SUMA 38

noviembre 2001, pp. 15-22

2001: el año Cournot

Gabriel Ruiz Garzón

ARTÍCULOS

Con este artículo se quiere conmemorar en este año 2001, el doscientos aniversario del nacimiento del insigne matemático Antoine Agustin Cournot. Analizaremos, utilizando la Teoría de Juegos, el trasfondo matemático existente en la estructura de los oligopolios, tran presentes hoy en los medios de comunicación como en tiempos de Cournot.

DURANTE LA NOCHE del día 23 de noviembre de 1654, aproximadamente entre las diez y media y las doce y media de la noche, experimentó Pascal una especie de éxtasis religioso que lo impulsó a abandonar la matemática para dedicarse a la teología. Afortunadamente, una noche de 1658 en que un dolor de muelas u otra dolencia le impedía dormir, decidió dedicarse al estudio de la cicloide. Milagrosamente el dolor cesó, lo que interpretó Pascal como un signo de que el estudio de la Matemática agradaba a Dios.

Cito esta anécdota porque este artículo también es fruto del dolor.

Dolor que siente todo ciudadano cuando todas las semanas llena el depósito de la gasolina en «cualquier» estación de servicio: ¡Qué más da, vaya a la que vaya en todas vale lo mismo el litro de gasolina! Enfado que sentimos cuando decidimos acudir a una gran superficie comercial: ¿la de capital español o la de capital francés? Malestar que puede ir en aumento cuando pagamos el recibo de la luz y comprobamos la imposibilidad de escoger otra empresa suministradora, o pagamos el recibo del gas, o acudimos a una sucursal bancaria, etc. A estas alturas les aseguro que no padezco un dolor de muelas, pero sí algo parecido a ello.

En gran medida, los sectores que he citado: energía, alimentación, bancario, etc. son *oligopolios*. Etimológicamente, la palabra oligopolio significa «pocos vendedores». El oligopolio es un mercado en el que existen pocas empresas vendedoras y además la actividad de cada empresa afecta a las demás. El oligopolio es una situación intermedia entre el *monopolio*, cuando sólo hay un vendedor, y la *competencia perfecta*, en la que el número de vendedores es lo suficientemente grande, lo que hace que el precio lo fije el mercado cualquiera que sea el volumen de producción de las empresas. Entre estos dos casos extremos se encuentran los oligopolios, en los que las empresas tienen cierto margen para fijar precios o cantidades de producción.

En aras a la globalización y al objeto de competir en ese mercado global, en España se han producido y se están produciendo, multitud de fusiones entre empresas, cuyo resultado práctico está siendo la conversión de una serie de sectores en oligopolios.

Alumnos y profesores de Matemáticas, pero consumidores todos, podemos utilizar como excusa los recortes de prensa que sobre el tema aparecen en los medios de comunicación (figura 1), para adentrarnos en los conceptos matemáticos que explican los comportamientos de los oligopolios, y en una rama de la Estadística, la Teoría de Juegos, con importantes aplicaciones a las ciencias políticas, a la Economía o a la Biología.

Nuestras clases de Matemáticas pueden convertirse en un foro donde se analicen temas de la actualidad que nos preocupan a la mayoría, y todo esto, sin un complicado aparataje matemático o económico. Debemos traer la calle a nuestras aulas.

Uno de los matemáticos que han contribuido a analizar la estructura de los oligopolios ha sido Antoine Augustin Cournot, del que este año 2001, se cumplirán doscientos años de su nacimiento.

Se nos ha ido el año 2000: *Año Mundial de las Matemáticas*. A lo largo del cual, desde nuestras aulas, sociedades de matemáticas, etc. hemos intentando acercar ésta nuestra ciencia a la calle y que se conozca nuestra labor. En la medida de lo posible, en el 2001, debemos continuar con dicho afán. Y nada mejor como recurso que, un tema de actualidad, los oligopolios, y un histórico matemático francés, Cournot, para continuar en nuestro empeño.

EL PAÍS, domingo 31 de diciembre de 2000

Las contradicciones de la fusión eléctrica

El informe que ha elaborado la Comisión Nacional de la Energía (CNE) sobre la fusión de Iberdrola y Endesa desvela las contradicciones y las dudas que existen sobre el hecho de que esta operación aumente la competencia en el sector eléctrico español.

El informe tiene dos votos particulares que se oponen a la fusión, y uno de ellos, el del consejero Ruscalleda, refleja con claridad cuál es el problema de fondo: cualquier cuota de mercado por encima del 30% implicaría una posición de dominio y, por tanto, no debería autorizarse, y como cualquier cuota de mercado por debajo del 40% eliminaría la rentabilidad de la operación, la unión debería rechazarse.

Este informe es el preludio del que debe elaborar, de forma preceptiva, el Tribunal de Defensa de la Competencia (TDC) sobre la operación. **Página 11**

Figura 1

Nuestras clases de Matemáticas pueden convertirse en un foro donde se analicen temas de la actualidad que nos preocupan a la mayoría, y todo esto, sin un complicado aparataje matemático o económico.

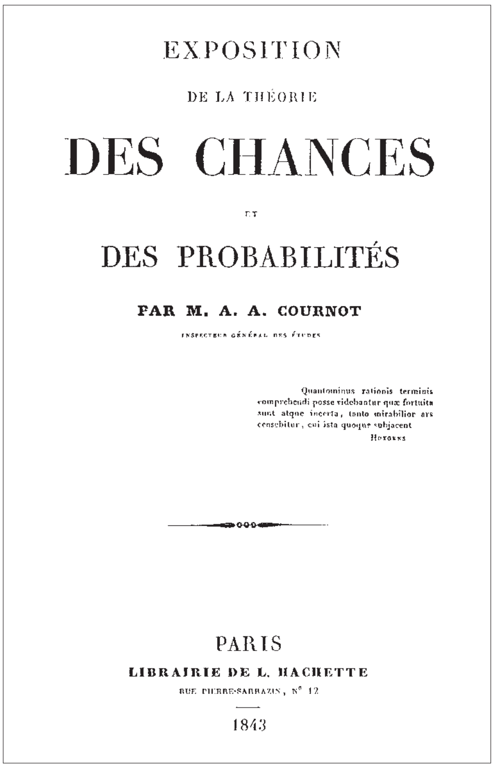
Hace 200 años

El 28 de agosto de 1801 en la ciudad francesa de Gray, Alta Sajonia, nace Antoine Augustin Cournot, matemático, filósofo, educador y el primer economista que incorporó los instrumentos matemáticos al análisis económico. En el año 1823 se licenció en Matemáticas, siendo alumno de Lacroix en la Sorbona y en el año 1827 consiguió la licenciatura en Derecho.

Toda una serie de artículos y trabajos matemáticos culminan en el año 1829 con su doctorado y atraen la atención de Poisson, quien le propone para la cátedra de Análisis de Lyon (1834), gracias a lo cual acaba también con un período de relativa pobreza en el que fue secretario de uno de los generales de Napoleón, el mariscal Gouvion Saint-Cyr. En 1841, plasmará en el manual titulado *Traité Elémentaire de la Théorie des Fonctions du Calcul Infinitésimal*, sus clases de Lyon. El Análisis Diferencial e Integral son tratados con exquisita elegancia en dos tomos dedicados a su mentor, Poisson.

Entre 1838 y 1854 fue funcionario público del Ministerio francés de Educación Nacional, concretamente Inspector General de Educación, puesto en el que sucedió a Ampère, al que todos los estudiantes de secundaria que estudien electricidad conocen. También fue rector en Grenoble (1835-1838) y en Dijon (1854-1862). Durante su vida fue más reconocido por su faceta de su actividad pública y docente, que como investigador en el mundo de la Estadística y de la Economía.

Fue un competente matemático puro. Importante fue su distinción entre probabilidad objetiva y subjetiva. En la *Exposition de la Théorie des Chances et des Probabilités* (figura 2), formula claramente la definición frecuencialista de probabilidad y propone trabajar con



EXPOSITION

DE LA THÉORIE

DES CHANCES

ET

DES PROBABILITÉS

PAR M. A. A. COURNOT

INSPECTEUR GÉNÉRAL DES ÉTUDES

Quantominus rationis terminis comprehendi posse videbantur quæ fortuita sunt atque incerta, tanto mirabilior ars censebitur, cui ista quoque subjacent

HUYGENS

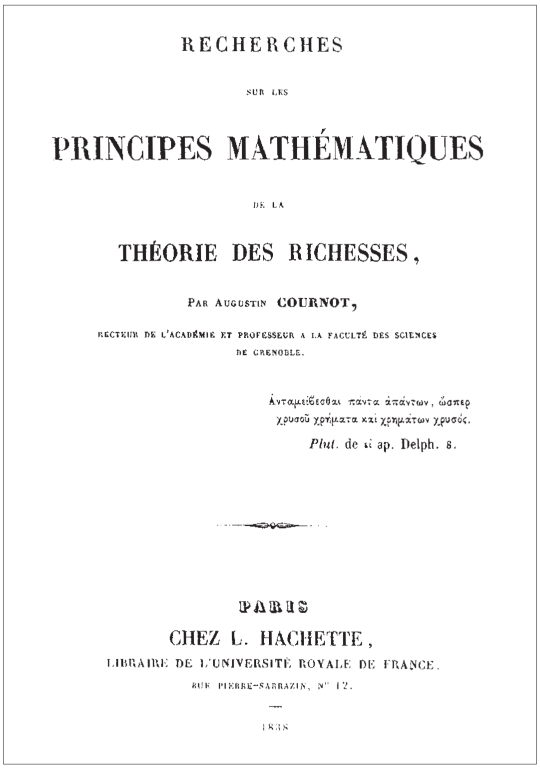
PARIS

LIBRAIRIE DE L. HACHETTE

RUE PIERRE-SARRAZIN, N° 12

1843

Figura 2



RECHERCHES

SUR LES

PRINCIPES MATHÉMATIQUES

DE LA

THÉORIE DES RICHESSES,

PAR AUGUSTIN COURNOT,

RECTEUR DE L'ACADÉMIE ET PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE GRENOBLE.

Ἀνταμείϐεσθαι πάντα ἁπάντων, ὥσπερ χρυσοῦ χρήματα καὶ χρημάτων χρυσός.

Plut. de ει ap. Delph. 8.

PARIS

CHEZ L. HACHETTE,

LIBRAIRE DE L'UNIVERSITÉ ROYALE DE FRANCE.

RUE PIERRE-SARRAZIN, N° 12.

1838

Figura 3

intervalos de confianza como un método de estimación. Al igual que Condorcet, Laplace o Poisson, Cournot estaba también interesado en la aplicación de la probabilidad a los procesos judiciales y en este libro le dedica un par de capítulos. Concretamente, estaba interesado en calcular la probabilidad de dar un veredicto correcto y en la influencia que sobre el mismo tenía el número de personas que forma un tribunal. También hay un capítulo donde confecciona tablas de mortalidad, con objeto de que puedan servir para calcular primas de seguros. En resumen, estamos ante una obra maestra, que sitúa a su autor al nivel de los citados Poisson, Condorcet, etc.

Como economista, Cournot fue fundador de la Economía Matemática. En 1838, Cournot publicó una obra titulada *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* (figura 3) (*Investigación sobre los principios matemáticos de la teoría de las riquezas*). Se trata de un estudio completo sobre el monopolio y el equilibrio del mercado. En él aparece la definición de la elasticidad de la demanda.

Cournot estaba también interesado en la aplicación de la probabilidad a los procesos judiciales

La fórmula de la *elasticidad de la demanda* se define como la relación entre porcentajes infinitesimales de la cantidad demandada y el precio *dq/dp*, por una parte, y, por otra, como relación entre la cantidad demandada media y el precio mismo *q/p*, o sea, que es:

$$E = \frac{dq}{dp}\,\frac{p}{q}$$

El primer factor

$$\frac{dq}{dp} = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta p}$$

no deja de ser otra cosa que una derivada, y mide la pendiente de la *curva de demanda*, curva que relaciona precios y cantidades. Lo que expresado económicamente nos da una información muy valiosa pues, nos indica la sensibilidad de la demanda ante una variación en los precios. Existen productos como los farmacéuticos o las gasolinas cuya demanda es *inelástica* ($E < 1$), es decir, un aumento en el precio no conlleva un descenso del consumo, o por lo menos no muy acusado. Al revés ocurrirá, si al vendedor de naranjas de un mercado, en donde hay muchos competidores, se le ocurre subir el precio de las naranjas. El señor García, diligente amo de casa, puede optar por no comprarle, es decir, estaríamos ante una curva de demanda *elástica* ($E > 1$).

Cournot fue un lector empedernido, durante toda su vida arrastró problemas en la vista. Casi ciego, falleció el 31 de marzo de 1877. Como observamos, su vida y obra, merecen la efeméride.

Una estructura de mercado: el duopolio

Dentro del oligopolio, el *duopolio* es una estructura de mercado caracterizada por la existencia de dos únicas empresas vendedoras. La característica esencial de la teoría del duopolio reside en que «ninguno de los vendedores puede ignorar las reacciones del otro», un cambio en el precio o en el nivel de producción de uno afectará al del otro y las reacciones del segundo, a su vez, influirán en el primero. La suerte de las dos empresas no es independiente; ninguno de los dos puede considerar como dada la política que seguirá el otro, ya que en parte está determinada por su propia política.

Hay diversos modelos que explican la determinación del precio y la producción de equilibrio en el duopolio.

El modelo de Cournot

Seguidamente expondremos el modelo de duopolio que expuso Cournot. En la medida de lo posible utilizaremos ejemplos numéricos para facilitar la comprensión. Un profesor, de cuyo nombre no quiero acordarme, partidario de largas y tediosas demostraciones que poco aportaban, manifestaba que el poner ejemplos era un acto de cobardía. Bueno, desde ya, reconozco mi cobardía.

Partimos de un supuesto de una empresa que, en principio, es ella la única que se encuentra en el mercado. Supondremos además la inexistencia de costes de producción, (esto no es tan irreal, si se supone que la mercancía es agua mineral y los compradores llevan sus propios envases, siendo por tanto el coste de producción para el empresario nulo). Con esta hipótesis igualaremos ingresos y beneficios. Esto no supone pérdida de generalidad, con costes de producción los resultados serían similares.

El número de unidades que una empresa puede vender a cada precio pueden representarse mediante una curva de demanda. Nosotros supondremos curvas de demanda rectilíneas, con lo que el nivel de ventas que maximiza las ganancias para cada empresa, operando en solitario, ocurre en su punto medio. En este ejemplo, en el punto $E(600, 6)$, donde la empresa primera vende 600 unidades al precio de 6. Como se observa, queda todavía un margen de 600 por vender de la producción máxima vendible del bien, cifrada en 1200 unidades (figura 4).

En este momento, llega al mercado otra empresa rival, que supone que la empresa inicial va a *mantener constante su nivel de producción* y, por tanto, se acomoda a esta realidad, explotando lo que le queda del mercado. La curva de demanda de D_2 esta segunda empresa será, pues, la de la primera empresa D_1 menos 600 unidades.

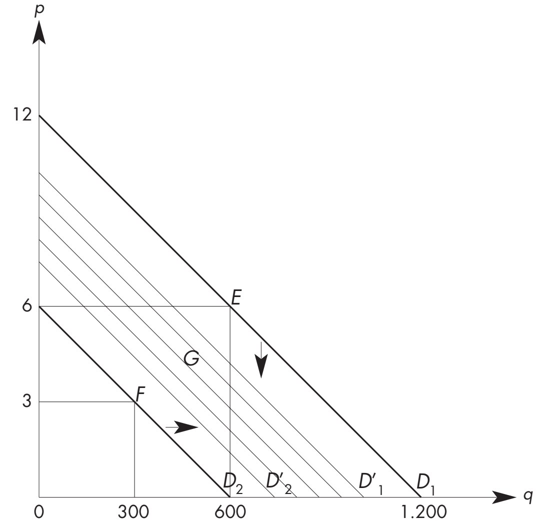


Figura 4

Partimos de un supuesto de una empresa que, en principio, es ella la única que se encuentra en el mercado. Supondremos además a inexistencia de costes de producción…

Esta segunda empresa maximiza sus ganancias sobre D_2, en el punto $F(300, 3)$, es decir, vendiendo 300 unidades al precio de 3.

La empresa inicial reacciona y supone que la producción de la segunda en llegar *permanecerá constante* en esas 300 unidades. La nueva curva de demanda para la primera empresa, D'_1, será la inicial menos 300 unidades y sobre ella maximizará sus ganancias.

De igual manera, la segunda empresa reacciona vendiendo su producción sobre lo que le queda de la demanda, moviéndose hacia la recta D'_2.

El supuesto de comportamiento básico que hace Cournot es que cada oferente, al tratar de maximizar su beneficio, o lo que es lo mismo, los ingresos totales, piensa que el otro oferente va a mantener constante su producción. Ante este supuesto, habrá una serie de movimientos y contramovimientos convergentes al punto G, llamado *punto de equilibrio de Cournot* o *punto de equilibrio de Nash*.

Cournot y, más tarde, el matemático norteamericano Nash, dirán que un duopolio se encuentra en equilibrio, si la producción óptima de cada empresa es aquella determinada a partir de una previsión de la producción de la empresa rival que asimismo es óptima. Si se mantienen los supuestos sobre las conductas de las empresas establecidos por Cournot, es evidente que en una situación de este tipo ninguna de las empresas deseará modificar su producción.

A título de anécdota, recordemos que a John Nash se le detectó, en sus primeros años en la universidad de Princeton, una esquizofrenia paranoide. Este hecho le impidió hasta 1994 recibir el premio Nobel de Economía, cuando contaba con 66 años y estaba totalmente recuperado.

¿Pero qué coordenadas tiene ese buscado punto *G*, punto de equilibrio de Cournot o de Nash, en el caso del duopolio? Hagamos el desarrollo de una manera general y después lo particularizaremos a este ejemplo concreto.

Supongamos que la función de demanda lineal es

$$p = A - aq \qquad [1]$$

Donde p y q son el precio y la cantidad demandada, respectivamente, y A y $a > 0$ son constantes.

Supongamos que q_1 y q_2 son las cantidades vendidas por las empresas 1 y 2, respectivamente. Por definición

$$q = q_1 + q_2 \qquad [2]$$

Sustituyendo en [1], la función de demanda queda como

$$p = A - a(q_1 + q_2) \qquad [3]$$

El ingreso total de la primera empresa I_1 es igual al precio p multiplicado por q_1, esto es,

$$I_1 = pq_1 = Aq_1 - aq_1^2 - aq_1q_2 \qquad [4]$$

Del mismo modo, el ingreso de la segunda empresa I_2 es igual a

$$I_2 = pq_2 = Aq_2 - aq_2^2 - aq_1q_2 \qquad [5]$$

Como hemos supuesto, al no existir costes de producción, esos ingresos coinciden con los respectivos beneficios de las empresas. Conseguiremos nuestro objetivo de encontrar las cantidades de equilibrio donde se produce el máximo beneficio de las dos empresas, resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas siguiente

...un duopolio se encuentra en equilibrio, si la producción óptima de cada empresa es aquella determinada a partir de una previsión de la producción de la empresa rival que asimismo es óptima.

$$\frac{\partial I_1}{\partial q_1} = A - 2aq_1 - aq_2 = 0 \qquad [6]$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial q_2} = A - 2aq_2 - aq_1 = 0 \qquad [7]$$

nos dan las cantidades de equilibrio

$$q_1 = q_2 = \frac{A}{3a} \qquad [8]$$

Podemos comprobar que efectivamente esos valores producen un beneficio máximo ya que se verifica que

$$\frac{\partial^2 I_1}{\partial^2 q_1^2} = -2a < 0 \qquad [9]$$

$$\frac{\partial^2 I_2}{\partial^2 q_2^2} = -2a < 0 \qquad [10]$$

El precio de equilibrio se consigue sustituyendo las cantidades de equilibrio [8] en [3]

$$p = \frac{A}{3} \qquad [11]$$

En nuestro ejemplo particular, como $A = 12$ y, $A/a = 1200$, las cantidades y precio de equilibrio son $q_1 = q_2 = 400$ y $p^* = 4$.

Lo que nos da un punto de equilibrio de Nash, $G = (400,4)$, con unos beneficios de 1600.

Este modelo permite ser generalizado para cualquier número de empresas vendedoras k:

a) Si $k = 1$, estaríamos ante un monopolio,

$$q = \frac{A}{2a}, \quad p = \frac{A}{2}$$

b) Si $k = 2$, estaríamos ante un duopolio, cuyas soluciones hemos visto que son

$$q_1 = q_2 = \frac{A}{3a}, \quad p = \frac{A}{3}$$

c) Si $k = 3$, de igual manera obtendríamos un sistema de tres ecuaciones, que resuelto nos daría

$$q_1 = q_2 = q_3 = \frac{A}{4a}, \quad p = \frac{A}{4}$$

d) Si $k = n$, obtendríamos por inducción que

$$q_k = \frac{A}{(n+1)a}, \quad p = \frac{A}{(n+1)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

e) Si $k \to \infty$, estaríamos ante el caso de una competencia perfecta y $p \to 0$.

El modelo de Edgeworth

Casi setenta años de la publicación del trabajo de Cournot, F. Y. Edgeworth aceptó la sugerencia que le había hecho el también matemático Joseph Bertrand (1822-1900) a Cournot. Si se desarrolla un modelo de duopolio en que en vez de mantener ambas empresas las cantidades producidas, se mantienen los precios de las mismas, los resultados del modelo no coincidirían con los de Cournot.

El modelo de Edgeworth se basa en los siguientes supuestos, más restrictivos que los de Cournot:

1. Hay dos empresas que producen un bien homogéneo con un costo de producción igual a cero.
2. Cada empresa tiene un límite en su capacidad productiva.
3. En su camino de maximización de beneficios, cada empresa cree que el precio de la otra permanecerá constante.

El resultado final será una oscilación continua del precio del artículo, entre el precio del monopolio y el máximo precio de producción de cada empresa (figura 5).

Veámoslo con los datos de nuestro ejemplo, siendo 500 la capacidad máxima de producción de cada empresa, ocurrirá el siguiente proceso:

1. La primera empresa maximiza sus beneficios vendiendo 300 unidades al precio de 3.
2. Entra la segunda empresa y piensa que si la primera *mantiene constante el precio* en 3, fijando ella un precio ligeramente inferior a 3 puede vender su producción máxima de 500, quedándose con la mayor parte del mercado de la primera.
3. A continuación, la empresa número uno reaccionará y suponiendo que la segunda va a *mantener constante su precio*, la primera podrá vender su producción total a un precio ligeramente inferior al de la segunda.
4. Este proceso continuará hasta que cada empresa venda su producción máxima, 500, al precio de 1.

Pero este resultado no es estable, ya que uno de ellos puede darse cuenta, que *manteniendo el otro el precio* en 1, él puede vender 300 unidades a un precio de 3, aumentando de esta forma sus beneficios. Ante esta situación la otra empresa reaccionará y el proceso continúa indefinidamente. Aunque el modelo de Edgeworth da lugar a una situación inestable, la fluctuación de precios tendrá un límite superior e inferior. Esta situación de «guerra de precios» es similar a la que se produce en la competencia perfecta.

Aunque el modelo de Edgeworth da lugar a una situación inestable, a fluctuación de precios tendrá un límite superior e inferior. Esta situación de «guerra de precios» es similar a la que se produce en la competencia perfecta.

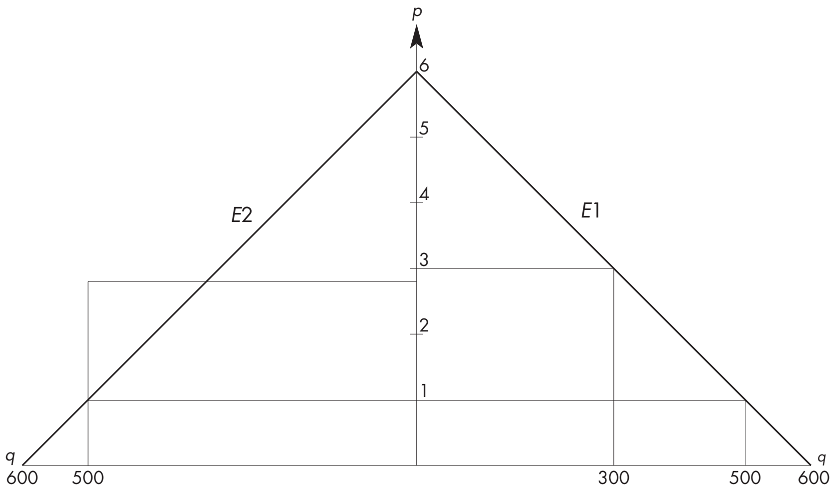


Figura 5

Por cierto que el estadístico y economista británico, Francis Ysidro Edgeworth, era hijo de madre española, (como se vislumbra en el segundo nombre que honra al patrono de Madrid). Nació el 8 de febrero de 1845, en el condado de Londford, en Irlanda.

En Estadística destacan sus contribuciones a los números índices, la teoría de la estimación, bondad de ajuste y teoría de la probabilidad. Se mostraba firmemente convencido de la prevalencia de la ley normal en la naturaleza, aunque hoy sepamos que la ley normal no es tan «normal» como él se pensaba. En 1892, publica un trabajo donde define el concepto de *correlación múltiple*.

En Economía, halló entre otros descubrimientos, las *curvas de indiferencia*, en las cuales aplicó los números índices. Las curvas de indiferencia se encuentran formadas por un conjunto infinito de puntos que reflejan combinaciones de bienes, los cuales poseen un mismo nivel de utilidad o de satisfacción para el consumidor.

También utilizó con eficacia el cálculo diferencial en Economía. Edgeworth fue profesor de Lógica y de Economía Política (lo que hoy sería Estadística), en el King's College, en la Universidad de Londres, y de Oxford, los años 1891-1921. También fue presidente de la Royal Statistical Society de 1912 a 1914.

Se cuenta que Edgeworth era una persona muy tímida y extremadamente roñosa, por no tener, no tenía ni libros, prefería conseguirlos en las bibliotecas públicas. Keynes refería que, unos folios y una goma, eran los dos únicos objetos personales que tenía.

Murió en Londres, el 13 de febrero de 1926.

Si cooperamos ganamos más

Tanto el modelo de Cournot como el de Edgeworth no admiten la interdependencia entre los duopolistas. El modelo del economista norteamericano E. D. Chamberlin es como el de Cournot pero en el que se admite la interdependencia entre las empresas (algo que desgraciadamente se asemeja más a la realidad), fijan así precios idénticos y venden cantidades idénticas, maximizando de esta forma su ganancia conjunta. El acuerdo puede hacerse sin que haya comunicación formal entre las empresas. La experiencia proporciona información con la que llegar a un acuerdo tácito. Eso sí, el resultado del acuerdo es una solución estable.

En nuestro ejemplo del modelo de Cournot (figura 4), una vez que la primera empresa maximiza sus beneficios vendiendo 600 unidades a 6 pesetas, obteniendo $600 \times 6 = 3600$ de beneficio y la segunda empresa vende 300 unidades a 3 pesetas, copando la demanda que la primitiva empresa le dejó, las empresas se dan cuenta de que en lugar de embarcarse en una carrera fratricida de precios y producción, les conviene *repartirse el pastel* de esas ganancias de 3600. Cada empresa producirá la mitad de esas 600 unidades, es decir, 300 unidades, a precio de monopolio 6, obteniendo un beneficio de $300 \times 6 = 1800$, mayor que los 1600 obtenidos en el modelo de Cournot anterior, siendo ese punto $G = (300, 6)$, el punto de equilibrio de Nash buscado. En resumen, el modelo de Chamberlin supone que los duopolistas aprenden con la experiencia, es decir, concluyen que será mejor a sus intereses si tratan de maximizar sus beneficios conjuntos.

La solución del modelo de Chamberlin es idéntica a la de monopolio ($k = 1$) de Cournot, pero donde las dos empresas deciden repartirse el beneficio del monopolio, teniendo la misma cuota de mercado a precio de monopolio, es decir,

$$q_1 = q_2 = \frac{A}{4a}, \quad p = \frac{A}{2}$$

…la Teoría de Juegos proporciona el marco adecuado para tratar rigurosamente este tipo de situaciones, aportando un conjunto de técnicas cuya finalidad última no es otra que obtener para el juego planteado una posible solución.

Todo es un juego

Ya dijimos que la característica fundamental del duopolio era la interdependencia estratégica entre las empresas, de forma que en la toma de decisiones, cada empresa consideraba explícitamente cierta conjetura sobre el comportamiento de las empresas rivales. Veremos, en esta sección, que la Teoría de Juegos proporciona el marco adecuado para tratar rigurosamente este tipo de situaciones, aportando un conjunto de técnicas cuya finalidad última no es otra que obtener para el juego planteado una posible solución.

Nos centraremos en dos empresas que han de elegir entre un conjunto de estrategias finito. En concreto supongamos que la interdependencia se establece entre CEPSA y REPSOL y las estrategias son dos niveles de precios: 150 pts. o 140 pts. La interdependencia entre las empresas se manifiesta en que el beneficio que obtiene una empresa seleccionando una determinada estrategia depende de cual sea la estrategia elegida por la empresa rival. La representación conjunta de todas las posibles combinaciones de estrategias, así como los resultados que de ellas se derivan para ambas empresas se denomina matriz de pagos.

Un ejemplo de matriz de pagos se presenta en la siguiente tabla:

		REPSOL	
		150 pts.	140 pts.
CEPSA	150 pts.	(60, 40)	(20, 20)
	140 pts.	(20, 30)	(10, 10)

Las cifras que aparecen en cada una de las casillas representan, para cada combinación de estrategias, los resultados de la empresa CEPSA y REPSOL respectivamente.

Nuestro objetivo sería encontrar aquella combinación de estrategias que constituye una solución del juego, en el sentido de que las decisiones de ambas empresas sean compatibles y, por tanto, no desean modificarlas. Si obviamente la empresa elige la estrategia que le reporte mayor beneficio, dada la matriz de pagos anterior, la empresa CEPSA elegirá el nivel de precios 150 cualquiera que sea el nivel de precios elegido por REPSOL, ya que los posibles resultados, 60 y 20, serían mayores que los del nivel de precios a 140 pts., 20 y 10; por otra parte, la empresa REPSOL también elegirá como nivel de precios 150 pts. ya que los resultados, 40 y 30, superan a los del otro, 20 y 10.

Por tanto, las estrategias 150 pts. para CEPSA y 150 pts. para REPSOL, son *estrategias dominantes*, ya que serán seleccionadas por las respectivas empresas independientemente de cual sea la estrategia de la empresa rival. Así pues, la solución a este juego vendrá dada por la combinación de estrategias dominantes (150, 150).

Algunas veces no es posible encontrar una solución del juego que satisfaga el criterio de estrategias dominantes, tal como ocurre en la siguiente matriz de pagos:

		REPSOL	
		150 pts.	140 pts.
CEPSA	150 pts.	(60, 40)	(20, 20)
	140 pts.	(20, 30)	(40, 50)

En este caso, la combinación de estrategias, o el punto (150, 150), es el punto de equilibrio de Nash, definido como la combinación de estrategias tal que la estrategia de cada empresa es la mejor que puede elegir, dada la que elige la otra. En la matriz anterior, la estrategia 150 es la mejor que puede seleccionar CEPSA, cuando REPSOL prevé que elegirá también como nivel de precios 150 pts. Al mismo tiempo, dicha estrategia también es óptima para REPSOL, si espera que CEPSA elija 150 pts. como nivel de precios. Así pues, el punto (150, 150) es un punto de equilibrio de Nash, ya que si se alcanza, ninguna empresa querrá modificar su comportamiento. Cuando una empresa tiene una estrategia dominante, el resultado es un punto de equilibrio de Nash. Pero al revés puede no darse, como acabamos de ver.

Como hemos visto ya, si ambas empresas deciden establecer un acuerdo de cooperación, un punto de equilibrio de Nash puede no constituir una solución eficiente del juego.

En la siguiente matriz de pagos podemos ver que el punto (150, 150) es un punto de equilibrio de Nash y, sin embargo, si ambos llegaran al acuerdo de cooperar con objeto de alcanzar la combinación (140, 140), los beneficios de ambas empresas mejorarían.

		REPSOL	
		150 pts.	140 pts.
CEPSA	150 ptas.	(50, 40)	(70, 10)
	140 pts.	(10, 70)	(60, 50)

Se trataría de un ejemplo de una situación intrínsecamente inestable, ya que cualquiera de las dos empresas tendría la tentación de romper el acuerdo, CEPSA eligiendo el nivel de producción 150 y REPSOL lo mismo. Esta situación inestable se corresponde con lo que se denomina un *cártel*, es decir, un conjunto de empresas que optan por hacer explícito un acuerdo con objeto de actuar conjuntamente como un monopolio frente a las demandas del mercado.

Obviamente, las situaciones reales de los oligopolios son más complicadas que las que aquí hemos mostrado. No olvidemos que lo que aquí hemos expuesto son modelos, es decir, representaciones simplificadas de la realidad, pero como unas primeras aproximaciones no dejan de ser válidas.

…lo que aquí hemos expuesto son modelos, es decir, representaciones simplificadas de la realidad, pero como unas primeras aproximaciones no dejan de ser válidas.

Conclusiones

Llegada la hora de hacer balance, se puede decir que con este artículo hemos pretendido:

a) Acercar a nuestras clases un asunto de actualidad, los oligopolios, y analizar el trasfondo matemático de los comportamientos de los mismos, utilizando como recurso cualquier recorte de prensa relacionado con el tema.

b) Introducir una parte de la Estadística, la Teoría de Juegos, poco frecuente en nuestro currículo, pero que capta rápidamente la atención del alumnado, por la diversidad de ejemplos y la sencillez de sus enunciados.

c) Conmemorar este año 2001, el 200 aniversario del nacimiento de un matemático insigne, Antoine Augustin Cournot. Mostrar los protagonistas de la Historia de la Matemática a través de su obra, vida y anécdotas es siempre, para alumnos y profesores, atrayente y gratificante.

Por cierto, el doloroso enfado del principio que motivó este trabajo, ha desaparecido. El conocimiento de las reglas que rigen el mercado y me atrevo a decir que de cualquier problema, ha actuado como un buen medicamento genérico. Bueno, quizás cuando vuelva a llenar el depósito…

Gabriel Ruiz
Escuela Universitaria
de Estudios Empresariales.
Universida de Cádiz.
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
«Thales»

Bibliografía

COURNOT, A. A. (1838): *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, Libraire de L. Hachette, París.

COURNOT, A. A. (1841): *Traité Élémentaire de la Théorie des Fonctions et du Calcul Infinitésimal, tomos I y II*, Libraire de L. Hachette, París.

COURNOT, A. A. (1843): *Exposition de la Théorie des Chances et des Probabilités*, Libraire de L. Hachette, París.

MOCHÓN, F. y A. PAJUELO (1991): *Microeconomía*, McGraw-Hill, Madrid.

STIGLER, S. M. (1978): «Francis Ysidro Edgeworth, Statistician», *Journal Royal Statistical Society*, serie A, Parte 3, 287-322.