

Construcciones y disecciones del octógono

Inmaculada Fernández Benito
Encarnación Reyes Iglesias

**IDEAS
 Y
 RECURSOS**

Las construcciones geométricas con regla y compás, o bien con plegado de papel, constituyen un importante recurso para reforzar la faceta manipulativa del aprendizaje de las matemáticas.

En la observación del entorno que rodea a nuestros alumnos aparecen formas geométricas que con frecuencia son octógonos. Las disecciones geométricas ofrecen mucho interés desde el punto de vista formativo y de desarrollo de la actividad creadora y descubridora del alumno.

CON LA CORRIENTE constructivista, que es inherente a las nuevas teorías de enseñanza, la Geometría ha recobrado un importante protagonismo. Pensamos que las construcciones geométricas con regla y compás, o bien mediante el plegado de papel, constituyen un importante recurso para reforzar la faceta manipulativa del aprendizaje de las matemáticas.

Uno de los objetivos generales de la enseñanza de las matemáticas consiste en ayudar al alumno a descubrir la realidad matemática del entorno que le rodea. En particular desde su vinculación con el arte y la arquitectura, la observación de distintas formas geométricas en los elementos constructivos y la frecuencia con la que aparece el octógono en ellas, nos ha llevado a considerar y analizar algunas características de este polígono.

El octógono es una forma geométrica utilizada con frecuencia en la construcción arquitectónica como paso intermedio entre la forma cuadrada y la circular. Recordemos, por ejemplo, en la arquitectura árabe los trazados de plantas, cúpulas, mausoleos, torres, fontanas, etc.

Construcciones

Son bien conocidas algunas de las construcciones del octógono regular con regla y compás como, por ejemplo, las siguientes:

- A) *La obtenida a partir de una circunferencia trazando dos diámetros perpendiculares y sus bisectrices.*

El interés de esta construcción radica, además de por su sencillez, porque permite la obtención mediante bisecciones, del ángulo de 45° , que es el ángulo central del octógono.

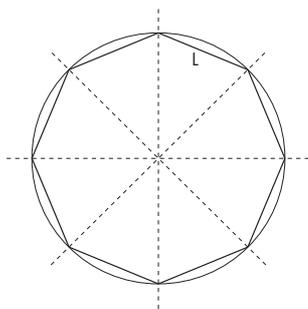


Figura 1

B) La construcción realizada a partir de un cuadrado PQRS y el cuadrado P'Q'R'S' que resulta al girar el primero 45° alrededor de su centro O.

Esta construcción nos proporciona dos octógonos convexos y una estrella {8/2}.

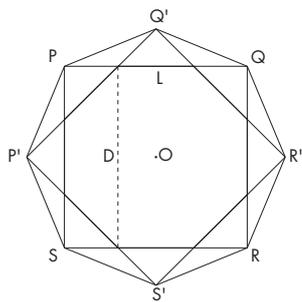


Figura 2

Actividades

Por el gran número de actividades de interés geométrico que pueden aportar otras construcciones del octógono, proponemos las siguientes:

1) A partir de un formato DIN A4 (Figura 3) que es un rectángulo de proporción $\sqrt{2}$, se extrae la tira de dimensiones $1 \times (\sqrt{2} - 1)$.

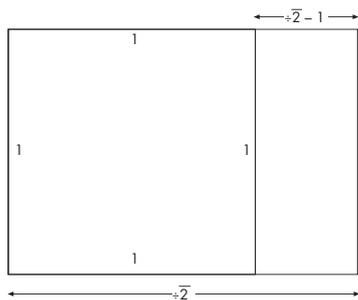


Figura 3

Para formar el octógono se sitúa la tira paralelamente a las dos diagonales del cuadrado, haciendo coincidir el eje de simetría longitudinal de la tira, con la diagonal del cuadrado, hasta intersectar a los lados de éste, como se puede observar en la siguiente figura:

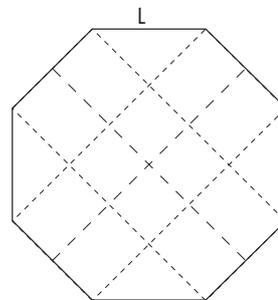
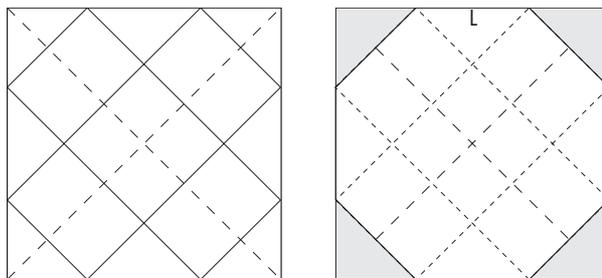


Figura 4

Calculemos el lado L del octógono a partir de un cuadrado de lado 1 y comprobemos que efectivamente el lado del octógono regular obtenido con esta construcción mide $\sqrt{2} - 1$

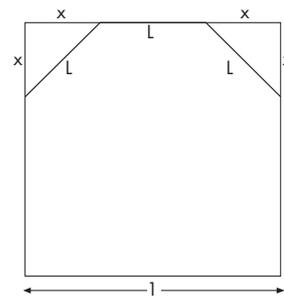


Figura 5

Esta construcción se conoce como "corte sagrado".

Según se observa en la figura anterior, se tiene:

$$2x + L = 1, \text{ de donde: } x = \frac{L}{\sqrt{2}}$$

y por tanto: $(\sqrt{2} + 1) \cdot L = 1$

$$L = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}, \text{ es decir: } \boxed{L = \sqrt{2} - 1}$$

2) Dado un cuadrado se trazan sus diagonales y se dibujan cuatro arcos de circunferencia con centros en los vértices del cuadrado y radio la mitad de la diagonal. Dichos arcos determinan, al cortar a los lados del cuadrado, ocho puntos que son los vértices de un octógono regular. Esta construcción se conoce como "corte sagrado".

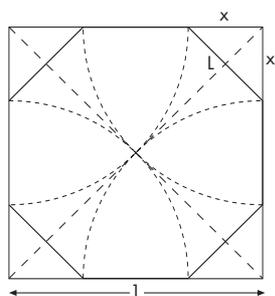


Figura 6

Comprobemos que efectivamente el polígono construido es un octógono regular. Tenemos:

$$\begin{aligned} 2x + L &= 1 \\ x + L &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \text{ de donde: } x = \frac{\sqrt{2}}{2} - L$$

y por tanto: $\sqrt{2} - 2 \cdot L + L = 1$

Es decir: $L = \sqrt{2} - 1$

3) Otra construcción especialmente interesante desde el punto de vista algebraico, geométrico y artístico es la del *octógono estrellado* {8/3} de la siguiente figura, que además de ser una estrella es un polígono, a diferencia de la estrella del apartado B) que no es un polígono sino dos (dos cuadrados).

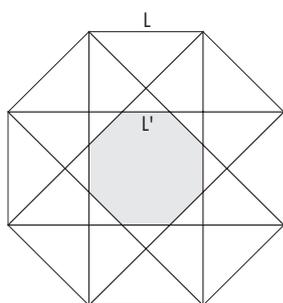


Figura 7

Disecciones

Las disecciones de polígonos, en piezas, para formar otros polígonos es una forma atractiva y entretenida de abordar el estudio de la geometría de los polígonos y sus propiedades.

Ha sido ya probado que cualquier polígono puede ser cortado en un número finito de piezas que forman otro polígono de la misma área. Así, diremos que dos polígonos son *equicompuertos* si y sólo si son equivalentes.

Las disecciones de polígonos, en piezas, para formar otros polígonos es una forma atractiva y entretenida de abordar el estudio de la geometría de los polígonos y sus propiedades.

Obviamente el interés de las disecciones radica en encontrar la figura equivalente con el mínimo número de piezas.

En la siguiente figura se muestran tres disecciones del octógono en cuatro partes. Con las cuatro partes en las que se han diseccionado cada uno de los octógonos se forman los rectángulos R_1 , R_2 y R_3 cuyas áreas coinciden con las de los octógonos O_1 , O_2 y O_3 de partida:

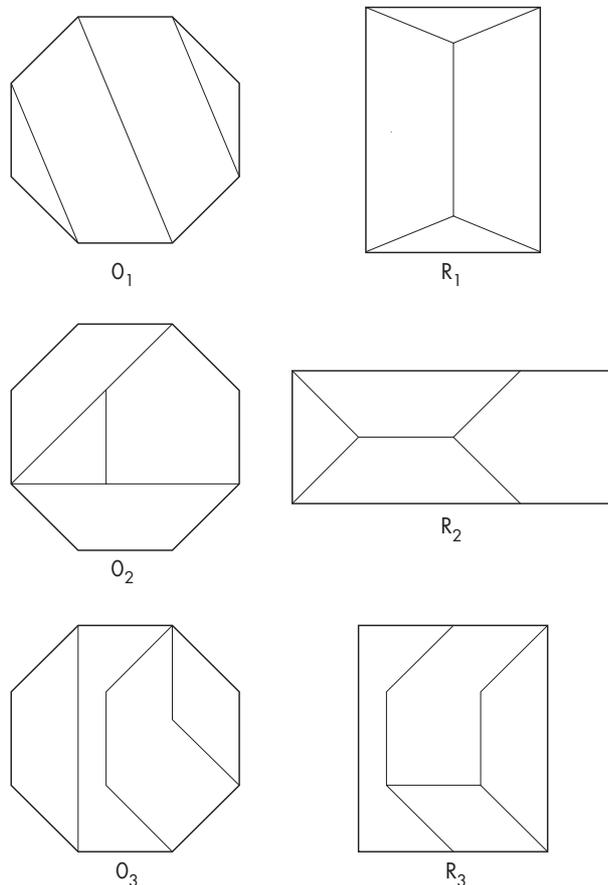


Figura 8

Proponemos además otra partición del octógono en cinco partes, cuatro de ellas trapecios rectángulos T_1 , T_2 , T_3 y T_4 y la quinta un cuadrado con centro en el centro del octógono. Estas cinco piezas forman el rectángulo R_4 , que obviamente tendrá el mismo área que el octógono O_4 .

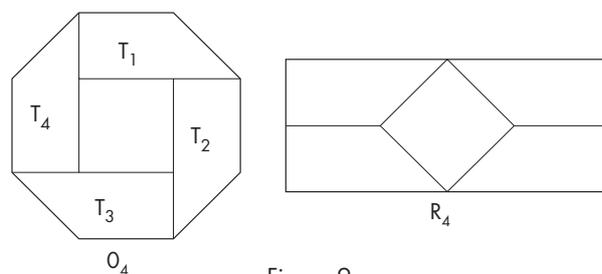


Figura 9

Actividades

Además de proponer como actividades las demostraciones que se han probado anteriormente, se pueden realizar otras que a continuación enunciamos:

1. Hallar el área de los triángulos sombreados de la figura 4 y como consecuencia calcular el área del octógono.
2. Demostrar que la tira extraída del formato DIN A4, en la figura 3 es un rectángulo de proporción $\sqrt{2} - 1$.
3. Deducir, utilizando el resultado de la actividad anterior, que:

$$\frac{D}{L} = 1 + \sqrt{2}$$

siendo L el lado del octógono y D la diagonal perpendicular al lado de apoyo, como se ve en la figura 2.

4. Hallar el área de la cruz dibujada en el primer cuadrado de la figura 4.
5. En la construcción del octógono sobre un cuadrado de referencia que origina el corte sagrado (figura 6), se genera una malla no regular de nueve rectángulos, como se muestra en la siguiente figura:

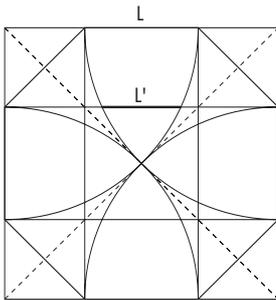


Figura 10

Inmaculada Fernández
IES María Moliner.
Laguna de Duero (Valladolid)
Encarnación Reyes
ETS Arquitectura.
Valladolid.
Sociedad Castellano-Leonesa
de Profesores de Matemáticas

La parte central es un cuadrado en el que se dibuja una cruz similar a la del cuadrado de referencia.

- a) ¿Cuál es la relación entre L y L' ?
 - b) Deducir que los cuadrados central y de referencia son semejantes de razón $1 + \sqrt{2}$.
6. Formular geoméricamente los métodos de disección de los octógonos O_1, O_2, O_3, O_4 y sus rectángulos equivalentes en las figuras 8, y 9.
 7. Caracterizar y clasificar geoméricamente las áreas de las piezas de las disecciones de la actividad anterior y compararlas con el área total del octógono y del rectángulo.

Bibliografía

- ALSINA, C. (1995): *Viaje al País de los Rectángulos*, Red Olimpica, Buenos Aires.
- BOLTIANSKI, V.G. (1981): *Figuras equivalentes y equicompuestas*, Editorial MIR, Moscú
- KAPPRAFF, J. (1991): *Conexions. The geometric bridge between art and science*, McGraw-Hill, New York.
- LINDGREN, H. (1972): *Recreational Problems in Geometric Dissections*, Dover, New York.
- REYES, E. (1998) «Formatos Din y papiroflexia de algunos polígonos», en *Actas del 5º Seminario Castellano-Leonés de Educación Matemática*.

12 Con cuatro tiras de un mecano o material similar construye un paralelogramo articulado como indica la figura. En el punto M ponemos un punzón y en P un lápiz, tenemos así un aparato que se llama pantógrafo.

Dibuja un triángulo. Fija el punto A. Si con M recorremos el triángulo. ¿Qué hará el punto P? ¿Qué propiedades cumplen un punto y su transformado?

¿Qué tendrías que hacer para que el pantógrafo te diese una figura cuyas longitudes fuesen dobles de la dada?