SUMA 37
junio 2001, pp. 67-74

Sobre la utilidad de la Geometría en la enseñanza de la Probabilidad

Gabriel Ruiz Garzón

¿POR QUÉ CUANDO SE EXPLICA un concepto matemático no se aprovecha todo el bagaje de conocimientos que atesoran nuestros alumnos? ¿Por qué cuando se explica el concepto de probabilidad se prescinde de conceptos como el de área o el de longitud? ¿Por qué prescindir de la Geometría cuando el alumno comienza a tomar contacto con el azar?

El objetivo de este artículo es cocienciarnos de la importancia de aprovechar los conocimientos de Geometría que poseen nuestros alumnos, para explicar el concepto de probabilidad.

Desde la Antigüedad, la Geometría ha sido considerada como la personificación de la Matemática por antonomasia. La perfección y la belleza de las demostraciones geométricas es tal que algunos autores despachaban con un simple: ¡Mira!, la demostración de un teorema matemático, a la vista de su construcción gráfica. Descartes y Fermat, en los siglos XVI y XVII sintetizaron Geometría y Álgebra, identificando «puntos» con pares de números reales y «rectas» con ecuaciones lineales. Nosotros queremos demostrar lo beneficioso que desde un punto didáctico puede ser la unión de la Geometría y la Probabilidad.

Cuando se tira un dado, todo el mundo sabe que hay 6 resultados posibles y por tanto la probabilidad de obtener un 2 es 1/6. Pero, qué probabilidad hay tras, por ejemplo, estos problemas:

El objetivo de este artículo es concienciarnos de la importancia de aprovechar los conocimientos de Geometría que poseen nuestros alumnos para explicar el concepto de probabilidad. Queremos demostrar lo beneficioso que, desde un punto de vista didáctico, puede ser la unión de la Geometría y la Probabilidad

Problema 1

Consideremos el experimento consistente en elegir al azar un punto perteneciente al cuadrado de lado R. Calcular la probabilidad de que un punto elegido al azar en ese cuadrado, pertenezca al círculo inscrito en dicho cuadrado.

ARTÍCULOS

> **Problema 2**
>
> Supongamos un intervalo *AB* dividido en tres partes por dos puntos X_1, X_2 cogidos al azar. Calcular la probabilidad de construir un triángulo con los subintervalos como lados.

En los juegos de azar discretos podemos «contar» los casos favorables y los posibles, como en los problemas de dados y monedas. En los problemas geométricos, cuando el número de casos posibles y favorables es infinito, no podemos contar sino que tenemos que «medir» dichos casos. La diferencia entre «contar» y «medir» distinguen la Aritmética de la Geometría. Con este trabajo, queremos reivindicar también la Geometría, como un arma eficaz para iniciar al alumno en el peregrinaje por el azar.

En nuestro viaje también nos acompañan las palabras del profesor Santaló, quien se expresaba así:

> Creo que la Geometría es un puente entre el mundo real y el mundo de las ideas, y que como tal, debe jugar un papel esencial en todo el aprendizaje de las Matemáticas.

Ciertas utilidades

Didácticamente, a veces interesa que los primeros problemas que se planteen al alumno que se inicia en la Probabilidad tengan que ver con la Geometría, por la simplicidad con la que se hallan los resultados. Así en el problema 1, si elegimos como medida de probabilidad el área, según la figura 1, tenemos que, calculada como cociente de casos favorables entre casos posibles, la probabilidad pedida es:

$$p = \frac{\text{Área del círculo}}{\text{Área del cuadrado}} = \frac{\pi (R/2)^2}{R^2} = \frac{\pi}{4}$$

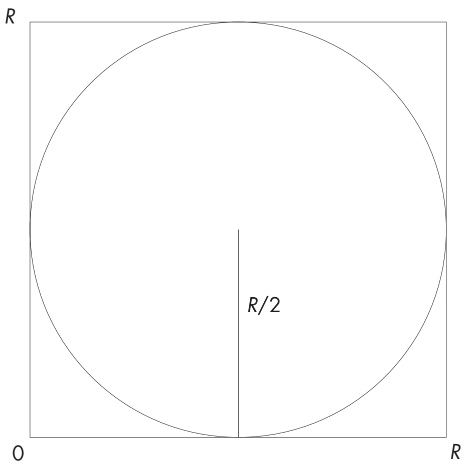

Figura 1

La diferencia entre «contar» y «medir» distinguen la Aritmética de la Geometría.

Otras veces, como en el problema 2, la tarea, amén de sencilla, goza de la belleza que sólo la Geometría posee. Nos basaremos en la figura 2, donde cogeremos como variables $x_1 = AX_1$ y $x_2 = AX_2$. El dominio de todas las posibles posiciones de los puntos x_1 y x_2, es el cuadrado cuyo lado *AB*, es igual a *l*. Para ver el dominio de los casos favorables, es decir, para que los subintervalos AX_1, X_1X_2 y X_2B formen un triángulo, tiene que ocurrir que:

a) Si X_1 precede a X_2, debe pasar que:
   - $x_2 - x_1 < x_1 + l - x_2$, es decir $x_2 - x_1 < l/2$
   - $x_1 < x_2 - x_1 + l - x_2$, es decir $x_1 < l/2$
   - $l - x_2 < x_2 - x_1 + x_1$, es decir $x_2 > l/2$

   lo cual significa que x_1, x_2 pertenecen al triángulo *OPN*, cuya definición es obvia si *L*, *M*, *N* y *P* son los puntos medios del cuadrado *ABCD*.

b) Si X_2 precede a X_1, tiene que ocurrir que:
   - $x_1 - x_2 < l/2$
   - $x_2 < l/2$
   - $x_1 > l/2$

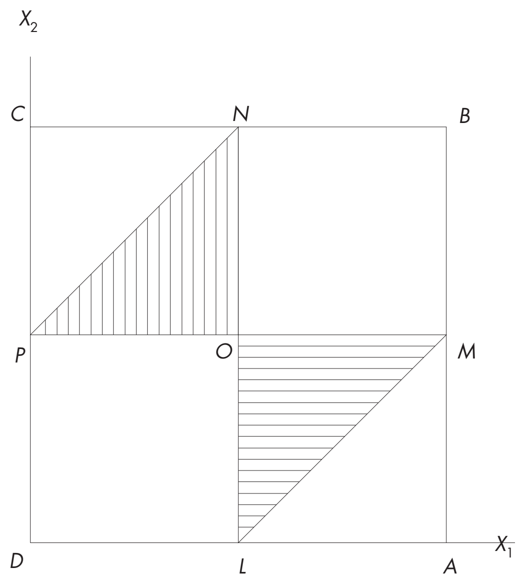

Figura 2

lo cual significa que x_1, x_2 pertenecen al triángulo *OLM*.

Así, la probabilidad requerida, como podemos ver en la figura 2 es:

$$p = \frac{\text{Área } OLM + \text{Área } OPN}{\text{Área } ABCD} = \frac{\frac{1}{4} l^2}{l^2} = \frac{1}{4}$$

Ciertos invonvenientes

Algunas veces la Geometría puede instalar la duda en nuestras mentes. Pero la aparición de paradojas, sólo nos pueden alentar a afianzar nuestros conocimientos. Dependiendo de la medida de probabilidad (longitud, área, etc.) que cojamos, el resultado puede ser distinto, así en Van Fraasen (1989) aparece la siguiente paradoja:

Problema 3

Una factoría construye cubos *C* de hierro, de arista menor o igual que 2 cm. ¿Cuál es la probabilidad de que un cubo C_1 construido en la citada factoría tenga una arista menor o igual que 1 cm?

Primera solución

$$p = \frac{\text{longitud de la arista de } C_1}{\text{longitud de la arista de } C} = \frac{1}{2}$$

Segunda solución

$$p = \frac{\text{Área de la cara de } C_1}{\text{Área de la cara de } C} = \frac{1}{4}$$

Tercera solución

$$p = \frac{\text{Volumen del cubo de } C_1}{\text{Volumen del cubo de } C} = \frac{1}{8}$$

Pero quizás la paradoja más conocida es la aparecida en la segunda página del libro de Bertrand, donde nos encontramos con el siguiente problema:

On trace au hasard *une corde dans un cercle. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit plus petite que la côté du triangle équilatéral inscrit?*

Es decir:

Se traza al azar una cuerda en un círculo. ¿Cuál es la probabilidad de que esa cuerda tenga una longitud mayor que el lado del triángulo equilátero inscrito?

Algunas veces la Geometría puede instalar la duda en nuestras mentes. Pero la aparición de paradojas, sólo nos pueden alentar a afianzar nuestros conocimientos.

Se pueden dar las siguientes soluciones:

Primera solución

El centro *M* de la cuerda *AB* es un punto obtenido al azar. Si M pertenece al interior del círculo C_1 de radio $R/2$, la longitud de la cuerda *l* es mayor que el lado del triángulo inscrito, cuya longitud es $R\sqrt{3}$ (figura 3). Midiendo por tanto la probabilidad como cociente de casos favorables entre casos posibles, tenemos:

$$p = \frac{\text{Área de } C_1}{\text{Área de } C} = \frac{\pi R^2/4}{\pi R^2} = \frac{1}{4}$$

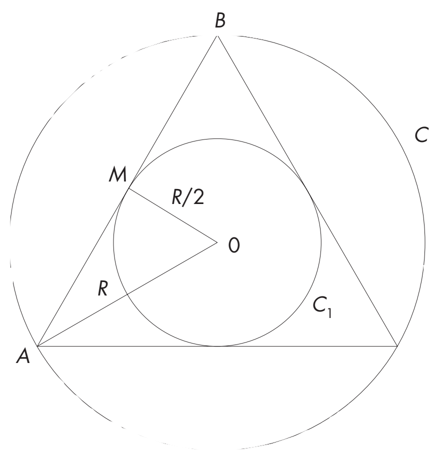

Figura 3

Segunda solución

El extremo *A* de la cuerda *AB* es un punto fijo y *B* es obtenido al azar. La condición pedida de que la cuerda tenga una longitud mayor que el lado del triángulo equilátero inscrito, se verifica siempre que *B* esté en el arco *DBE* (figura 4). Luego:

$$p = \frac{\text{Longitud de } DBE}{\text{Longitud de } C} = \frac{2\pi R/3}{2\pi R} = \frac{1}{3}$$

Tercera solución

Se considera que la cuerda *AB* se mueve aleatoria y perpendicularmente al diámetro *FK*. La longitud de la cuerda *l* será mayor que el lado del triángulo equilátero inscrito siempre que el centro *M* de *AB* esté entre *G* y *H* (ver figura 5). Luego la probabilidad será ahora:

$$p = \frac{\text{Longitud de } GH}{\text{Longitud de } FK} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$$

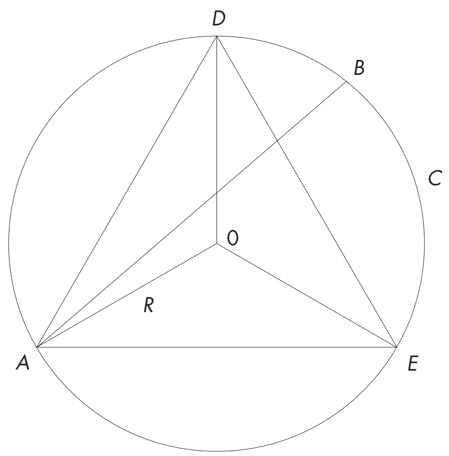

Figura 4

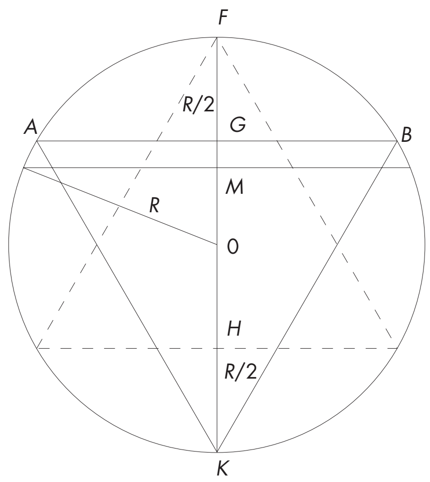

Figura 5

Como es conocido, la paradoja proviene de que no se trata de un único problema, sino de tres. Los resultados son distintos ya que son distintos (puntos, segmentos, etc.) los que se toman al azar. Didácticamente, estas paradojas deben fomentar el espíritu crítico del alumno y servir para afianzar los conocimientos adquiridos.

Todo empezó con una aguja

Veamos ahora algo de la génesis histórica de la Probabilidad Geométrica. Comprobaremos que podemos utilizar la Historia de la Probabilidad como un banderín de enganche para muchos de nuestros alumnos.

Todo empezó con el noble francés Georges Louis Leclerc, Conde de Buffon (1701-1788). Fue un estrecho colaborador en la *Enciclopedia* y tradujo entre otros a Newton. Desde su puesto de supervisor del Jardín del Rey, emprendió la redacción de su obra capital, su *Historia Natural*. Es un tratado moderno de 44 tomos que intenta abordar la Naturaleza de una manera íntegra. Contiene un tratado sobre la Tierra (pensó que el origen del planeta era una enorme colisión), una parte dedicada al estudio anatómico del hombre y otra dedicada a todo lo referente al cruce de especies, su reproducción, etc. Buffon puede ser considerado el precursor de la Biología y es junto con Linneo el más importante naturalista del siglo XVIII

Firme observador de todos los seres de la Naturaleza, [Buffon] consideraba al hombre como un integrante de la misma al que había que estudiar no sólo desde un punto de vista fisiológico, sino también en su espíritu, con sus esperanzas, sus miedos y sus pasiones.

Firme observador de todos los seres de la Naturaleza, consideraba al hombre como un integrante de la misma al que había que estudiar no sólo desde un punto de vista fisiológico, sino también en su espíritu, con sus esperanzas, sus miedos y sus pasiones.

En cuanto al estudio de los miedos de la naturaleza humana, en su *Essai d'Arithmétique Morale*, un suplemento a la *Historia Natural*, propone despreciar las probabilidades pequeñas, concretamente menores que 1/10000, ya que, según sus tablas de mortalidad, la probabilidad de que un hombre de 56 años muera en el transcurso del día era de 1/10189 y si, para un hombre de esa edad, dicha probabilidad no le causa temor y le parece pequeña, con igual motivo lo será 1/10000. Con argumentos como éste y apoyando la doctrina de que el dinero debe valer en proporción, no a su valor intrínseco, sino al uso que se puede hacer de él o la satisfacción (utilidad) que da, trató de resolver el llamado Problema de San Petersburgo, problema ligado a un juego con esperanza infinita (Ruiz, 1999).

Una de las pasiones más generalizadas entre los humanos del siglo XVIII eran los juegos de azar. En palabras de Leibniz:

> Los hombres nunca son tan ingeniosos como en la invención de juegos: el espíritu se encuentra en ellos a sus anchas.

El conde francés se propone por tanto, analizar los juegos de azar y comprobar su influencia en el propio hombre y en la sociedad. Buffon observa que:

> El Análisis ha sido el único instrumento que hasta la fecha se ha utilizado en la Ciencia de la Teoría de Probabilidades, como si la Geometría no fuera indicada para estos fines, cuando en realidad basta un poco de atención, para observar que la ventaja del Análisis sobre la Geometría es tan sólo accidental, y que el azar es tan propio del Análisis como de la Geometría. Para poner a la Geometría en sus derechos sobre la Ciencia del Azar, bastará inventar unos juegos que se basen en la extensión y sus relaciones.

En su *Essai d'Arithmétique Morale* propone el siguiente juego:

> *Dans une chambre parquetée ou pavée de carreaux égaux, d'une figure quelconque, on jette en l'air un écu; l'un des joueurs parie que cet écu après sa chute se trouvera à franc-carreau, c'est-à-dire, sur un seul carreau; le second parie que cet écu se trouvera sur deux carreaux, c'est-à-dire, qu'il couvrira un des joints que les séparent; un troisième joueur parie que l'écu se trouvera sur deux joints; un quatrième parie que l'écu se trouvera sur trois, quatre ou six joints: on demande les forts de chacun de ces joueurs.*

Cuya traducción es:

> En una habitación embaldosada con baldosas iguales, con una forma cualquiera, se tira al aire una moneda. Uno de los jugadores apuesta a que la moneda caerá limpiamente sobre una sola baldosa; el segundo apuesta que caerá sobre dos de ellas, es decir, que cubrirá una de las juntas que las separan; un tercer jugador apuesta que la moneda caerá sobre dos juntas, un cuarto apuesta que la moneda cubrirá tres, cuatro o seis juntas: se requiere la probabilidad de cada jugador.

Buffon investiga este juego para distintos tipos de baldosas: cuadradas, hexagonales, etc. y se interesa por la forma de hacer de estos juegos, «juegos justos». Como un caso especial, Buffon propone el, posteriormente, llamado Problema de la Aguja:

> *Je suppose que dans une chambre, dont le parquet est simplement divisé par des joints parallèles, on jette en l'air, une baguette, & que l'un des joueurs parie que la baguette ne croisera aucune des parallèles du parquet, & que l'autre au contraire parie que la baguette croisera quelques-unes de ces parallèles; on demande le sort de ces deux joueurs. On peu joueur cet jeu sur un damier avec une aiguille à coudre o une épingle sans tête.*

Georges Louis Leclerc
Conde de Buffon

Como un caso especial, Buffon propone el, posteriormente, llamado Problema de la Aguja…

Que lo podemos traducir como:

> Supongamos que en una habitación, el suelo se haya dividido en líneas paralelas, se tira un palo y uno de los jugadores apuesta a que el palo no ha cortado ninguna de las paralelas de el suelo, el otro por el contrario apuesta porque el palo cortará alguna de esas líneas, se pregunta por las probabilidades de ambos jugadores. Es posible jugar este juego con una aguja de coser o un alfiler sin cabeza.

Luego, sobre un plano se trazan rectas paralelas equidistantes, situadas unas de las otras a una distancia constante d. Se arroja al azar una aguja tan delgada que se considera como un segmento rectilíneo de longitud $l < d$. ¿Cuál es la probabilidad de que la aguja corte a una de las líneas?

Determinamos la posición de la aguja mediante la distancia $OP = x$ de su punto medio a la recta más próxima y el ángulo agudo, φ, formado por OP y la aguja. Evidentemente $0 \le x \le d/2$ y $0 \le \varphi \le \pi/2$ (ver figura 6).

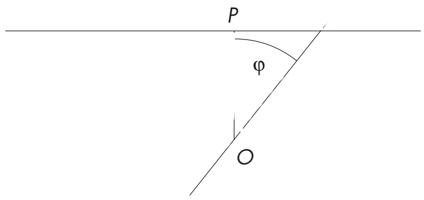

Figura 6

La probabilidad que necesitamos se calculará como cociente de casos favorables entre casos posibles. La medida de los casos posibles será el área de rectángulo $OABC$ con $OA = \pi/2$ y $OC = d/2$. Para obtener los casos favorables tenemos en cuenta que la aguja corta a la paralela si $x < (l/2)\cdot\cos\varphi$ y en ese caso el punto (x, φ) se halla dentro del área sombreada bajo la curva $x = (l/2)\cdot\cos\varphi$ (ver figura 7).

Luego en resumen, la probabilidad pedida es:

$$p = \frac{\text{Área de } OAD}{\text{Área de } OABC} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} l\cos\varphi\, d\varphi}{\frac{\pi}{2}\frac{d}{2}} = \frac{2l}{\pi d}$$

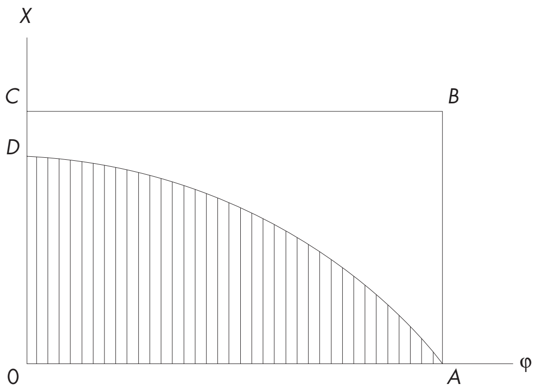

Figura 7

Si $l > d$ entonces la aguja puede cortar a más de una paralela y la expresión de la probabilidad se complica. Como vemos, es posible utilizar la Historia de las Matemáticas como recurso didáctico. Con poco bagaje matemático, es posible resolver el Problema de la Aguja que en su momento formuló Buffon.

Una extensión del Problema de la Aguja fue realizada por Laplace en los siguientes términos:

Supongamos ahora que en vez de tener un solo sistema de líneas paralelas, tenemos dos, uno ortogonal del otro, de tal manera que ambos sistemas recubren el plano con un conjunto de rectángulos congruentes. Supongamos que la distancia entre dos líneas rectas consecutivas de un sistema es a, la distancia entre dos líneas rectas consecutivas de otro sistema es b, sea l la longitud de la aguja y supongamos que $l < a$, $l < b$. Supongamos que la aguja forma un ángulo ϑ con la línea de longitud a.

Se requiere la probabilidad de que la aguja lanzada al aire corte el perímetro de alguno de tales rectángulos.

Para que la aguja corte a una línea, el punto medio de la aguja debe estar dentro del área

$$ab - (a - l\cdot\cos\vartheta)(b - l\cdot\text{sen}\,\vartheta) =$$
$$= l(a\cdot\text{sen}\,\vartheta + b\cdot\cos\vartheta) - l^2\cdot\text{sen}\,\vartheta\cdot\cos\vartheta$$

luego la probabilidad pedida es:

$$p = \frac{\int_0^{\pi/2}\left[l\left(a\cdot\text{sen}\,\vartheta + b\cdot\cos\vartheta\right) - l^2\cdot\text{sen}\,\vartheta\cdot\cos\vartheta\right]d\vartheta}{\int_0^{\pi/2} ab\,d\vartheta} = \frac{2l(a+b) - l^2}{\pi ab}$$

Si tenemos un solo conjunto de líneas paralelas, eso es equivalente a tomar b tendiendo a infinito:

$$\lim_{b\to\infty}\frac{2l(a+b) - l^2}{\pi ab} = \frac{2l}{\pi a}$$

que es la expresión del Problema de la aguja de Buffon.

A vueltas con las cuerdas, los hilos y las agujas

Seguidamente profundizaremos un poco más en los conceptos claves de la Probabilidad Geométrica, recordando curiosos resultados.

Una clave importante de estos problemas geométricos reside en la expresión «elegido al azar». En el fondo, la elección al azar de los elementos del conjunto geométrico que se considera, es equivalente a dar la ley de probabilidad según la cual se suponen distribuidos. Siendo este conjunto geométrico continuo, sus elementos no podrán ser propiamente contados, por lo que habrá que definir la «medida» del conjunto.

Una clave importante de estos problemas geométricos reside en la expresión «elegido al azar». En el fondo, la elección al azar de los elementos del conjunto geométrico que se considera, es equivalente a dar la ley de probabilidad según la cual se suponen distribuidos.

Ningún problema presenta alcanzar ese objetivo cuando se trata de conjuntos continuos limitados por puntos: la medida del conjunto la da entonces la longitud de la línea, si el conjunto es lineal, o el área de la superficie o el volumen del cuerpo. Pero cuando los elementos son rectas o planos, la noción de medida no es tan intuitiva como en el caso anterior, ya que el entrecruzamiento que resulta, no deja ver los límites del conjunto.

Si nos limitamos al caso de rectas en el plano, sabemos que la totalidad de las rectas de un plano tiene dos dimensiones. Para delimitar completamente un conjunto continuo de rectas, será preciso para cada dirección determinar dos posiciones límites, fuera de las cuales no haya recta alguna que pertenezca al conjunto. Estas rectas límites serán tangentes a una cierta línea que será cortada por todas las rectas del conjunto. El conjunto tipo que habrá que medir será, pues, el de las rectas que corten a una línea dada.

Si suponemos que esta línea es cerrada y convexa y representamos por b la distancia entre las dos tangentes límites paralelas a la dirección dada, b será la medida relativa de las secantes paralelas a esa dirección, y las de todas las secantes se obtendrá integrando y será igual a la longitud de la curva L, es decir:

$$\int_0^{\pi} h \, d\vartheta = l$$

O sea, se puede demostrar que:

Teorema 1

La medida de los conjuntos de rectas que cortan a un segmento es proporcional a la longitud de este segmento.

La idea anterior la podemos formalizar un poco y así la podemos encontrar en Kendall y Moran (1963) o en Crofton (1869):

Teorema 2

Dada una figura convexa C_2 de longitud L_2 contenida en una figura convexa C_1 de longitud L_1, entonces la probabilidad de que una cuerda aleatoria de C_1 corte a C_2 es L_2/L_1. Además esta probabilidad es independiente de la posición de C_2 relativa a C_1.

Como consecuencia del teorema anterior tenemos que:

Teorema 3

Si suponemos que C_2 es un segmento rectilíneo de longitud l. La probabilidad de que una cuerda elegida al azar de C_1 corte al segmento es de $2l/L_1$.

La demostración de este teorema es inmediata, sin más que considerar el teorema anterior 2 y que un segmento de longitud *l* puede ser considerado como límite de una región convexa, como un rectángulo de anchura infinitesimal y largura *l*, por tanto, de perímetro convergente a 2*l*.

El Problema de la Aguja de Buffon puede ser tratado a partir de los anteriores resultados como un caso particular. Así:

Corolario 1 (Problema de la aguja)

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que la aguja es encerrada en un círculo C_1 de diámetro unidad cuyo centro es el punto medio de la aguja, este círculo cortará una paralela cuya intersección será una cuerda al azar del círculo, entonces la probabilidad de que esta cuerda corte a la aguja es $2l/\pi$.

¿Y si en vez de lanzar una aguja o un hilo, lanzamos una lámina delgada en forma de polígono convexo, de dimensiones lo suficientemente pequeñas como para que no pueda interceptar simultáneamente dos de las rectas paralelas trazadas en el suelo?

La demostración es inmediata a partir del teorema anterior 3.

Relacionado con lo anterior, el matemático francés Cauchy (1850), demostró el siguiente teorema:

Teorema 4

Dado un segmento rectilíneo de longitud l ” 1 en el plano y su proyección sobre una línea en una dirección dando un ángulo ϑ con ella, o sea

$$Proy(\vartheta) = l \cdot |\cos\vartheta|$$

Entonces el valor medio de $Proy(\vartheta)$ es

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} l\,|\cos\vartheta|\, d\vartheta = \frac{2l}{\pi}$$

Basándonos en él, podemos extender el Problema de la Aguja de Buffon cambiando algo tan rígido como una aguja por un hilo o línea de longitud *l*, enroscada en una forma determinada:

Corolario 2 (Problema de la aguja)

Sobre un conjunto de líneas paralelas separadas una distancia de una unidad, esto se puede hacer sin perder generalidad, dejamos caer un hilo o línea de longitud l, entonces el número esperado de intersecciones es $2l/\pi$, independiente de la forma de la línea.

Mediante este método se puede medir la longitud de cualquier curva observada a través de un microscopio.

¿Y si en vez de lanzar una aguja o un hilo, lanzamos una lámina delgada en forma de polígono convexo, de dimensiones lo suficientemente pequeñas como para que no pueda interceptar simultáneamente dos de las rectas paralelas trazadas en el suelo? Se puede probar fácilmente el siguiente teorema:

Teorema 5

Supongamos un polígono convexo de perímetro L y de dimensiones lo suficientemente reducidas para que no rebase la distancia entre paralelas d. Entonces, la probabilidad de que el contorno del polígono intercepte una de las rectas paralelas es $L/\pi d$.

Luego, como hemos visto, el Problema de la Aguja da lugar a algunas reflexiones francamente curiosas, lancemos agujas, hilos o láminas poligonales convexas.

Pero hay más, unida a la Probabilidad Geométrica está la Geometría Integral, uno de cuyos exponentes máximos es el gran matemático español Luis Antonio Santaló Sors. Nacido en Gerona en 1911, se trasladó a Argentina por causa de la Guerra Civil y siguiendo el consejo de Rey Pastor. Fue en este país iberoamericano, donde desarrolló gran parte de su labor investigadora, recibiendo en nuestro país en 1983 el Premio Príncipe de Asturias de Investigación Científica y Técnica. Desgraciadamente no son muchas las ramas de la Matemática donde los españoles podamos «hacer patria». Una de ellas es la Geometría Integral, estrechamente unida a la Probabilidad Geométrica y al nombre de Santaló. La Geometría Integral consiste, esencialmente, en el uso de la teoría de la medida (o de la integración), para el estudio de propiedades geométricas de figuras en el espacio euclideo, principalmente conjuntos convexos.

Otra utilización didáctica del Problema de la Aguja tiene que ver con la estimación de π. Si utilizamos la frecuencia relativa de intersecciones como un estimador de la probabilidad, esto es, si la aguja es tirada n veces y en r de estas tiradas obtenemos al menos una intersección, podemos considerar que $\hat{p} = r/n$ es un estimador de p y es posible estimar π a través de lanzamientos de una aguja. Así lo hizo en el año 1850 el científico suizo Richard Wolf, quien obtuvo una estimación de π de 3,1596, valor que difiere del real en menos de 0,02, lanzando una aguja de longitud 36 mm la friolera de 5.000 veces obteniendo 2532 éxitos, con una distancia entre paralelas de 45 mm. Aunque si estos 5.000 lanzamientos marean, conviene recordar que Wolf hizo y recogió en papel, el resultado de mas de ¡¡¡250.000!!!, sí, ¡¡¡250.000!!! lanzamientos de dados, y lo que asombra más, sin que estudiosos posteriores de sus escritos hayan encontrado la razón última de tan extraordinario empeño. Seguro que hoy, en nuestras clases, con menos trabajo, y utilizando técnicas de Montecarlo podemos simular gran número de lanzamientos y encontrar estimaciones del número π.

La Geometría Integral consiste, esencialmente, en el uso de la teoría de la medida (o de la integración), para el estudio de propiedades geométricas de figuras en el espacio euclideo, principalmente conjuntos convexos.

Conclusiones

A modo de resumen final queremos decir que con este artículo hemos pretendido:

a) Utilizar la Geometría para motivar y afianzar las nociones básicas de la Probabilidad.

b) Utilizar la Historia de las Matemáticas como un recurso válido en nuestras clases diarias.

c) Dar a conocer a nuestros alumnos la figura de insignes matemáticos españoles, como es el caso del profesor Santaló.

Seguro que esta lista de reflexiones quedará aumentada con las que seguramente rondarán ahora por la cabeza de cada uno de nosotros.

Gabriel Ruiz
Escuela Universitaria
de Estuidos Empresariales.
Universidad de Cádiz.
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
«Thales»

Bibliografía

BERTRAND, J. (1907): *Calcul des Probabilités*, París.

BUFFON, G.L. (1777): «Essai d'Arithmétique Morale», dentro del cuarto volumen del *Supplément à l'Histoire Naturelle, générale et particulière, avec la description du cabinet du Roy*, París.

CAUCHY, A. (1850): «Mémoire sur la rectification des courbes et de la quadrature des surfaces courbes», *Memorias de la Academia de Ciencias de París*, n.° 22, 3-13.

CROFTON, M. W. (1869): «On the Theory of Local Probability, applied to Straight Lines drawn at random in a plane; the methods used being also extended to the proof of certain new Theorems in the Integral Calculus», *Philosophical Transactions*, n.° 158, 181-199.

GUTIERREZ CABRIA, S. (1992): *Filosofía de la Probabilidad*, Tirant Lo Blanch, Valencia.

KENDALL, M. G. y P. A. P. MORAN, (1963): *Geometrical Probability*, Charles Griffin and Company Limited, Londres.

RAMOS ROMERO, H. M. (1994): *Introducción al Cálculo de Probabilidades. Tomo I: Probabilidad y Variable aleatoria*, Copistería S. Rafael, Cádiz.

RUIZ GARZÓN, G. (1999): «La paradoja de San Petersburgo: una reivindicación didáctica», *Suma*, n.° 32, 5-9.

VAN FRAASSEN, B.C. (1989): *Laws and Symmetry*, Oxford University Press, New York.