SUMA 37
junio 2001, pp. 75-82

Los espacios vectoriales, el amarillo, el rojo y el azul

Miguel Ángel Moreno Redondo

El objetivo de este artículo será el de facilitar a los alumnos la comprensión y memorización del tema de los espacios vectoriales mediante una bella analogía existente a nuestro alrededor. Para tal fin haremos uso de los colores y de la mezcla de sus pigmentos. Aclararemos conceptos como el de combinación lineal de vectores (*mezcla de colores*), el de dependencia e independencia lineal, el de sistema *generador* (*conjunto de colores con los que se puede pintar un cuadro*), el de base (*en el cuadro* Guernica *de Picasso, la base estaría formado por el blanco y el negro*) y el de dimensión (*la dimensión del* Guernica *sería 2, la de* Las meninas *de Velázquez sería 3*)

ARTÍCULOS

ES JUSTO RECONOCER que el desencanto y la desesperación se apoderaron de nosotros cuando en época estudiantil, hicimos por primera vez una aproximación al tema de los espacios vectoriales, a sus definiciones con aparente significado estéril y a teoremas cuyas demostraciones exigen una técnica y un rigor matemático que en ese momento no teníamos asentado. Transcurridos unos años, nos convertimos en profesores y ayudados por la seguridad que proporciona el haber resuelto gran cantidad de problemas que tratan esta estructura algebraica, disfrutamos sin lugar a dudas de la elegante formalidad matemática con la que impartimos este tema. Hoy por hoy, haciendo uso del lugar privilegiado en el que nos encontramos (pues fuimos cocineros antes que frailes), no nos equivocaremos si decimos que el tema que nos ocupa exige enriquecer el proceso de enseñanza de los alumnos, y nuestra labor como docente no puede ser otra que la de intentar dar respuesta a las preguntas que formulamos a continuación:

¿Cómo ayudar al alumno a comprender y a memorizar tanta cantidad de información? ¿Hay alguna manera de facilitar esta tarea? ¿Qué posibles analogías con los espacios vectoriales existen a nuestro alrededor?

El objetivo del presente artículo será el de facilitar a los alumnos la comprensión y la memorización de conceptos y resultados de los espacios vectoriales mediante una analogía existente a nuestro alrededor. Para obtener tal fin haremos uso de los colores y de la mezcla de sus pigmentos.

Definiciones y teoremas

Antes de desarrollar con mayor profundidad este artículo convendría enunciar las definiciones y resultados sobre espacios vectoriales que trataremos posteriormente, sobre todo, los referentes a combinación lineal, a sistemas linealmente dependientes, sistema generador, base, etc.

Por otra parte, no será necesario seguir leyendo el contenido de este apartado (pudiendo pasar directamente al epígrafe *Planteamiento*), si se encuentra en alguna de estas dos situaciones:

i. Los conceptos y resultados indicados anteriormente son de dominio del lector.

ii. Los conceptos y resultados son totalmente nuevos para el lector (más tarde, al finalizar de leer el artículo, podrá entenderlos con mayor facilidad).

Combinación lineal

Se dice que un vector v es combinación lineal de los vectores $e_1, e_2, ..., e_n$ si existen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ del cuerpo K, tales que $v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$.

Linealmente independientes

Se dice que los vectores $e_1, e_2, ..., e_n$ son linealmente independientes o bien que el sistema de vectores $S = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ es libre si la igualdad $0 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$ sólo se satisface cuando $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Linealmente dependientes

Se dice que los vectores $e_1, e_2, ..., e_n$ son linealmente dependientes si no son linealmente independientes.

Generador

Decimos que un sistema de vectores $S = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ es un sistema generador del espacio vectorial E si todo vector v de E se puede escribir como combinación lineal de los vectores de S.

Base

Decimos que un sistema de vectores $S = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ es una base del espacio vectorial E si los vectores de S son linealmente independientes y generadores de E.

Dimensión

Decimos que un espacio vectorial tiene dimensión n si n es el número de vectores de una cualquiera de sus bases.

Teorema

Sea S un sistema de vectores. Los vectores de S son linealmente dependientes si, y sólo si, existe un vector de S que es combinación lineal de los demás.

Planteamiento

Como sabemos, el amplio espectro de colores que nuestra retina puede llegar a recibir, varía desde el amarillo, el azul, el rosa, el violeta y decenas de colores y tonalidades distintas, que por raro que parezca, se pueden obtener a partir de los pigmentos de los tres colores primarios: amarillo, azul y rojo. A título de ejemplo sirva que el color verde se obtiene mezclando el amarillo y el azul, el naranja mezclando el rojo y el amarillo, etc. Por otra parte, si sólo utilizamos los colores blanco y negro, podremos obtener todas las tonalidades posibles de grises, además de las dos siguientes obviedades: el blanco lo podemos obtener a partir del blanco, y el negro a partir del negro.

Entendido el párrafo anterior no resulta difícil comprender, que al genial pintor sevillano Velázquez le habrían bastado los tres colores primarios para obtener todos los colores del cuadro *Las meninas* y que sin uno solo de ellos le habría sido totalmente imposible. Por otra parte, y como un ejercicio propuesto a la intuición, plantearemos la siguiente pregunta: ¿qué dos colores le habrían bastado a Picasso para pintar el *Guernica*?

Utilizaremos el conjunto de los colores, para facilitar a los alumnos el aprendizaje de conceptos como combinación lineal, sistemas linealmente dependiente e independiente, sistema generador, base y dimensión de un espacio vectorial.

Utilizaremos el conjunto de los colores, para facilitar a los alumnos el aprendizaje de conceptos como combinación lineal, sistemas linealmente dependiente e independiente, sistema generador, base y dimensión de un espacio vectorial.

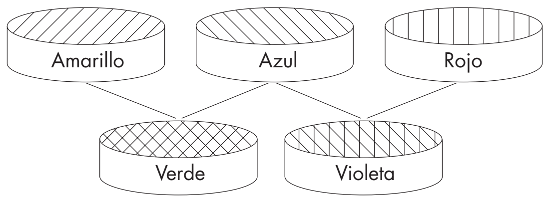


Figura 1. Los colores primarios amarillo, azul y rojo, nos proporcionan entre otros el verde y el violeta, tras la mezcla de sus pigmentos

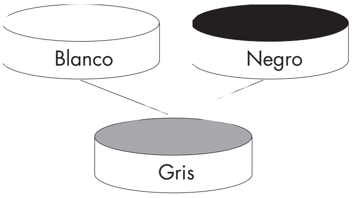


Figura 2. Los colores blanco y negro nos proporcionan una amplia gama de grises, entre ellos el gris claro (calificativo que alcanza al mezclarse en mayor proporción el blanco respecto al negro)

La interpretación que haremos será la de establecer una relación biunívoca entre los elementos vector y color, y la que resulta aún más interesante: la existente entre combinación lineal y mezcla de colores. Una vez establecidas estas identificaciones, volveremos a escribir en términos de colores los distintos enunciados que acostumbramos a utilizar. Por último, y sin lugar a dudas, principal atracción del artículo, veremos una lista de trece ejemplos que plasman la utilidad de este nuevo enfoque.

Analogías

A continuación presentamos el siguiente cuadro de equivalencias:

Terminología formal	*Terminología informal*
Espacio vectorial	Cuadro
E	Las meninas
V	El Guernica
Vector	Color
Vectores	Colores
Combinación lineal	Mezcla

Como podemos observar todo término de la columna de la izquierda tiene su respectivo término en la columna de la derecha, al que podríamos llamar además de término informal, término dual. Cada término dual gozará de total significado en la construcción de los enunciados que más tarde veremos. Sirvan como aperitivo las siguientes observaciones:

La interpretación que haremos será la de establecer una relación biunívoca entre los elementos vector y color, y la que resulta aún más interesante: la existente entre combinación lineal y mezcla de colores.

- Al igual que un vector forma parte de la estructura de espacio vectorial, un color formará parte del espectro de colores que baña cuanto nos rodea.
- No hay que sorprenderse tampoco de la analogía entre *E* y el cuadro de Velázquez *Las meninas* o entre *V* y el *Guernica*, pues al igual que la combinación lineal de las sucesivas potencias de x nos proporciona el conocido espacio vectorial de los polinomios, la mezcla de colores nos ofrece la maravillosa posibilidad de pintar *Las meninas*.
- Por último, sería conveniente recordar que mientras *Las meninas* fue pintado con una amplia gama de colores, Picasso utilizó en el *Guernica* el blanco, el negro y distintas tonalidades de grises.

Figura 3. *Las meninas*, cuadro pintado por D. Velázquez en 1656. Los colores que lo componen son el amarillo, el azul y el rojo, además de una amplia gama de colores

Dualidades

Cada enunciado de los que a continuación se presentan expresados de una manera formal en términos de espacios vectoriales, aparece con su respectivo enunciado expresado en términos de colores. Si bien el primero, a cualquier iniciado en el tema le resultará algo confuso, el segundo lo percibirá de una forma nítida y clara.

Teorema 1. Sistema linealmente dependiente

- Dado un sistema de vectores *S*, decimos que los vectores de *S* son *linealmente dependientes* si, y sólo si, existe un vector de *S*, que es combinación lineal de los demás.

- Dado un sistema de colores *S*, decimos que los colores de *S* son *linealmente dependientes* si, y sólo si, existe un color de *S* que es mezcla de los demás.

Teorema 2. Sistema linealmente independiente

- Sea *S* un sistema de vectores. Los vectores de *S* son *linealmente independientes* si, y sólo si, ningún vector de *S* es combinación lineal de los demás.
- Sea *S* un sistema de colores. Los colores de *S* son *linealmente independientes* si, y sólo si, ningún color de *S* es mezcla de los demás.

Definición. Sistema generador

- Decimos que *S* es un *sistema* de vectores *generador* del espacio vectorial *E* si todo vector de *E* es combinación lineal de los vectores de *S*.
- Decimos que *S* es un *sistema* de colores *generador* del cuadro *Las meninas* si todo color de *Las meninas* es mezcla de los colores de *S*.

Definición. Base

- Decimos que *S* es una *base* de vectores del espacio vectorial *E* si los vectores de *S* son linealmente independientes y generadores del espacio vectorial *E*.
- Decimos que *S* es una *base* de colores del cuadro *Las meninas* si los colores de *S* son linealmente independientes y generadores del cuadro *Las meninas*.

Definición. Dimensión

- Decimos que un espacio vectorial tiene *dimensión n* si *n* es el número de vectores de una cualquiera de sus bases.
- Decimos que un cuadro tiene *dimensión n* si *n* es el número de colores de una cualquiera de sus bases

No nos costaría imaginar, lo que podría llegar a ser la interpretación de combinación lineal. La expresión $v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$ con $\lambda_i \geq 0$ puede significar que los colores $e_1, e_2, ..., e_n$ deben mezclarse en cantidades $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ respectivamente para obtener el color v. En particular, veamos cómo podemos obtener algunos colores:

- El verde se podría obtener mezclando 1 parte de amarillo y 1 parte de azul.
- El verde muy oscuro se podría obtener mezclando 1 parte de amarillo y 3 partes de azul.
- El gris claro se podría obtener mezclando 3 partes de blanco y 1 parte de negro.

Los colores blanco y negro son un sistema generador del cuadro Guernica*, ya que con esos dos colores se pueden obtener todas las tonalidades posibles de grises, blanco y negro para poder pintarlo.*

Ejemplos

A continuación señalaremos una serie de ejemplos que por una parte, gozarán de significado gramatical propio, y que por otra, sumergidos en el contexto de los espacios vectoriales, aclarará a los alumnos los conceptos matemáticos del apartado anterior.

Ejemplo 1

Los colores blanco y negro son un sistema generador del cuadro *Guernica*, ya que con esos dos colores se pueden obtener todas las tonalidades posibles de grises, blanco y negro para poder pintarlo.

Ejemplo 2

Los colores blanco y negro son independientes, ya que el blanco no se puede obtener a partir del negro y viceversa (teorema 2).

Ejemplo 3

Los colores blanco y negro son base de los colores que se utilizan para pintar el *Guernica*, pues cualquier color del cuadro se puede obtener como mezcla del blanco y el negro (colores generadores) y además, ninguno de ellos dos se puede obtener a partir del otro (teorema 2, independencia). Por tanto: ni faltan, ni sobran.

Ejemplo 4

El amarillo y el azul son colores linealmente independientes, pues ni el amarillo se puede obtener a partir del azul, ni el azul a partir del amarillo.

Ejemplo 5

El amarillo, el azul y el verde no son colores linealmente independientes, pues el verde se obtiene mezclando el amarillo y el azul (el verde es combinación lineal del amarillo y el azul).

Ejemplo 6

El amarillo, el azul y el rojo son linealmente independientes pues ninguno de ellos se puede obtener a partir de los demás.

Figura 4. Guernica, cuadro pintado por P. Picasso en 1937. Los colores que lo componen son el blanco, el negro y distintas tonalidades de grises

Ejemplo 7

El amarillo, el azul, el rojo y el verde es un sistema linealmente dependiente pues, en particular, el verde se puede obtener a partir del verde o bien del amarillo y el azul (como vemos, no hay unicidad de coordenadas).

Ejemplo 8

El amarillo, el azul y el rojo (colores primarios), forman un sistema generador de los colores del cuadro *Las meninas*, pues cualquier color se puede obtener mezclando debidamente estos tres (combinación lineal).

Ejemplo 9

El amarillo y el azul no forman un sistema generador de los colores del cuadro *Las meninas*, pues en particular el rojo, no se puede obtener mezclando estos dos.

Ejemplo 10

El amarillo, el azul, el rojo y el verde forman un sistema generador de los colores del cuadro *Las meninas*, pues cualquier color se puede obtener mezclando debidamente estos cuatro y en particular los tres primeros (combinación lineal).

Ejemplo 11

El amarillo, el azul y el rojo forman una base de los colores del cuadro *Las meninas*, ya que son linealmente independientes y además generadores (ejemplos 6 y 8).

El cuadro Las meninas *tiene dimensión 3, ya que 3 es el número de colores de la base formada por los colores amarillo, azul y rojo*

El cuadro Guernica *tiene dimensión 2, ya que 2 son los colores de la base formada por los colores blanco y negro*

Ejemplo 12

El cuadro *Las meninas* tiene dimensión 3, ya que 3 es el número de colores de la base formada por los colores amarillo, azul y rojo (ejemplo 11).

Ejemplo 13

El cuadro *Guernica* tiene dimensión 2, ya que 2 son los colores de la base formada por los colores blanco y negro (ejemplo 3).

Justificaciones epistemológicas

Entre las dificultades epistemológicas que los alumnos encuentran a la hora de enfrentarse al aprendizaje de los espacios vectoriales, podríamos destacar las siguientes:

i. En primer lugar el alumno ha de ser receptor de un mar de nuevas definiciones sin aparente significado, de proposiciones o teoremas incomprensibles, y de conjuntos que en su vida ha oído nombrar.

ii. En segundo lugar, sabemos que hasta este preciso momento, todo lo enseñado tiene en mayor o menor medida, un nexo con la vida cotidiana, un ejemplito que por pequeño que parezca, deja en evidencia la utilidad de ese tema matemático impartido. Por desgracia, los ejemplos útiles sobre espacios vectoriales como sistemas de ecuaciones, aplicaciones al espacio afín y euclídeo, etc., no aparecen hasta haber avanzado considerablemente en la asignatura, sufriendo el riesgo de perder totalmente el interés y la dedicación del alumnado.

iii. En tercero y último, cabe citar el carácter formal y deductivo, que forzosamente se hace necesario si queremos estudiar los espacios vectoriales a fondo y no simplemente sus útiles propiedades. Pero, ¿significa esto que es necesario renunciar a la cita tomada de Kant que promulga que todo conocimiento humano comienza por intuiciones, pasa por los conceptos y termina en las ideas? (Boyer, 1986).

Éstas, y otras que probablemente bailarán en nuestro subconsciente, se erigen como motivos suficientes para adoptar o al menos tener en cuenta la presente propuesta metodológica en la articulación del proceso de enseñanza.

Por otra parte, no se pretende que esta forma de interpretar los espacios vectoriales se haga al pie de la letra: jamás podríamos establecer una dualidad válida entre éstos y los colores de una forma totalmente matemática. El artículo sólo busca atravesar el primer umbral didácticamente hablando, es decir, facilitar la comprensión y memorización de los conceptos matemáticos relativos al tema.

Justificación curricular

En nuestro actual sistema educativo, la explicación con profundidad de los espacios vectoriales, sólo tiene cabida en las licenciaturas de ciencias y en los primeros cursos de las carreras técnicas, siendo excluida de la asignatura de Matemáticas en las modalidades de Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y de Tecnología, desapareciendo por tanto todo planteamiento formal en beneficio de su instrumentalidad y aplicabilidad. Pero según Brihuega (1997) «la adquisición de los conocimientos matemáticos en esta etapa no puede reducirse a la posesión de sus resultados finales, también debe estar siempre presente el saber hacer matemáticas que va a permitir su aplicabilidad en las distintas situaciones a las que los estudiantes de Bachillerato se tendrán que enfrentar en su futuro profesional». Si estamos de acuerdo con este autor no podemos quedarnos impasibles, en caso de que la desaparición del currículo de esta formalidad matemática haya sido debida a una incorrecta o incompleta práctica pedagógica, buscando incansablemente nuevas líneas metodológicas que enriquezcan el proceso de enseñanza.

En definitiva, este artículo persigue facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje bien sea en el ámbito universitario como en un hipotético resurgimiento en la educación secundaria de los espacios vectoriales.

Justificación metodológica

En el preciso instante en el que enseñamos a los alumnos el tema de los espacios vectoriales, éstos han alcanzado según Inhelder y Piaget (1955), la madurez en el estadio de las operaciones formales. Pero al alumno, a pesar de ser dueño de las enormes posibilidades que ofrece este nivel cognitivo, se le hace sumamente difícil incorporar a su esquema mental los conceptos y resultados de este tema, exigiendo por tanto de los docentes una solución a este problema.

…al alumno se le hace sumamente difícil incorporar a su esquema mental los conceptos y resultados de este tema, exigiendo por tanto de los docentes una solución a este problema.

La analogía que establecemos en este artículo, servirá de puente para facilitar a los alumnos el estudio de este tema. Ésta deberá apoyarse necesariamente en una serie de conocimientos previos como son los colores y la mezcla de sus pigmentos, y de esta forma, la enseñanza de los espacios vectoriales deja de ser un salto al vacío, para convertirse en un aprendizaje significativo. El camino que se propone seguir podría ser el siguiente:

i. Enseñar definiciones y resultados elementales sobre espacios vectoriales.
ii. Si la enseñanza ha derivado en aprendizaje (mi experiencia me inclina a pensar que nunca ocurre en una primera instancia), hemos concluido con éxito.
iii. Evaluar los conocimientos previos que el alumno posee en cuanto a colores, mezcla de sus pigmentos, etc. Si la evaluación es negativa, recordárselos en breves minutos.
iv. Explicar la analogía (5 minutos).
v. Hacer uso de los ejemplos (10 minutos).

El tiempo que se invierte en desarrollar los puntos *iii*, *iv* y *v* con los alumnos, tiene sobrada justificación si se tiene en cuenta que no más de quince minutos bastan para fijar los pilares de este tema.

Observaciones pedagógicas

La experiencia en clase y unas encuestas evaluadoras de este proceso de enseñanza-aprendizaje efectuadas a alumnos de COU y de la carrera de Ingeniería Industrial, permitieron llegar a las siguientes conclusiones:

- Ayudados por una parte de la enorme intuición que poseen los alumnos, y por otra, de la enorme curiosidad que despiertan temas tan dispares entre sí como los espacios vectoriales y los colores, resulta gratificante ver como en segundos establecen el paralelismo entre ambas ideas. Sobre todo, cuando un mundo nuevo escrito en términos matemáticos, cambia su fisonomía, se viste de color y algo tan abstracto como la definición de base de un espacio vectorial, se reduce simplemente a responder a la pregunta: ¿Cuántos colores necesitamos, sin que sobre alguno, para pintar un cuadro?

- Resulta innecesario, aunque sí conveniente, explicar a los alumnos el conjunto de dualidades del epígrafe *Dualidades*, para llegar a comprender los ejemplos.
- La motivación vuelve a aflorar en el alumnado cuando logran superar los momentos de incertidumbre o confusión, usando esta forma de enfocar los espacios vectoriales.
- Los alumnos utilizan los ejemplos como un apoyo para el entendimiento de los distintos conceptos matemáticos, y en ningún caso esta técnica les aleja de la rigurosidad matemática que el tema exige.
- Parece pertinente que este enfoque se transmita una vez explicadas todas las definiciones y teoremas en términos matemáticos, pues en caso contrario y sólo a corto plazo, corremos el riesgo de que los alumnos reduzcan el conjunto de los distintos espacios vectoriales, reduciéndolos a conjuntos visibles o tangibles (curioso ¿verdad?: lo visible o tangible es irreal, y lo invisible o intangible real).
- La utilización de esta línea metodológica, resulta aconsejable sobre todo en aquellos alumnos con dificultades para la abstracción y la memorización de conceptos.

Miguel Ángel Moreno
IES Virgen de Soterraño.
Barcarrota (Badajoz).
Sociedad Extremeña de
Educación Matemática
«Ventura Reyes Prósper»

Bibliografía

BOYER, C. B. (1986): *Historia de la matemática*, Alianza Universidad Textos, Madrid.

BRIHUEGA, J. (1997): «Las matemáticas en el Bachillerato», *Suma*, n.° 25, 113-122.

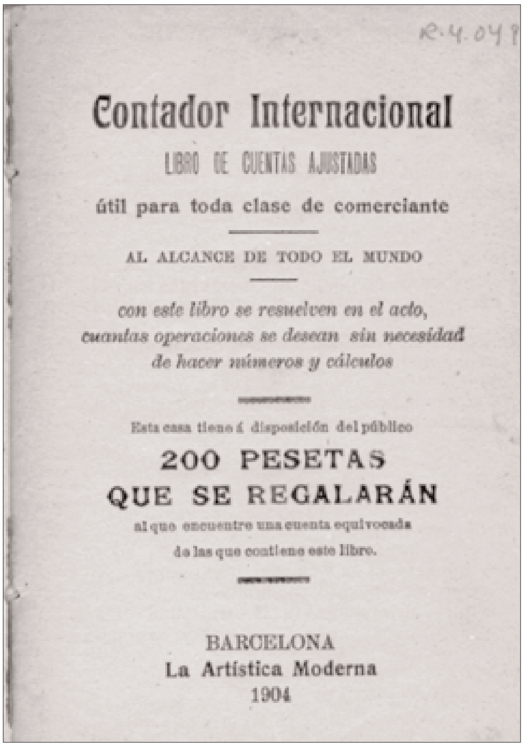
GARCÍA, J. y M. LÓPEZ (1992): *Álgebra lineal y geometría*, Marfil, Alcoy.

GASCÓN, J. (1997): «Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad», *Suma*, n.° 26, 11-21.

INHELDER, B. y J. PIAGET (1955): *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*, Paidós, Buenos Aires

KLINE, M. (1973): *El fracaso de la matemática moderna*, Siglo veintiuno, Madrid.

TRIANES, M. y J. GALLARDO (1998): *Psicología de la educación y del desarrollo*, Pirámide, Madrid.



R.4.047

Contador Internacional

LIBRO DE CUENTAS AJUSTADAS

útil para toda clase de comerciante

AL ALCANCE DE TODO EL MUNDO

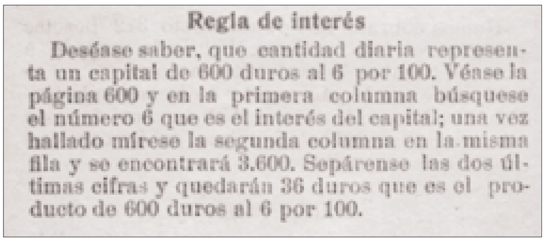
con este libro se resuelven en el acto, cuantas operaciones se desean sin necesidad de hacer números y cálculos

Esta casa tiene á disposición del público

200 PESETAS
QUE SE REGALARÁN

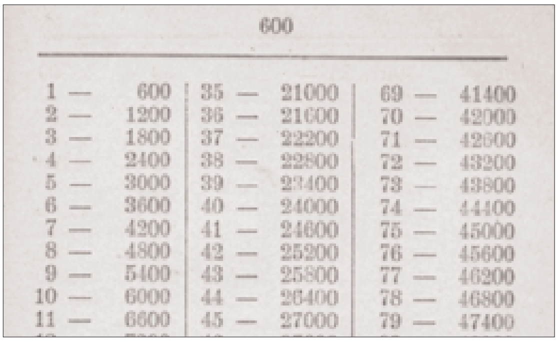
al que encuentre una cuenta equivocada de las que contiene este libro.

BARCELONA
La Artística Moderna
1904



Regla de interés

Deséase saber, que cantidad diaria representa un capital de 600 duros al 6 por 100. Véase la página 600 y en la primera columna búsquese el número 6 que es el interés del capital; una vez hallado mírese la segunda columna en la misma fila y se encontrará 3.600. Sepárense las dos últimas cifras y quedarán 36 duros que es el producto de 600 duros al 6 por 100.



600

1	—	600	35	—	21000	69	—	41400
2	—	1200	36	—	21600	70	—	42000
3	—	1800	37	—	22200	71	—	42600
4	—	2400	38	—	22800	72	—	43200
5	—	3000	39	—	23400	73	—	43800
6	—	3600	40	—	24000	74	—	44400
7	—	4200	41	—	24600	75	—	45000
8	—	4800	42	—	25200	76	—	45600
9	—	5400	43	—	25800	77	—	46200
10	—	6000	44	—	26400	78	—	46800
11	—	6600	45	—	27000	79	—	47400