SUMA 38
noviembre 2001, pp. 47-52

# Sumas de Riemann con Sistemas de Cálculo Simbólico

**Lorenzo Javier Martín García**
**Juan Antonio Velasco Mate**

ARTÍCULOS

En este trabajo se utiliza el Sistema de Cálculo Simbólico *Maple* para ilustrar el concepto de límite de las sumas de *Riemann* de una función real y continua en un intervalo compacto, resaltando que aunque la interpretación geométrica sea muy clara, el cálculo mediante la propia definición es prácticamente imposible en la mayoría de los casos aunque se disponga de una potente herramienta.

La integral definida

$$\int_a^b f(x)dx$$

de una función real, continua y no negativa, $f$, en un intervalo cerrado y acotado, $[a, b]$, coincide con el área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas paralelas al eje de ordenadas que pasan por los extremos del intervalo considerado. Sin embargo, la definición de la integral como límite de las correspondientes sumas de *Riemann* presenta serios problemas conceptuales puesto que, al no ser numerable el número de particiones de un intervalo no se habla exactamente del límite de una sucesión ni tampoco del de una función, porque para cada partición se pueden realizar sumas diferentes sin más que variar el punto escogido en cada subintervalo generado por ella.

En este trabajo se utiliza el Sistema de Cálculo Simbólico *Maple* para ilustrar el concepto de límite de las sumas de *Riemann* de una función real y continua en un intervalo compacto, resaltando que aunque la interpretación geométrica sea muy clara, el cálculo mediante la propia definición es prácticamente imposible en la mayoría de los casos aunque se disponga de una potente herramienta. Por ello, no se puede prescindir de las propiedades teóricas, como la integrabilidad de funciones continuas, que aseguren parcialmente el éxito de los cálculos realizados o, en su defecto, permitan una interpretación lo más ajustada posible a la realidad.

## Integral de Riemann

Dado un intervalo compacto $[a, b]$, se llama *partición* de $[a, b]$ a una secuencia finita de puntos, $P = \{x_i: i = 0, 1, \ldots, n\}$, que verifican $a = x_0 < x_1 \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

Evidentemente, dos puntos consecutivos, $x_i$ y $x_{i+1}$, de una partición generan un subintervalo de longitud $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. A la mayor de las longitudes de los subintervalos de una partición $P$ se le llama *malla* de $P$ y se denota

$$\|P\| = \max\{\Delta x_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$$

En la figura 1 se representa la partición $P = \{-2, -0{,}5, 0{,}7, 1{,}5, 2, 2{,}3, 3\}$ del intervalo $[-2, 3]$, observándose inmediatamente que su malla es $||P|| = 1{,}5$.

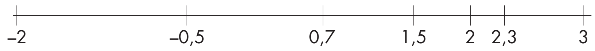


Figura 1. Una partición del intervalo $I = [-2, 3]$

Si $f$ es una función real definida en el intervalo $[a, b]$ y $P = \{x_i, i=0, 1, \ldots, n\}$, es una partición de dicho intervalo, se llama *suma de Riemann de f* relativa a la partición $P$ a toda suma del tipo

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

donde cada $c_i$ es un elemento cualquiera del intervalo $[x_i, x_{i+1}]$.

El poder elegir libremente los puntos de evaluación, $c_i$, permite construir diversas sumas de *Riemann* una vez fijadas la función, el intervalo y la partición. Una posibilidad consiste en tomar como puntos de evaluación a todos los elementos de la partición menos el último. Así pues, si consideramos la función $f(x) = xe^x$, el intervalo $[0,1]$, la partición $P = \{x_i = i/16 : i = 0, 1, \ldots, 16\}$, que origina la división de $[0, 1]$ en 16 subintervalos de igual longitud, y los puntos de evaluación $c_i = x_i$ con $i = 0, 1, \ldots, 15$, la suma de *Riemann* correspondiente es

$$\frac{1}{15}\sum_{i=0}^{14}\frac{1}{15}\, i e^{\frac{1}{15}i} = 0{,}91103356147763949960$$

La representación gráfica de la figura 2 proporciona una interpretación geométrica de esta suma: se aproxima al valor del área, $A$, de la región plana comprendida entre la función $f(x)$ y el intervalo $[0, 1]$; para ello, se adosan rectángulos cuyo área puede calcularse fácilmente. En este caso, además, puede deducirse que $S(f, P) < A$ y que se ha calculado –y representado– la menor de las sumas asociadas a $P$ porque la función $f$ es creciente y está evaluada en los extremos inferiores de los subintervalos.

La pregunta que surge de forma natural es: ¿se puede obtener el área $A$ considerando particiones muy pequeñas? De forma visual, las utilidades gráficas de los Sistemas de Cálculo Simbólico permiten realizar animaciones que aclaran todo tipo de dudas. Sin embargo, para poder responder matemáticamente a esta pregunta, se necesita fijar sin ambigüedades el significado exacto de «particiones muy pequeñas». Por ello se introduce el concepto de límite de sumas de *Riemann*.

*De forma visual, las utilidades gráficas de los Sistemas de Cálculo Simbólico permiten realizar animaciones que aclaran todo tipo de dudas.*

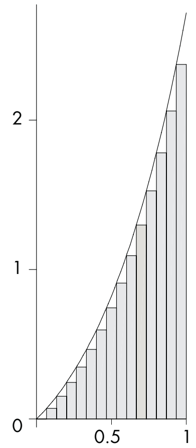


Figura 2. Una de las muchas sumas de *Riemann* de $f(x) = xe^x$

Se dice que el número real $I$ es el *límite* –cuando la malla de $P$ tiende a 0– de las sumas de Riemann de la función $f$ en el intervalo $[a, b]$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que cualquier partición de $[a, b]$, $P$, cuya malla sea menor que $\delta$ verifica $|S(f, P) - I| < \varepsilon$, independientemente de los puntos de evaluación que se escojan para $S(f, P)$. Cuando esto sucede,

$$I = \lim_{\|P\|\to 0} S(f, P) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Cuando existe el límite de sus sumas de *Riemann* se dice que la función es *integrable* en el intervalo considerado en el sentido de *Riemann* y al límite de las sumas se le llama *integral definida* de $f$ en el intervalo $[a, b]$. La notación habitual es

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Si, además, la función $f$ es no negativa, la integral coincide con el área comprendido entre la función y el eje de abscisas.

## Cálculo exacto de sumas de Riemann

Aunque para dilucidar si una función es integrable o para demostrar los resultados teóricos resulta necesaria e imprescindible, la definición dada de integral de *Riemann* es un ejemplo no infrecuente en las Matemáticas de descripción completamente inútil desde el punto de vista operacional. El cálculo de integrales definidas siempre se realiza mediante la regla de *Barrow* –cuando es posible encontrar una función primitiva–, mediante referencia a funciones conocidas –como la función Γ– o mediante métodos numéricos. En muy raros casos se calculan las sumas de *Riemann* y mucho menos su límite, ni siquiera para encontrar una aproximación numérica razonable.

Es cierto que la definición dada remite a la comprobación de ciertas propiedades sin proporcionar ningún mecanismo de cálculo. Sin embargo, habiendo asegurado la integrabilidad de la función, si se tiene la suerte de encontrar una sucesión de particiones cuya malla tendiera a 0 para la que se pudieran calcular tanto las sumas de *Riemann* como el límite de la sucesión numérica que originan, se habría calculado la integral debido a la unicidad de este valor.

Los Sistemas de Cálculo Simbólico pueden utilizarse como herramienta para la realización de cálculos de este tipo. En particular, *Maple* dispone de comandos específicos que calculan simbólica y numéricamente algunas sumas de *Riemann*. Concretamente leftsum, middlesum y rightsum proporcionan el valor de las sumas de *Riemann* obtenidas al considerar respectivamente como punto de evaluación el extremo inferior, el punto central y el extremo superior de cada subintervalo originado por una partición formada por puntos equiespaciados.

Aplicando estas utilidades a la función anteriormente considerada, $f(x) = xe^x$ en el intervalo [0, 1], calculando su valor y simplificando[1], se obtienen las siguientes expresiones:

$$\mathrm{SuIz}(m) = \frac{1}{m^2}\sum_{i=0}^{m-1} i e^{i/m} = \frac{e^{(1+m)/m} m + e^{1/m} - em - e^{(1+m)/m}}{\left(e^{1/m}-1\right)^2 m^2}$$

$$\mathrm{SuCe}(m) = \frac{1}{m^2}\sum_{i=0}^{m-1}\left(i+\frac{1}{2}\right) e^{(2i+1)/2m} = \frac{e^{3/2m} - e^{(3+2m)/2m} + 2e^{(3+2m)/2m} m + e^{1/2m} - 2e^{(1+2m)/2m} m - e^{(1+2m)/2m}}{2\left(e^{1/m}-1\right)^2 m^2}$$

$$\mathrm{SuDe}(m) = \frac{1}{m^2}\sum_{i=0}^{m} i e^{i/m} = \frac{e^{(2+m)/m} m + e^{1/m} - 2e^{(1+m)/m} m - e^{(1+m)/2m}}{\left(e^{1/m}-1\right)^2 m^2}$$

Afortunadamente en esta situación, *Maple* ha sido capaz de desarrollar los sumatorios y encontrar una expresión genérica que sólo depende del número de subintervalos asociados a la partición. Es evidente que esto no sucede en todos los casos; la respuesta habitual del programa es la notación simbólica de la suma, como sucede con la función

$$g(x) = \frac{1}{3 + 2\cos x}$$

en el intervalo [–π/2, π/2] donde la respuesta ofrecida para la suma lateral izquierda no es otra que

$$\frac{\pi}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{3 + 2\,\mathrm{sen}\left(i\pi/m\right)}$$

Puesto que la función $f(x)$ es continua, también es integrable en el sentido de *Riemann* en cualquier intervalo compacto de la recta real. Por tanto, parece razonable pensar que si se puede calcular el límite cuando $m$ tiende a infinito de SuIz, SuCe o SuDe, éste tiene que coincidir con la integral de la función $f$ entre 0 y 1. De nuevo *Maple* resulta una ayuda eficaz porque es capaz de calcular exactamente el límite de estas tres expresiones[2]

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m^2}\sum_{i=0}^{m-1} i e^{i/m} = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m^2}\sum_{i=0}^{m-1}\left(i+\frac{1}{2}\right) e^{(2i+1)/2m} = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m^2}\sum_{i=0}^{m} i e^{i/m} = 1$$

Obviamente, como la función $f$ es no negativa, se ha calculado tanto el valor de la integral como el área comprendido entre la función y el eje de abscisas. La comprobación del resultado es inmediata porque mediante cálculo directo[3]

$$\int_0^1 xe^x\,dx = 1$$

## Cálculo numérico de sumas de Riemann

Debido a la dificultad de encontrar sucesiones cuyo término general pueda manejarse con relativa facilidad, lo que permitiría calcular su límite con posterioridad, surge la idea de considerar el valor numérico de la sucesión de números reales asociada a una determinada partición e intentar establecer una tendencia hacia algún valor concreto.

Para comprobar el alcance de esta estrategia y aprovechando que *Maple* maneja las tablas con relativa facilidad,

1 La sentencia *Maple* que calcula la suma lateral izquierda es Sulz:=simplify(value(student[leftsum](x*exp(x), x=0..1,m)));

2 La sentencia *Maple* empleada para el límite de la suma lateral izquierda es limit(Sulz,m=infinity);

3 La sentencia *Maple* que origina exactamente esta igualdad es Int(x*exp(x),x=0..1)=int(x*exp(x),x=0..1);

se ha construido la tabla donde –en sus columnas 2, 3 y 4– se han calculado con diez dígitos significativos los valores de las sumas de *Riemann* laterales y centradas[4] de la función $f(x) = xe^x$ en el intervalo [0, 1] para $m = 100, 200, \ldots, 2000$ subintervalos, representados en la primera columna. Asimismo, se ha diseñado una función no disponible como comando *Maple* y se le ha asignado el nombre SumaAleatoria. Esta función, que toma como argumentos la función, los extremos de un intervalo y el número natural que representa el número de subintervalos deseados, evalúa una suma de *Riemann* aleatoria basándose en una partición equiespaciada y eligiendo aleatoriamente los puntos de evaluación[5]. Los resultados de aplicar SumaAleatoria aparecen en la última columna de la tabla 1.

A la vista de estos datos pueden aventurarse que el límite buscado es 1. Sin embargo, el número de elementos de la sucesión es muy alto ya que, salvo para las sumas centrales –donde la aproximación se realiza pronto y rápidamente–, las otras sucesiones convergen lentamente, téngase en cuenta que en el término 2000 la diferencia entre el valor exacto y el aproximado es superior a $10^{-4}$.

También queda palpablemente reflejado que, por tratarse de una función creciente en el intervalo de integración, las sumas que consideran el extremo inferior del intervalo proporcionan un valor menor que cualquier otra elección de puntos de evaluación y las sumas que consideran el extremo superior proporcionan el mayor valor posible para una partición dada. Obviamente las sumas por la izquierda crecen a medida que aumenta el número de subintervalos mientras que las sumas por la derecha decrecen hasta converger ambas en un mismo punto. Las sumas centrales y las obtenidas aleatoriamente se encuentran entre las anteriores; las centrales van creciendo, mientras que las aleatorias oscilan de forma no controlada.

Llama la atención la importancia de escoger buenos puntos de evaluación. En este caso, la elección de los puntos intermedios es manifiestamente mejor que las otras aunque –o tal vez por eso– su expresión exacta es más complicada. Esta fragilidad supone una importante limitación a la hora de comparar esta técnica con las habitualmente empleadas para la evaluación numérica de integrales definidas ya que las interpolatorias o las fórmulas de cuadratura son mucho más robustas, sencillas y eficaces.

Las diferencias existentes entre los cálculos realizados tienen su clara interpretación geométrica. En la figura 3 aparecen los 6 rectángulos[6] asociados a la función $f(x) = xe^x$ y originados por una partición de 7 elementos equiespaciados del intervalo [0, 1] cuando se escogen de forma diferente los puntos de evaluación. Conviene resaltar que las cuatro gráficas son exactas, queriendo decir con ello que no tienen ningún tipo de deformación ni de variación de escala, salvo las originadas por los mecanismos de impresión, y que se ha escogido el intervalo [0, 1] y el número 6 para que las representaciones reales puedan verse tal como son y no como aproximaciones trucadas de lo que se quiere reflejar. Si se escoge un intervalo más amplio o se aumenta considerablemente el número de elementos de la partición, los dibujos que se obtienen no son significativos. Queda patente que la sumas de las área de los rectángulos de la gráfica de la izquierda es inferior al área buscada y lo será siempre que escojamos como puntos de evaluación los extremos inferiores de los subintervalos; lo contrario ocurre en la tercera gráfica, donde se calcula el área por exceso. Como ya se dijo, esto ocurre porque la función $f$ es creciente. En las dos gráficas restantes se produce un cierto equilibrio entre las partes que sobrepasan al área y las que no la

| *Subint.* | *Sumas Izquierda* | *Sumas Centro* | *Sumas Derecha* | *Sumas Aleatorias* |
|---|---|---|---|---|
| 100 | 0,9864455621 | 0,9999815144 | 1,013628380 | 1,006670401 |
| 200 | 0,9932135385 | 0,9999953785 | 1,006804948 | 0,9974160425 |
| 300 | 0,9954736382 | 0,9999979459 | 1,004534578 | 0,9958276244 |
| 400 | 0,9966044585 | 0,9999988448 | 1,003400163 | 1,003131199 |
| 500 | 0,9972831970 | 0,9999992606 | 1,002719761 | 0,9997478216 |
| 600 | 0,9977357924 | 0,9999994867 | 1,002266262 | 1,001906206 |
| 700 | 0,9980591249 | 0,9999996230 | 1,001942385 | 0,9986274028 |
| 800 | 0,9983016515 | 0,9999997111 | 1,001699504 | 0,9997598156 |
| 900 | 0,9984902998 | 0,9999997717 | 1,001510613 | 0,9993130967 |
| 1000 | 0,9986412288 | 0,9999998151 | 1,001359511 | 1,000605482 |
| 1100 | 0,9987647227 | 0,9999998473 | 1,001235888 | 0,998995799 |
| 1200 | 0,9988676391 | 0,9999998716 | 1,001132874 | 1,000614129 |
| 1300 | 0,9989547253 | 0,9999998907 | 1,001045711 | 0,998641143 |
| 1400 | 0,9990293736 | 0,9999999057 | 1,000971004 | 1,002057526 |
| 1500 | 0,9990940707 | 0,9999999180 | 1,000906258 | 1,001261332 |
| 1600 | 0,9991506812 | 0,9999999275 | 1,000849608 | 1,001342628 |
| 1700 | 0,9992006335 | 0,9999999359 | 1,000799622 | 0,998336620 |
| 1800 | 0,9992450356 | 0,9999999429 | 1,000755192 | 1,001074974 |
| 1900 | 0,9992847653 | 0,9999999490 | 1,000715440 | 0,998644493 |
| 2000 | 0,9993205220 | 0,9999999540 | 1,000679663 | 0,999282447 |

Tabla 1. Valores de algunas sumas de Riemann de $f(x) = xe^x$ en [0, 1]

4 El comando *Maple* utilizado para la primera suma lateral izquierda es evalf( student[leftsum](x*exp(x), x=0..1, A1));

5 Su código *Maple* es SumaAleatoria:=(f,a,b,n)-> sum(f(a+(b-a) /n*(j+evalf(rand()/10^ 12))) *(b-a)/n,j=O..n-1);

6 Alguno no aparece porque su altura es 0.

cubren; siendo menos ajustado en la gráfica de la derecha y más ponderado cuando se toma como referencia el punto central de cada subintervalo.

## Situaciones desfavorables

Los resultados anteriores podrían hacer pensar que con una fuerte herramienta de cálculo, se obtendrían buenas aproximaciones. Sin embargo, si se realiza un pequeño cambio en las hipótesis, la situación puede variar considerablemente.

En la tabla 2 se han realizado los mismos cálculos que en la tabla 1 manteniendo la función, $f(x) = xe^x$, pero tomando el intervalo [0, 3] en lugar del [0, 1]. Como se sabe, por los resultados anteriores, que las sumas centrales proporcionan una buena aproximación de

$$\int_0^3 xe^x\,dx$$

si hubiera que escoger entre los datos de la tabla, se elegiría

$$\int_0^3 xe^x\,dx \approx 41{,}17106642$$

aunque ninguna de las cuatro sucesiones numéricas da pistas sobre el posible valor de la integral. En el caso anterior se iba buscando un número natural, pero en este caso es posible que el valor sea un número irracional, lo que dificulta su localización.

El valor de la diferencia

$$\text{SumaDerecha}_{2000} - \text{SumaIzquierda}_{2000} = 0{,}09038491,$$

es una cota del error cometido al tomar como valor de la integral el elemento 2000 de cualquiera de las sucesiones asociadas a las sumas de *Riemann*. Aunque esta magnitud pueda reducirse a la mitad escogiendo la media entre los valores extremos de las dos sucesiones, hay que calificarla de «elevada» con relación al recorrido realizado en las sucesiones. En consecuencia, no resulta aconsejable seguir este procedimiento para el cálculo aproximado de la integral.

Sin embargo, la búsqueda del valor exacto mediante el establecimiento del término general de las sucesiones, que a priori pudiera parecer menos aconsejable que el cálculo numérico, proporciona, en esta situación, mejores resultados.

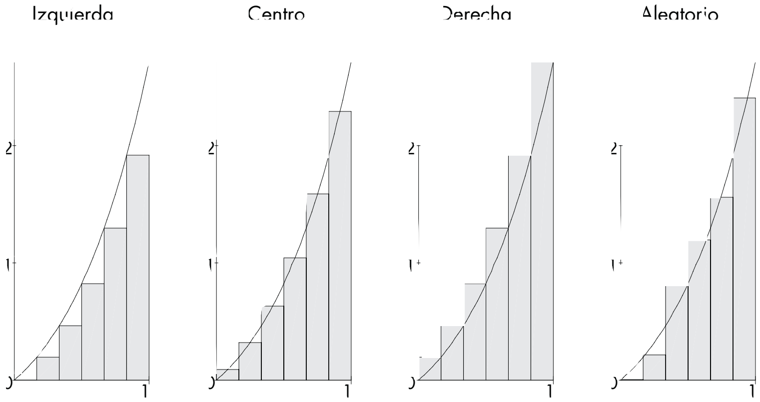


Figura 3. Representación gráfica de las diferentes sumas de Riemann empleadas

| *Subint.* | *Sumas Izquierda* | *Sumas Centro* | *Sumas Derecha* | *Sumas Aleatorias* |
|---|---|---|---|---|
| 100 | 40,27317522 | 41,16809862 | 42,08087355 | 41,48819931 |
| 200 | 40,72063692 | 41,17033002 | 41,62448608 | 41,43546319 |
| 300 | 40,87045198 | 41,17074326 | 41,47301808 | 41,24815555 |
| 400 | 40,94548347 | 41,17088788 | 41,39740805 | 40,94811994 |
| 500 | 40,99054204 | 41,17095484 | 41,35208170 | 41,22298900 |
| 600 | 41,02059762 | 41,17099120 | 41,32188067 | 41,22286389 |
| 700 | 41,04207398 | 41,17101313 | 41,30031660 | 41,29815116 |
| 800 | 41,05818566 | 41,17102736 | 41,28414799 | 41,22593895 |
| 900 | 41,07071963 | 41,17103710 | 41,27157500 | 41,11063036 |
| 1000 | 41,08074843 | 41,17104408 | 41,26151826 | 41,20275751 |
| 1100 | 41,08895492 | 41,17104924 | 41,25329113 | 41,13427644 |
| 1200 | 41,09579440 | 41,17105318 | 41,24643592 | 41,20997463 |
| 1300 | 41,10158221 | 41,17105625 | 41,24063592 | 41,14606081 |
| 1400 | 41,10654356 | 41,17105867 | 41,23566487 | 41,11747368 |
| 1500 | 41,11084368 | 41,17106062 | 41,23135690 | 41,12668747 |
| 1600 | 41,11460651 | 41,17106222 | 41,22758766 | 41,12868656 |
| 1700 | 41,11792683 | 41,17106355 | 41,22426202 | 41,16792869 |
| 1800 | 41,12087837 | 41,17106467 | 41,22130606 | 41,16850592 |
| 1900 | 41,12351931 | 41,17106560 | 41,21866133 | 41,20188985 |
| 2000 | 41,12589627 | 41,17106642 | 41,21628118 | 41,19908337 |

Tabla 2. Valores de algunas sumas de Riemann de $f(x) = xe^x$ en [0, 3]

Para particiones del intervalo [0, 3] con $m + 1$ elementos equiespaciados y para la función $f(x) = xe^x$, *Maple* proporciona directamente los siguientes valores

$$\text{SuIz}(m) = \frac{9}{m^2}\sum_{i=0}^{m-1} ie^{3i/m} = \frac{9}{m^2}\,\frac{-e^{3\frac{1+m}{m}}m + e^{3\frac{1}{m}} + e^{3}m + e^{3\frac{1+m}{m}}}{-e^{6\frac{1}{m}} + 2e^{3\frac{1}{m}} - 1}$$

$$\mathrm{SuCe}(m)=\frac{9}{m^2}\sum_{i=0}^{m-1}\left(\frac{2i+1}{2}\right)e^{(6i+3)/2m}=$$

$$=-\frac{9\cdot\left(e^{9/2m}-e^{(9+6m)/2m}+2e^{(9+6m)/2m}m+e^{3/2m}-2e^{(3+6m)/2m}m-e^{(3+6m)/2m}\right)}{2m^2\left(-e^{6/m}+2e^{3/m}-1\right)}$$

$$\mathrm{SuDe}(m)=\frac{9}{m^2}\sum_{i=0}^{m} ie^{3i/m}=\frac{9}{m^2}\,\frac{e^{3\frac{2+m}{m}}m+e^{3\frac{1}{m}}-e^{3\frac{1+m}{m}}m-e^{3\frac{1+m}{m}}}{e^{6/m}-2e^{3/m}+1}$$

Aunque estas expresiones puedan parecer largas y complicadas, puede calcularse su límite cuando el número de subintervalos, $m$, tiende a infinito:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{9}{m^2}\sum_{i=0}^{m-1} ie^{3i/m}=\lim_{m\to\infty}\frac{9}{m^2}\sum_{i=0}^{m-1}\left(\frac{2i+1}{2}\right)e^{(6i+3)/2m}=\lim_{m\to\infty}\frac{9}{m^2}\sum_{i=0}^{m} ie^{3i/m}=1+2e^3$$

Como era de esperar, el resultado es un número irracional. Su valor expresado con 10 dígitos significativos es

$$1+2e^3=41{,}17107384$$

Si se hubiera pedido a *Maple* que proporcionara el valor exacto y numérico de la integral, resultaría[7]

$$\int_0^3 xe^x\,dx=1+2e^3\approx 41{,}17107384$$

7 Las sentencias *Maple* utilizadas para la realización de estos cálculos son Int(x*exp(x),x=0..3)=inte(x*exp(x),x=0..3); y Int(x*exp(x),x=0..3)=evalf(inte(x*exp(x),x=0..3));

## Conclusiones

Dentro de unos límites razonables, el Sistema de Cálculo Simbólico *Maple* es capaz de calcular el valor numérico de cualquier suma de *Riemann* siempre que se especifique la función, el intervalo, la partición y los puntos de evaluación. Este hecho no es muy relevante porque, al fin y al cabo, se trata de realizar una suma finita –más o menos grande– de productos numéricos.

En el ejemplo presentado, también es capaz de encontrar la expresión del término general de algunas sucesiones obtenidas al tomar como puntos de evaluación los extremos o el centro de los subintervalos originados por particiones equiespaciadas y con malla tendiendo a cero. Este término general ha permitido calcular de forma simbólica el único valor posible del límite de las sumas de *Riemann*. Como la función escogida es continua y, por consiguiente, integrable, el valor obtenido es la integral definida de la función dada en el intervalo considerado. El cálculo directo de la integral sirve para corroborar el resultado. Es evidente que este proceso no siempre proporciona buenos resultados aunque se maneje una función integrable.

La evolución numérica de sucesiones de las sumas superior e inferior de *Riemann* proporciona siempre cotas del valor buscado, pero la convergencia es más bien lenta con relación al número de elementos que debe tener una partición para que la aproximación sea razonablemente buena. En cualquier caso, conocidas estas cotas, también se conoce una cota del error cometido al tomar como valor el punto entre medias de ambos.

Desde el punto de vista docente, las utilidades gráficas, numéricas y simbólicas de los Sistemas de Cálculo Simbólico representan una ayuda inestimable para explicar el concepto de integral de *Riemann*. La posibilidad de experimentar diferentes situaciones (modificar la función, considerar diferentes intervalos de integración y diferentes particiones para cada intervalo, cambiar los puntos de evaluación, calcular los valores numéricos de las sumas…) de una manera muy simple y sin necesidad de confeccionar programas específicos permite al alumno descubrir los puntos donde se encuentran las dificultades teóricas y de cálculo de la integral de *Riemann*.

**Lorenzo J. Martín**
ETS Ingenieros
de Telecomunicación.
Universidad Politécnica
de Madrid
**Juan Antonio Velasco**
IES Ángel del Alcázar
de Segovia.
Sociedad Castellano-Leonesa
de Profesores de Matemáticas

## Bibliografía

AMILLO, F., R. BALLESTEROS, L. GUADALUPE y J. MARTÍN (1996): *Cálculo: Teoría, Problemas y Sistemas de Computación*, McGraw Hill, Madrid.

BALLESTEROS, L. y J. MARTÍN (2000) «Sistemas de Cálculo Simbólico y su docencia en el ámbito universitario», en *Conocimiento, método y tecnologías en la educación a distancia. Actas de las jornadas UNED-2000*, Universidad Nacional de Educación a Distancia, Palencia, 243-248.

BALLESTEROS, L. y J. MARTÍN (2000): «Sistemas de Cálculo Simbólico: ¿Herra-mienta de usuario final o sistema de ayuda en el aprendizaje?», en *VIII Congreso de Innovación educativa en Enseñanzas técnicas, Universidad del País Vasco», volumen 2*, San Sebastián, 357-368.

MARTÍN, J. y A. VELASCO (1999): «Los Sistemas de Computación Matemática como recurso didáctico de apoyo para la presentación del concepto de derivada», en *IX Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas, JAEM*, Matemáticas de ENCIGA, Septiembre, Lugo.

ROANES, L. y M. ROANES (1999): *Cálculos Matemáticos por ordenador con Maple V Release 5*, Rubiños, Madrid.