caminos mínimos fue propuesto por Dijkstra (1959). Este método procede asignando a cada vértice unas etiquetas o marcas provisionales que, cuando se convierten en definitivas, establecen la distancia mínima respecto al vértice de partida. El proceso acaba al asignar una etiqueta definitiva al vértice de llegada. Como uno de los vértices es etiquetado definitivamente en cada una de las etapas, el número necesario de éstas es igual, a lo sumo, al número de vértices.

Aplicación

Procedamos a la aplicación y exposición detallada del método de Dijkstra para el anterior ejemplo:

Etapa inicial

El vértice de partida, el 1, es etiquetado de forma definitiva, siendo esta etiqueta igual a 0 (distancia mínima entre el vértice 1 y él mismo). El resto de vértices reciben etiquetas provisionales que resultan de sumar la distancia de su conexión directa con el vértice 1 más la etiqueta definitiva de dicho vértice. Se habrá de entender que, cuando no exista conexión directa con el vértice etiquetado de forma definitiva en último lugar, se admite que la distancia correspondiente es igual a infinito (se simboliza por °).

Las etiquetas provisionales para los otros vértices las mostramos en la tabla siguiente:

nodo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
etiqueta	0	6	6	3	°	°	°	°	°

Tabla 2

Segunda etapa

Se convierte en definitiva la etiqueta provisional menor (la que corresponde al vértice 4 ya que su etiqueta es 3) y se procede a actualizar las etiquetas provisionales de cada uno de los vértices a los que podemos trasladarnos desde este nodo, el 4, excepto los que ya tengan etiquetas provisionales. La actualización se realiza calculando el mínimo entre el valor actual de la etiqueta y el que tendría si llegáramos a ese pueblo pasando por el nodo 4. La figura 3 esquematiza la etapa actual, y figuran junto a cada vértice su etiqueta.

Para esta etapa nos preguntamos si, por ejemplo, para llegar al vértice 3, ¿mantenemos el actual camino de valor 6 o atajamos por el nodo 4? Atajar por el nodo 4 significaría llegar a él y emplear el camino de 4 a 3, esto es 3 + 2 = 5.

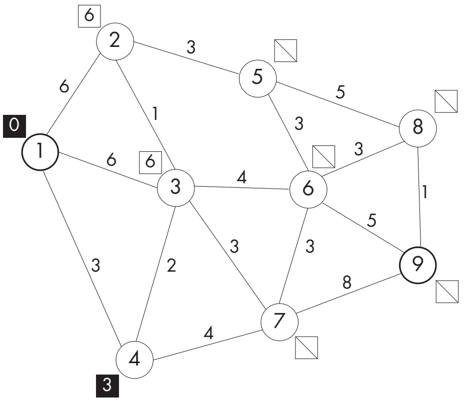


Figura 3

Naturalmente nos quedamos con esta última alternativa. La actualización, por tanto, calcula los mínimos siguientes:

etiqueta(3) = mínimo{etiqueta(3) = 6, etiqueta(4) + 2 = 3 + 2 = 5} = 5

etiqueta(7)=mínimo{etiqueta(7) = ° , etiqueta(4) + 4 = 3 + 4 = 7} = 7

La tabla de etiquetas sería la siguiente (el nodo 3 convertiría su etiqueta en definitiva):

nodo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
etiqueta	0	6	5	3	°	°	7	°	°

Tabla 3

Las etapas siguientes consistirían en repetir los cálculos anteriores. Dichos cálculos se ven favorecidos si los realizamos sobre la siguiente estructura de tabla en la que aparecen en cada fila las etiquetas asignadas a los vértices (uno por cada columna):

	nodos								
etapa	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	6	6	3	°	°	°	°	°
2	0	6	5	3	°	°	7	°	°
3	0	6	5	3	°	9	7	°	°
4	0	6	5	3	9	9	7	°	°
5	0	6	5	3	9	9	7	°	15
6	0	6	5	3	9	9	7	14	14
7	0	6	5	3	9	9	7	12	14
8	0	6	5	3	9	9	7	12	13
9	0	6	5	3	9	9	7	12	13

Tabla 4

Se observa que la longitud del camino mínimo que conecta 1 con 9 es igual a 13 y que las conexiones que lo componen son: 1-4-3-6-8-9.

Gráficamente:

Una vez elegido el vértice que hace definitiva su etiqueta, debemos explorar los nodos a los que podemos llegar desde él.

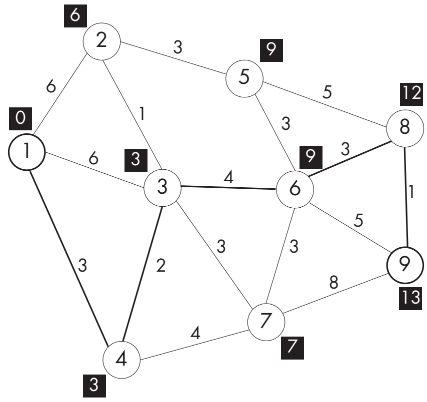


Figura 4

Comentarios respecto a la eficiencia del método

Ya se ha comentado que el número de etapas a contemplar es el número de vértices, puesto que, en cada una de ellas, una etiqueta provisional se vuelve definitiva. Una vez elegido el vértice que hace definitiva su etiqueta (recuérdese, aquel con menor valor de entre las provisionales), debemos explorar los nodos a los que podemos llegar desde él. Para cada uno de ellos con la etiqueta provisional intentaremos actualizar la etiqueta con el simple cálculo de un mínimo. Es decir, intentaremos descubrir posibles atajos.

Un esquema de este método para el cálculo del camino mínimo del vértice *i* al vértice *j* sería entonces el siguiente:

{Inicialicemos valores}

Poner etiqueta(*i*) a 0;

Poner el resto de las etiquetas a °

{Las siguientes etapas}

Mientras la etiqueta del nodo *j* no sea definitiva hacer

  Sea *k* la última etiqueta que se hizo definitiva

  Para todos los nodos *l* con etiqueta provisional accesibles desde *k* hacer

    Si etiqueta(*l*)>etiqueta(*k*) + valor de la arista (*k*, *l*) entonces

      etiqueta(*l*) = etiqueta(*k*) + valor de la arista (*k*, *l*)

  De entre todas las etiquetas provisionales, poner como definitiva aquella con menor valor

Esto es, si n es el número de vértices del grafo, para convertir cada una de las n etiquetas en definitivas, debemos explorar como máximo $n - 1$ posibles nodos. Es por lo que, el esfuerzo computacional necesario se dice que es de orden n^2. Este hecho se nota por $O(n^2)$.

Hay que destacar, por último, que una vez que una etiqueta de un vértice se sitúa como definitiva, su valor, que indica la distancia más corta desde el vértice origen hasta él, permanece inalterable hasta el final. Esta forma de actuar caracteriza a un tipo de métodos denominados devoradores que pueden resultar, como en el caso anterior, muy eficientes. De este tipo de métodos seguiremos hablando más adelante.

Problemas de árboles generadores mínimos

Son problemas pertenecientes al segundo grupo (b) introducido previamente. Se formulan también sobre un grafo en el que las magnitudes asociadas a las conexiones entre pares de nodos se corresponden, por ejemplo, con costes o distancias. Buscamos, para este grupo de problemas, la manera de conectar eficientemente todos los vértices. En otras palabras, para cualquier par de nodos, deberá de haber un camino que los una.

La estructura de conexiones buscada es la que se denomina *árbol generador* y que verifica el requisito de la conexión entre pares distintos de nodos a través de un único camino (en el grafo que se maneja no existen *bucles*, es decir conexiones que conectan un nodo consigo mismo). En la figura 5, el grafo inicial muestra las conexiones posibles a escoger, y los dos restantes dos opciones de elección de árboles generadores. Nótese que, si n es el número de nodos del grafo, las aristas necesarias para construir un árbol que los conecte son, exactamente, $n - 1$.

El problema combinatorio surge cuando debemos construir aquel árbol cuya suma de costes, el coste total, se minimice.

El problema combinatorio surge cuando debemos construir aquel árbol cuya suma de costes, el coste total, se minimice.

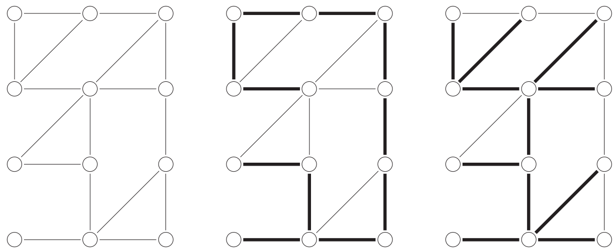


Figura 5

Ejemplo

En una determinada región existen 10 municipios a los que hay que suministrar gas tendiendo las correspondientes tuberías de abastecimiento. Las distancias entre las conexiones posibles se especifican (en kilómetros) en la siguiente tabla:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		5	3	4	–	–	–	–	–	–
2			3	–	4	–	–	–	–	–
3				3	–	2	3	–	–	–
4					–	–	4	2	–	–
5						5	–	–	6	–
6							1	–	3	6
7								3	–	4
8									–	4
9										3
10										

Tabla 5

Igual que en el ejemplo anterior, la aparición del símbolo – significa que no existe conexión posible. El problema que se plantea es hacer que llegue el gas a todos los municipios tendiendo la cantidad mínima de tubería. El grafo correspondiente a este problema es el que sigue.

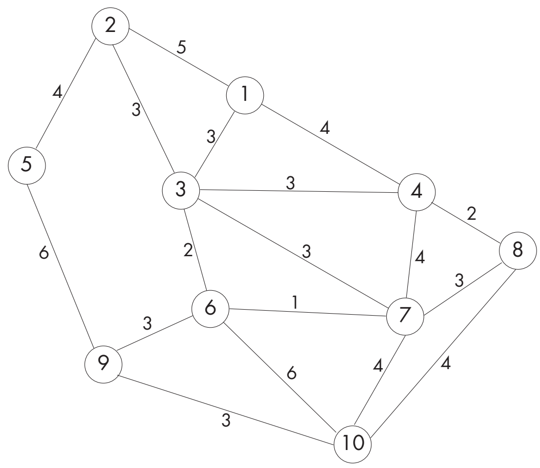


Figura 6

Métodos para resolver el ejemplo anterior

Para determinar árboles generadores mínimos de un grafo existen dos métodos considerados clásicos: el método de Kruskal (1956) y el método de Prim (1957). Al igual que en el problema anterior, estos métodos son del tipo devorador. Cada vez que incluye una arista en la solución, queda definitivamente en ella, con lo que ambos acaban en $n - 1$ pasos. La diferencia entre los métodos recae en la forma en la que se seleccionan las aristas.

Método de Prim

Éste método se caracteriza por expandir la conexión desde un conjunto de vértices. Partiendo, por ejemplo, del nodo 1, buscaremos aquel vértice, de entre los no conectados, más próximo. Elegido de esta forma, se le añade a los vértices conectados, y la arista que los une a la solución. Los pasos sucesivos eligen nuevos nodos, de entre los no conectados aún, más cercanos a algún nodo de entre los ya conectados. Esta estrategia acaba en $n - 1$ pasos asegurando la obtención de un árbol generador que, por la forma de elección de las aristas, es de mínimo coste.

En la serie de gráficos de la figura 7, mostramos la ejecución del método sobre el problema del ejemplo anterior. Sombreamos los nodos a medida que van siendo conectados, marcamos las aristas de la solución, y, de forma discontinua, las candidatas entre las que elegir. En la fila inferior a las imágenes, sumamos el peso de la solución que vamos construyendo.

Método de Kruskal

Este método ordena las conexiones del grafo en orden no decreciente de las magnitudes asociadas (en caso de empate, se ordena arbitrariamente). Siguiendo este orden, selecciona una conexión en cada etapa siempre que no forme ciclo con las ya seleccionadas previamente. Podemos ver el desarrollo gráfico de este proceso sobre el problema anterior en la figura 8.

El progreso gráfico de este método muestra significantes diferencias con respecto al anterior. Si bien en el primer caso era un árbol el que iba expandiendo sus conexiones a todos los nodos, en el caso del método de Kruskal son varios los subárboles que se forman, uniéndose en uno solo tarde o temprano. Precisamente, esta estructura ayuda a poder resolver de forma casi inmediata si una arista de la lista ordenada forma o no ciclo en la solución parcial que hemos construido. Se trata de ver si esa arista conecta nodos de subárboles distintos o en el mismo subárbol. En el primer caso la arista entrará en la solución mientras que en el segundo caso se asegura el ciclo.

Para determinar árboles generadores mínimos de un grafo existen dos métodos considerados clásicos: el método de Kruskal (1956) y el método de Prim (1957).

Comentarios respecto a la eficiencia de los métodos

Un esquema general del método de Prim es el siguiente:

M = {1}
Situaremos en *T* las aristas de la solución
Mientras en *T* no haya *n* – 1 aristas hacer lo siguiente
  Sea *e* la arista de menor coste que conecta un nodo de M con otro nodo, *j*, que no está en M
  Añadir la arista *e* a *T*
  Añadir el nodo *j* a *M*

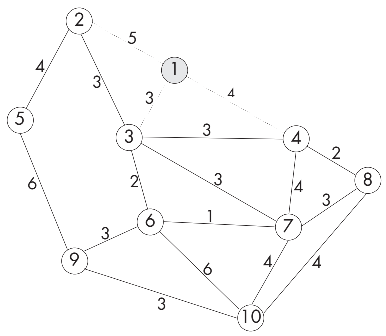
Aun siendo un esquema devorador, observamos que su eficiencia depende más de los nodos que ha de conectar que del número de aristas que posea el grafo original. Sin embargo, la eficiencia del método de Kruskal, al visitar las aristas en orden no creciente de sus pesos, depende de este segundo parámetro. Un esquema simplificado del método de Kruskal es el siguiente,

Situar en *T* las aristas de la solución
Ordenar las aristas en orden no decreciente según su peso o coste
Mientras en *T* no haya *n* – 1 aristas hacer lo siguiente
Sea e la arista siguiente en la lista
Si *e* no forma un ciclo en *T* añadir *e* a *T*

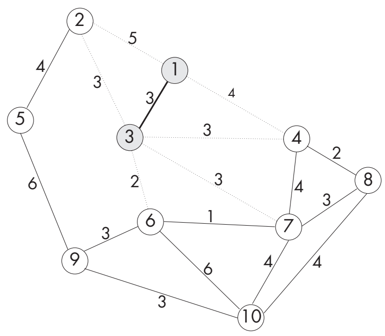
Por lo tanto, elegiremos el método de Prim cuando el número de nodos sea pequeño respecto al de aristas, y el método de Kruskal en el caso contrario.

Problemas de flujo máximo

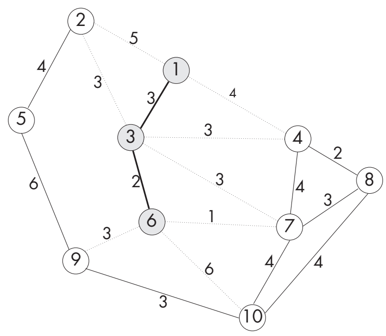
Se formulan sobre una red dirigida en la que circula un determinado flujo y existe un punto de oferta (fuente) y un punto de demanda (sumidero). Las correspondientes conexiones tienen asociadas capacidades máximas y mínimas de flujo (en general estas últimas se pueden considerar iguales a cero). *El problema que se plantea es el de determinar el flujo máximo que puede circular por la red entre el punto de oferta y el punto de demanda.*



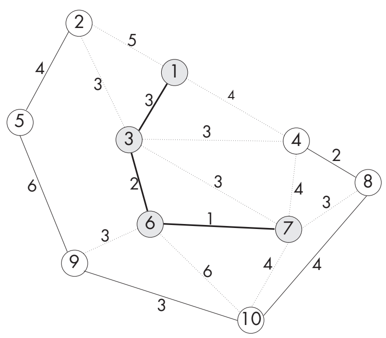
0 km



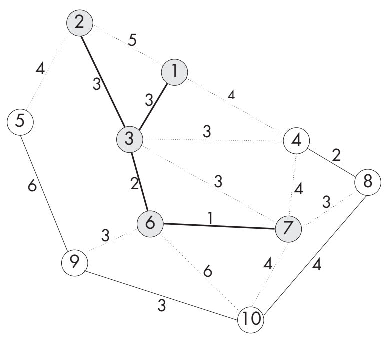
3 km



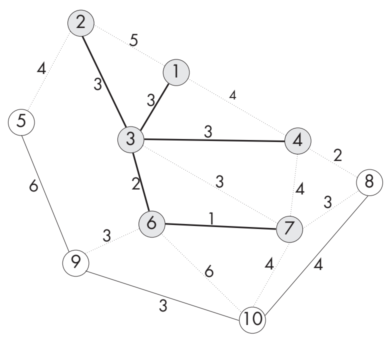
5 km



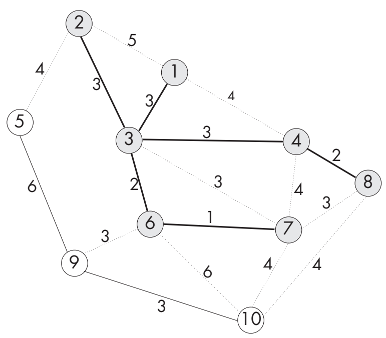
6 km



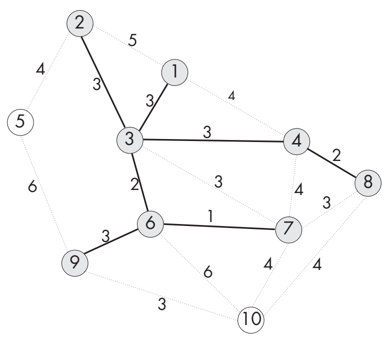
9 km



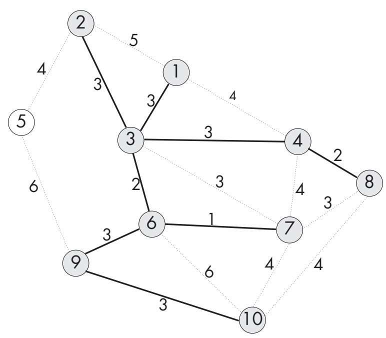
12 km



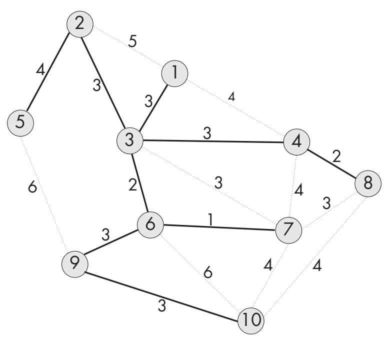
14 km



17 km



20 km



24 km

Figura 7

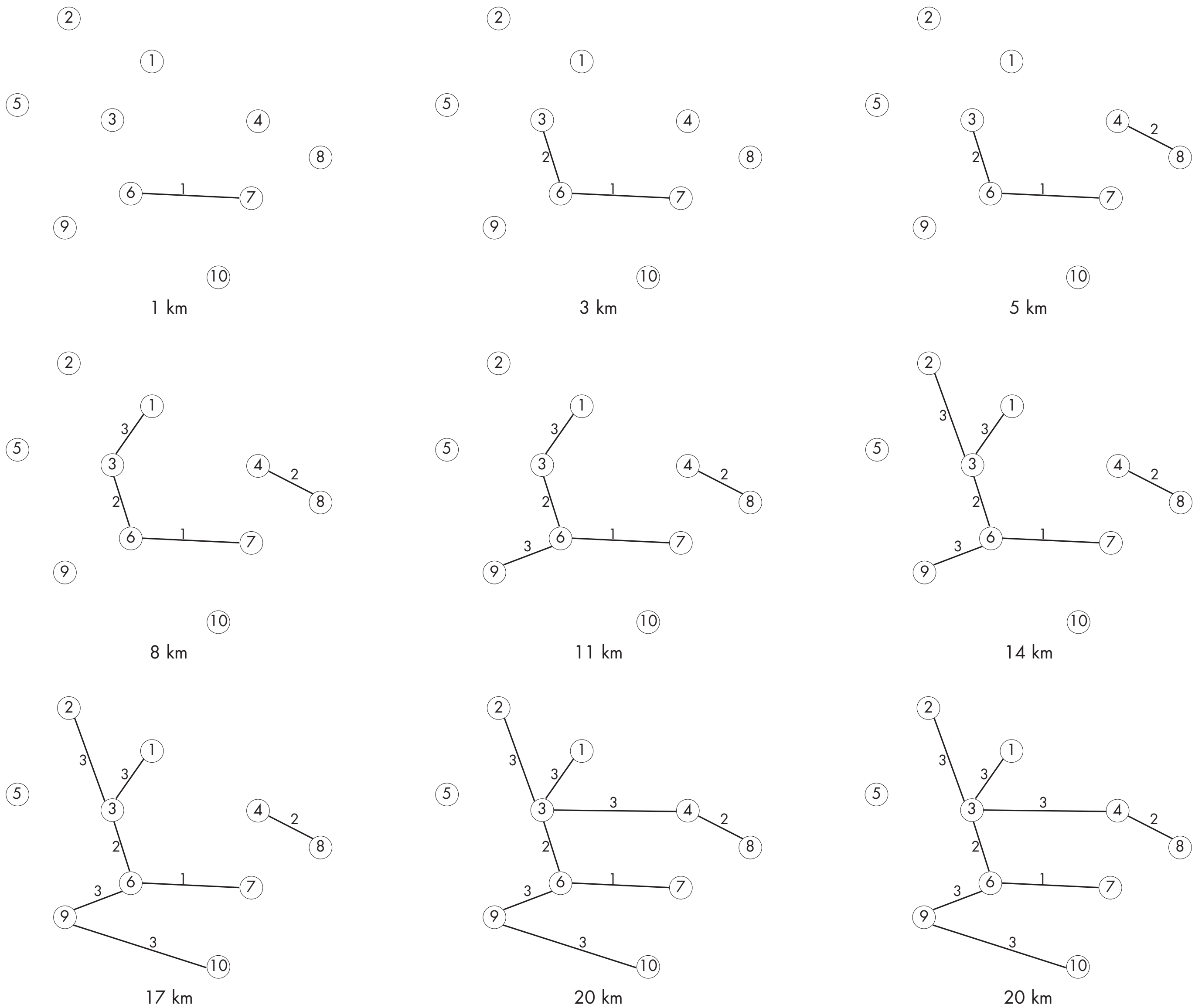


Figura 8

Ejemplo

Una red de distribución de aguas conecta dos depósitos. Uno de los depósitos está situado en una cota más alta y de él sale el agua hacia la red. El otro depósito está situado en una cota más baja y a él llega el agua a través de la red. La red también interconecta puntos intermedios (en los que ni se oferta ni se consume flujo) a través de conexiones dirigidas (arcos) que tienen asociadas determinadas capacidades máximas (medidas en metros cúbicos por segundo). Los datos que describen el problema aparecen en la tabla 6 y su correspondiente gráfica se muestra en la figura 9.

Se entiende en esta tabla que, en su caso, el vértice de partida de los diferentes arcos se identifica por filas, mientras que el vértice de llegada se identifica por columnas. Cuando aparece el signo – no existe arco entre los correspondientes vértices. Cuando aparece un número en una celda, éste representa la capacidad máxima del respectivo arco.

El problema que se plantea es el de determinar la cantidad máxima de agua que puede circular, a través de la red, entre los dos depósitos.

	1	2	3	4	5	6	7
1	–	10	8	12	–	–	–
2		–	7	–	9	–	–
3			–	–	10	8	–
4				–	–	8	–
5					–	11	13
6						–	20
7							–

Tabla 6

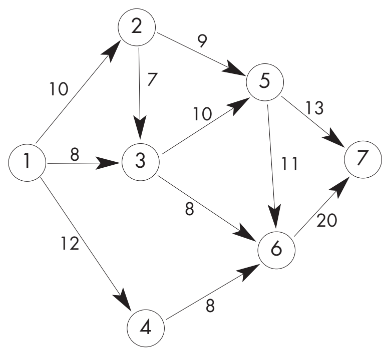


Figura 9

Un método para resolver el anterior problema

El primer método desarrollado para resolver el problema de flujo máximo es debido a Ford y Fulkerson (1956). Partiendo de un flujo factible (flujo actual), este método identifica, en cada etapa, un camino que conecta el vértice fuente con el vértice sumidero a través del cual se puede incrementar el flujo que circula actualmente entre ambos vértices. La seguridad de que no es posible encontrar uno de estos caminos y que, por tanto, se ha determinado el flujo máximo viene de la comprobación de un resultado que relaciona los conceptos de flujo y de corte.

El primer método desarrollad para resolver el problema de flujo máximo es debido a Ford y Fulkerson (1956). Partiendo de un flujo factible (flujo actual), este método identifica, en cada etapa, un camino que conecta el vértice fuente con el vértice sumidero a través del cual se puede incrementar el flujo que circula actualmente entre ambos vértices.

Corte

Un corte está constituido por la partición del conjunto de vértices en dos subconjuntos disjuntos. Nos interesa considerar cortes tales que el vértice fuente (*s*) esté en uno de los conjuntos y el vértice sumidero (*t*) en el otro ($s-t$ cortes). La capacidad de un corte se define como la suma de las capacidades de los arcos de la red que conectan vértices que están en el conjunto que contiene a la fuente con vértices que están en el conjunto que contiene al sumidero.

Ejemplo de corte

La figura siguiente representa una red cuyo conjunto de vértices es {1, 2, 3, 4, 5, 6} y el correspondiente conjunto de arcos viene dado por {(1, 2), (1, 3), (3, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 2), (5, 6)}. En dicha figura se ilustra un corte con $S = \{1, 2, 3\}$ y $\bar{S} = \{4, 5, 6\}$. El conjunto de arcos afectados por el corte es $[S, \bar{S}] = \{(3, 4), (3, 5), (4, 2), (5, 2)\}$. Si las capacidades de estos arcos son 4, 5, 3, 4, respectivamente, la capacidad del corte viene dada por $4 + 5 = 9$. Nótese, que en esta suma de capacidades no se tiene en cuenta los arcos con destino o llegada en los vértices del conjunto *S*.

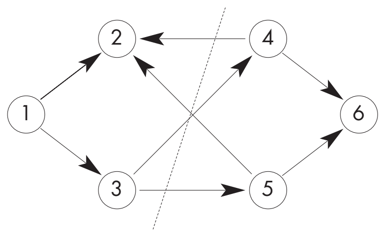


Figura 10

Es claro que la capacidad de un corte es una cota superior del flujo que puede circular por la red entre la fuente y el sumidero y es muy intuitivo el resultado conocido como *Teorema de Flujo Máximo Corte Mínimo* que indica que *el flujo máximo que circula por la red es igual a la capacidad del corte de capacidad mínima*.

Aplicación del método al anterior ejemplo

Es claro que el vértice 1 es la fuente y el vértice 7 el sumidero.

Etapa 1

Suponemos que el flujo que circula actualmente por cada uno de los arcos es igual a cero. Un camino que conecte 1 con 7 y permita aumentar el flujo actual es

$$1 \xrightarrow{10} 2 \xrightarrow{7} 3 \xrightarrow{10} 5 \xrightarrow{13} 7$$

(los arcos seleccionados son todos «hacia delante» y sobre ellos se coloca una cantidad que es igual a la diferencia entre su capacidad y la cantidad que circula). La mayor cantidad de flujo que se puede enviar por ese camino es igual a 7. Se fija esa cantidad como la que circula por cada uno de los arcos que constituyen el camino (figura 11).

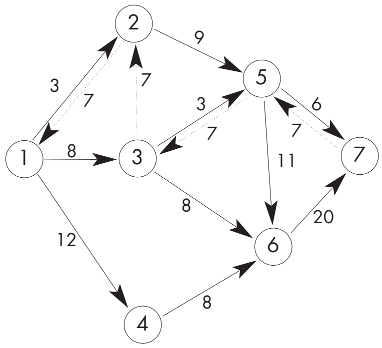


Figura 11

Cuando alguna de estas cantidades es igual a cero no aparece sobre la gráfica.

Se observa en la red anterior que, sobre los arcos seleccionados para construir el camino incremental, aparecen dos cantidades:

i) la diferencia entre su capacidad máxima y el flujo que circula actualmente;

ii) el flujo que circula en la actualidad (éste sobre un arco trazado en discontinuo y con sentido contrario del arco original).

Cuando alguna de estas cantidades es igual a cero, no aparece sobre la gráfica. El sentido contrario de los arcos que tienen asignada la cantidad de flujo (mayor que cero) que circula por su correspondiente arco original favorece, como veremos posteriormente, la selección de estos últimos como arcos «hacia detrás» dentro de un camino incremental. Se observa, por último, que los arcos actualmente saturados sólo están dibujados en discontinuo y en sentido contrario.

Etapa 2

El flujo que circula actualmente entre 1 y 7 es igual a 7. Procedamos a identificar un nuevo camino que incremente dicho flujo.

Uno de esos caminos podría ser:

$$1 \xrightarrow{3} 2 \xrightarrow{9} 5 \xrightarrow{6} 7$$

(de nuevo todos los arcos son «hacia delante» y sobre ellos se coloca una cantidad igual a la diferencia entre su capacidad máxima y la cantidad de flujo que circula actualmente). La mayor cantidad de flujo que puede circular por este camino (cuello de botella) es igual a 3. Se suma esta cantidad a todos los arcos que constituyen el camino y, con ello, se consigue que el flujo que circula actualmente entre 1 y 7 sea igual a 10 (ahora los arcos (1, 2) y (2, 3) están saturados). Se muestra gráficamente en la figura 12.

Etapa 3

Identificamos un camino que incremente el flujo de la siguiente manera. Elegimos el arco que conecta 1 con 3 ya que es un arco hacia delante y el flujo que puede circular por él es igual a 8 (no podemos elegir el arco que conecta 1 con 2 ya que, aunque es un arco hacia delante, está saturado y, por tanto, el flujo que puede circular por él es igual a 0). Luego (y esto es una novedad) elegimos el arco que conecta 2 con 3 ya que es un arco «hacia detrás» y la cantidad de flujo que circula por él es positiva e igual a 7. Luego elegimos el arco que conecta 2 con 5 ya que es un arco «hacia delante» y el flujo que puede circular por él es igual a 6. Por último, elegimos el arco que conecta 5 con 7 ya que es un arco hacia delante y el flujo que puede circular por él es igual a 3. De esta forma, tenemos:

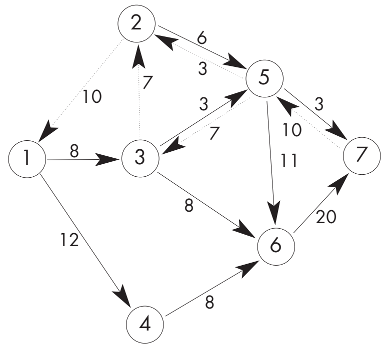


Figura 12

$$1 \xrightarrow{8} 3 \xrightarrow{7} 2 \xrightarrow{6} 5 \xrightarrow{3} 7$$

Como la menor cantidad asociada a los arcos seleccionados es igual a 3, el flujo que circula entre 1 y 7 se incrementa en esa cantidad y se distribuye sumando 3 a los arcos que van hacia delante y restando 3 a los arcos que van hacia detrás en el anterior camino. Por tanto, la cantidad de flujo que circula actualmente entre 1 y 7 es igual a 13 (se observa que ahora el arco (5, 7) también está saturado y el arco (1, 3) deja de estarlo). Se muestra gráficamente en la figura 13.

Etapa 4

Elegimos el camino

$$1 \xrightarrow{5} 3 \xrightarrow{3} 5 \xrightarrow{11} 6 \xrightarrow{20} 7$$

Está formado por arcos que van hacia

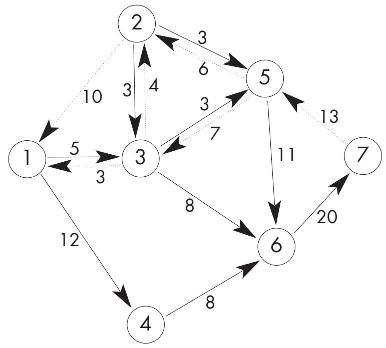


Figura 13

delante y el cuello de botella es igual a 3. Incrementamos esa cantidad al flujo que circula por los correspondientes arcos lo que hace igual a 16 el flujo que circula entre 1 y 7. Gráficamente:

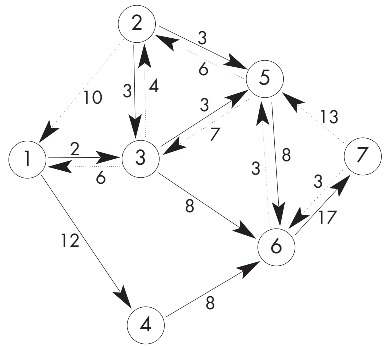


Figura 14

Etapa 5

Identificamos el camino

$$1 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{8} 6 \xrightarrow{17} 7$$

El cuello de botella es igual a 2. Incrementamos esa cantidad al flujo que circula por los correspondientes arcos y conseguimos que sea igual a 18 el flujo que circula entre 1 y 7. Gráficamente:

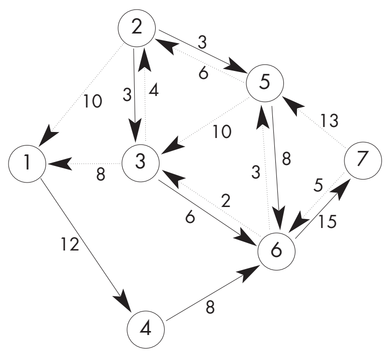


Figura 15

A partir de aquí no es posible encontrar un nuevo camino que incremente el flujo.

Etapa 6

Elegimos el camino

$$1 \xrightarrow{12} 4 \xrightarrow{8} 6 \xrightarrow{15} 7$$

Todos los arcos son «hacia delante» y el cuello de botella es igual a 8. Por tanto, incrementando en 8 unidades el flujo que actualmente circula por los correspondientes arcos, tenemos que el flujo que circula entre 1 y 7 es igual a 26. Gráficamente:

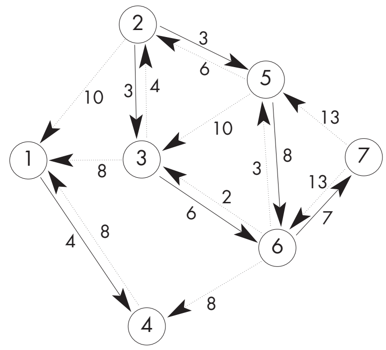


Figura 16

A partir de aquí no es posible encontrar un nuevo camino que incremente el flujo. Se postula entonces que el flujo máximo que circula entre 1 y 7 es igual a 26 y esto queda ratificado por la existencia de un corte de capacidad igual a 26 (según se ilustra en la figura 17, el formado por {1, 4} y {2, 3, 5, 6, 7}).

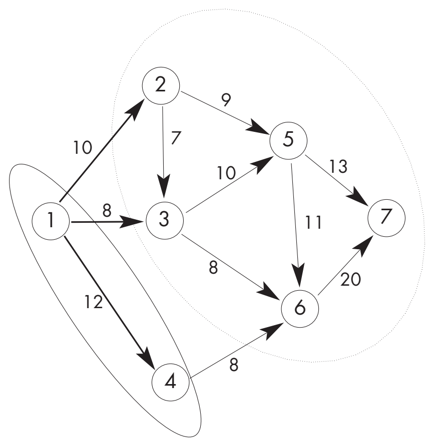


Figura 17

Las operaciones realizadas en las etapas anteriores se podrían resumir en el siguiente esquema algorítmico:

Inicialmente, los flujos que circulan sobre los arcos serán iguales a 0 ($x_{ij} = 0$)

Mientras exista un camino *P* de *s* a *t* que incremente el flujo,

Sea *d* la mínima cantidad de flujo que se puede enviar a través de *P*

Para todo arco (*i*, *j*) hacia delante en *P* hacer x_{ij} + d; para todo arco (*i*, *j*) hacia detrás en *P* hacer $x_{ij} - d$.

Comentarios sobre la eficiencia del método

El método anterior, a pesar de su sencillez, puede resultar no demasiado eficiente desde el punto de vista computacional si dicha eficiencia fuese establecida desde el análisis del caso peor, es decir contando las operaciones elementales (sumas, restas, comparaciones...) que pueden ser necesarias para resolver el problema particular más complicado.

El método de Ford y Fulkerson identifica en cada iteración un camino en la red y envía flujo por el mismo. Por lo tanto, el esfuerzo computacional en cada etapa coincide con el número de operaciones realizadas para identificar dicho camino. Desde la perspectiva del análisis del caso peor, puede ser necesario recorrer todos los arcos de la red. Denotando por m al número de arcos de la red, el número máximo de operaciones en una etapa es m. Ahora bien, tenemos que acotar el número de iteraciones que realiza el método. Para ello debemos acotar la cantidad de flujo que se puede enviar desde la fuente al sumidero. Recordemos, que cualquier $s - t$ corte nos da una cota superior de esa cantidad de flujo. Así, si consideramos el corte formado por el nodo fuente en un conjunto y el resto de los nodos en el otro, la capacidad del corte será la suma de los arcos que salen del nodo fuente. Supongamos que todas las capacidades de los arcos son menores o iguales que U, y que el número de nodos en la red es n. Entonces la suma de las capacidades de los arcos que salen del nodo fuente es menor o igual que nU. Como en cada iteración del método se envía al menos una unidad de flujo, el número de etapas es, a lo sumo, nU. Por lo tanto, el mayor número de operaciones que puede realizar el método es el producto de m y nU, lo que se denota por $O(nmU)$. Esta cantidad, dependiendo de U, clasifica el procedimiento anterior como pseudo-polinomial y puede que haga no demasiado eficiente su aplicación a distintos casos particulares. Sin embargo, es muy relevante su condición de primer método diseñado para la resolución del problema de flujo máximo y su manifiesta sencillez de aplicación. Hay que resaltar, por último, que las ideas básicas del anterior procedimiento, conjugadas con otras nuevas, han sustentado la aparición posterior de un número importante de métodos encaminados a mejorar el esfuerzo computacional.

La premisa fundamental del trabajo es la de defender la introducción del estudio de los casos desarrollados en los últimos cursos de Matemáticas en la enseñanza secundaria.

Conclusiones

En este trabajo se estudian modelos matemáticos combinatorios muy fáciles de formalizar a partir de distintas situaciones reales de interés económico y/o social. Presentamos métodos de resolución de los problemas de optimización combinatoria que aparecen en los modelos estudiados e ilustramos la aplicación de los mismos sobre distintos ejemplos. La premisa fundamental del trabajo es la de defender la introducción del estudio de los casos desarrollados en los últimos cursos de Matemáticas en la enseñanza secundaria. Esta defensa se fundamenta, entre otros factores, en la conexión que mantienen estos modelos con la realidad (por tanto, enfatizan la motivación, la utilidad y la comprensión de conceptos matemáticos), en la importancia del manejo de ciertas estructuras de carácter combinatorio y en la disposición de algoritmos de resolución sencillos y eficaces que, aunque basados en cálculos matemáticos poco complejos, sugieren la necesidad de uso de la herramienta de calcular imprescindible en el mundo del siglo XXI: el computador electrónico.

Sergio Alonso
Carlos González
Antonio Sedeño
Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Computación.
Universidad de La Laguna

Bibliografía

AHUJA, R., T. MAGNANTI y J. B. ORLIN, (1993): *Network Flows*. Prentice-Hall.

CORMEN, T. H., C. E. LEISRSON y R. L. RIVEST (1990): *Introduction to Algorithms,* McGraw-Hill.

GRIMALDI, R. P. (1998): *Matemáticas Discreta y Combinatoria*.