SUMA 38
noviembre 2001, pp. 95-97

Isoperímetros: El panal de abejas y Fejes Toth

Grupo Construir las Matemáticas*

TALLER DE PROBLEMAS

DEMOS UN GRAN SALTO en el tiempo. En números anteriores narramos los avatares del problema isoperimétrico en Grecia y en los países islámicos medievales, respectivamente. Retomemos el enfoque dado por Pappus con el que llegó a la conclusión de que, para un área dada, el perímetro del hexágono regular es menor que el del cuadrado o el del triángulo equilátero, por lo que si el problema se plantea sobre una teselación regular del plano, un trozo finito del teselado regular hecho con hexágonos regulares es el que requiere menor perímetro. Bueno, aún no podemos detenernos porque hemos de hacer la demostración de la proposición de Pappus en 3D. El conocido MacLaurin (1698-1746), profesor de Aberdeen y Edimburgo, utilizó el método que a continuación presentamos. Lo hizo para poner de manifiesto la capacidad de la Geometría clásica como fuente de investigación en cualquier momento (conviene recordar que MacLaurin estaba centrado en analizar las posibilidades de los métodos infinitesimales que en su época emergían, lo que demostró sobradamente con su *Treatise of Fluxions*).

Sea un *alveolo* cuyo fondo está formado por rombos iguales *SABC*, *SCDE* y *SEFA*, de lado *c*. Consideremos la sección recta (perpendicular a su eje) que pasa por el vértice *A*; así obtenemos el hexágono regular *AKCLFK'*, de lado *a*, cuyo centro *O* es la proyección del vértice *S* (ver Figura 1).

Uniendo *K* con *O*, *A* con *C* y tomando un plano cualquiera que pase por *AC*, éste determina por intersección con los planos *TABU*, *UBCV*, *CSO* y *ASO* un rombo *AG'CG*; por último, llamemos λ a la longitud de la arista *AT* y *d* a la de la semidiagonal *AP*.

Por simetría, podemos considerar sólo la tercera parte de una celdilla y debemos buscar qué posición del plano *AG'CG* determina la superficie mínima formada por los trapecios *TAGU*, *UGCV* y por el rombo *AG'CG*.

Como la superficie descrita tiene por área:

$$(\lambda + GU)\cdot a + 2d\cdot GP = (\lambda + \lambda - GK)\cdot a + 2d\cdot GP =$$
$$2\lambda\cdot a - a\cdot GK + 2d\cdot GP$$

* Los componentes del Grupo Construir las Matemáticas son Rafael Pérez, Isabel Berenguer, Luis Berenguer, Belén Cobo, M.ª Dolores Daza, Francisco Fernández, Miguel Pasadas y Ana M.ª Payá.

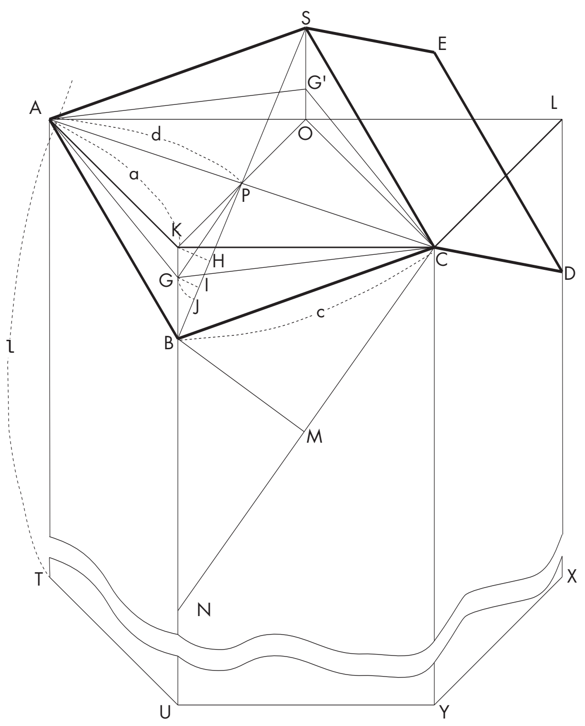

Figura 1

y el producto $2\lambda \cdot a$ es constante, la cuestión queda reducida a minimizar la expresión:

$$-a \cdot GK + 2d \cdot GP \quad (*)$$

Supongamos que B ha sido tomado sobre *KU* de tal manera que:

$$\frac{BK}{BP} = \frac{a}{2d} \quad (**)$$

Tomando *P* como centro y *PG* como radio, trazamos sobre el plano *BKP* un arco de circunferencia que corta a *PB* en *J* (prolongando si fuese necesario); determinemos las perpendiculares *KH* y *GI* a *PB*. La semejanza entre los triángulos rectángulos *GIB*, *KHB* y *BKP* y el resultado obtenido anteriormente (**), escribiremos que:

$$\frac{BI}{BG} = \frac{BH}{BK} = \frac{BK}{BP} = \frac{a}{2d}$$

De esta serie de razones obtenemos que:

$$\frac{BH - BI}{BK - BG} = \frac{IH}{GK} = \frac{a}{2d}$$

luego:

$$a \cdot GK = 2d \cdot IH.$$

Sustituyendo en la expresión (*), queda

$$2d \cdot GP - 2d \cdot IH =$$

$$2d \cdot (GP - IH) =$$

$$2d \cdot (JI + HP).$$

Pero siendo *d* y *HP* constantes, el problema se reduce a buscar el mínimo para *JI*. Este mínimo se alcanza cuando *JI* = 0; es decir, cuando los puntos *J* e *I* se confunden, o cuando *G* coincide con *B*.

Así pues, el mínimo buscado corresponde con la hipótesis de que el plano secante pase por el punto *B* determinado mediante la expresión (**). Esta posición del plano secante es precisamente la que se da en las celdillas de las abejas.

Los ángulos de uno de los rombos del fondo del alveolo miden 109° 28' 16'' y 70° 31' 44''.

En el triángulo rectángulo *BKP* se verifica que:

$$BP^2 = BK^2 + KP^2;$$

sustituyendo *BK* por $BP \cdot (a/2d)$, *KP* por $a/2$ y simplificando, queda:

$$BP = \frac{ad}{\sqrt{4d^2 - a^2}}$$

Como $AP = d$, se deduce que:

$$\frac{AP}{BP} = \frac{\sqrt{4d^2 - a^2}}{a}$$

Como *d* es la mitad del lado *AC* del triángulo equilátero inscrito en la circunferencia de radio *a*, su valor es igual a:

$$\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Sustituyendo en el cociente anterior, y simplificando, queda:

$$\frac{AP}{BP} = \sqrt{2}$$

Por tanto, la diagonal mayor de uno de los rombos estudiados coincide con la diagonal de un cuadrado cuyo lado es la diagonal menor de dicho rombo.

Por otro lado, tan ($\angle ABP$) = AP/BP; luego $\angle ABP$ = 54° 44' 8''. En definitiva, $\angle ABP$ = 109° 28' 16'' y $\angle ABP$ = 70° 31' 44'', por ser suplementario del primero.

El lado de un rombo es igual al triple de la distancia *BK* o *SO*.

Por ser el triángulo *BPC* rectángulo, se tiene que:

$$BC^2 = BP^2 + PC^2 = \frac{d^2}{2} + d^2 = \frac{9a^2}{8}$$

entonces:

$$BC = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$$

Análogamente, por ser rectángulo el triángulo *BKP*:

$$BK^2 = BP^2 - KP^2 = \frac{d^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{8}$$

y por lo tanto:

$$BK = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

Por tanto, $BC = 3BK$. Además, se observa que la distancia BK es la cuarta parte del lado de un cuadrado inscrito en la circunferencia de radio a.

> Las caras de cada uno de los ángulos poliédricos A, B, C, D, E y F son iguales.

En efecto, tomemos sobre la arista BU un punto N tal que $BN = BC$. Después, abatimos perpendicularmente BM sobre la recta CN. El triángulo NKC es rectángulo y, teniendo en cuenta que:

$$NK = 4BK = a \cdot \sqrt{2}$$

$$CN^2 = NK^2 + KC^2 = 3 \cdot a^2;$$

luego:

$$CN = a \cdot \sqrt{3} = AC.$$

Los triángulos NBC y ABC son iguales por tener los tres lados iguales, por lo que:

$$\angle NBC = \angle ABC;$$

análogamente:

$$\angle NBA = \angle ABC$$

En consecuencia, también son iguales las caras del ángulo poliédrico C.

La demostración es análoga para los demás vértices.

Comparación con una celdilla de fondo plano

El prisma recto que tiene por base el hexágono $AKCLFK'$ y una celdilla tienen igual volumen, porque considerando sólo un tercio de éste, se observa que las pirámides $BAKC$ y $SAOC$ son iguales. Sin embargo, sus superficies son diferentes. Veamos cómo economizan las abejas la superficie de sus celdillas.

Llamando a al lado de la sección recta común a los dos tipos de poliedros –prisma hexagonal y alveolo– la longitud de la arista es $(25/6)a$.

Por tanto, las superficies del alveolo y del prisma hexagonal son, respectivamente:

$$\frac{a^2}{2}(50 + 3\sqrt{2}) \quad \text{y} \quad \frac{a^2}{2}(50 + 3\sqrt{3})$$

La primera superficie es a la segunda como $50 + 3\sqrt{2}$ es a $50 + 3\sqrt{3}$, luego las abejas optimizan la superficie.

Esta fue la conclusión a la que llegó el físico francés Réaumur (1683-1757), que comunicó su conjetura a Samuel Koening. Éste llegó a la conclusión de que del principio minimal de Réaumur se deducen los ángulos de 120° y de 109° 26', lo que concordaba con las mediciones efectuadas sobre panales. A partir de ahí, han sido muchas las personas que dijeron que las abejas, al no ser inteligentes, *han utilizado ciegamente las más elevadas matemáticas por orden y guía divina*.

En todo lo dicho se está admitiendo que las abejas han atinado, no se sabe porqué, con el panal perfecto. Sin embargo, el húngaro Fejes Tóth ha demostrado en 1964 que hay otro modelo de celdilla que produce un resultado ligeramente mejor, aunque los errores que se cometen en la fabricación hacen que, de hecho, el modelo de las abejas sea el más adecuado. El fondo de esta celdilla consta de dos hexágonos y dos rombos.

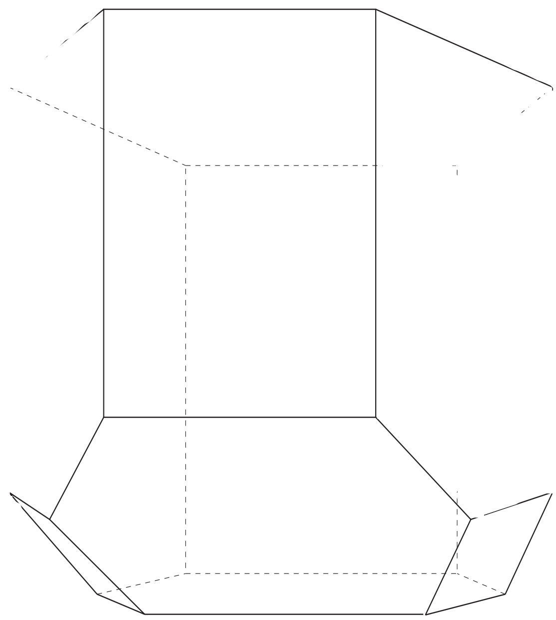

Figura 2 : Celdilla de Fejes Toth

Fejes Tóth realizó la correspondiente publicación de sus investigaciones al respecto en un artículo llamado *Lo que saben y no saben las abejas* en donde aparece el problema isoperimétrico correspondiente a los panales del que aún no sabemos cuál es la solución:

> Dados dos números cualesquiera, V y A, hallar un panal de anchura a cuyas celdillas tengan superficies de área mínima y encierren un volumen V.