SUMA 32
noviembre 1999, pp. 105-107

Resolución de la ecuación de segundo grado con una calculadora de bolsillo

Juan Ricardo Escribano Rivero

IDEAS Y RECURSOS

Es posible resolver la ecuación de segundo grado con una calculadora científica de bolsillo sencilla. No es necesario efectuar ninguna anotación intermedia, no existe ningún tipo de truncamiento ajeno al propio proceso de presentación de los datos, y las raíces tienen la exactitud de los dígitos que permita la pantalla. Todo ello se puede conseguir a partir de una pequeña modificación de la ecuación de segundo grado y del uso de un algoritmo ingenioso.

RESOLVER las ecuaciones de segundo grado (en adelante E2G) siempre ha sido relativamente laborioso para todos nuestros estudiantes. No sólo implica usar la «receta» exactamente, sino tener cuidado en las operaciones y los signos. Aunque esto es una precaución que deben tener todos los que usen cualquier tipo de algoritmo, no es menos cierto que cuando un estudiante se enfrenta por primera vez a la E2G posee tan escaso bagaje que la fórmula que se debe aplicar le resulta muy difícil. En efecto, se combinan en una misma expresión casi todas las operaciones que conocen hasta entonces: suma, resta, potenciación, extraer raíz cuadrada y división; y debe calcularse numéricamente. Ni siquiera cualquier fórmula geométrica tiene todo ello junto.

Una forma sencilla de ir entrenándose en la aplicación de la «receta» consiste en emplear ecuaciones de soluciones enteras; de esta forma los cálculos son menos gravosos y se va tomando progresiva confianza.

El siguiente paso sería plantear situaciones en las que haya que dejar indicada las dos raíces en términos de radicales debido a que el discriminante no sea un cuadrado exacto.

Una tercera situación consistiría en calcular la raíz cuadrada con la calculadora y efectuar las oportunas operaciones, eso sí, a partir de una ecuación con coeficientes enteros. El último, correspondería al de resolver una E2G con coeficientes en forma decimal, encontrando las raíces con la máxima aproximación que proporcione la calculadora.

En cualquier caso, el uso de la calculadora en la resolución de E2G suele ser mínimo. Existen calculadoras preprogramadas que, introducidos los valores de los coeficientes de la E2G, proporcionan las raíces x_1 y x_2. Esto es cómodo, pero no formativo, por lo menos en un nivel de enseñanza elemental. En cualquier caso, sí es de agradecer que algunas calculadoras incluyan esta facilidad, en especial cuando los coeficientes tiene algunos decimales. Esta situación se produce a menudo en Química, en la resolución de equilibrios químicos, así como en Física y en Ingeniería. En Matemáticas podría presentarse, por ejemplo, en el cálculo de los puntos de intersección de una recta y una parábola. En estos ejemplos cabe esperar situaciones en las que las soluciones x_1 y x_2 no van a ser exactas, ni tampoco es deseable dejarlas expresadas en términos de radicales.

A menos que se disponga de una calculadora científica avanzada, y por tanto cara, se frena la resolución del problema y a menudo se producen errores por truncamiento. Lo ideal es que a partir de una calculadora científica común se encuentren las raíces de la E2G:

a) sin errores por truncamiento del operador al anotar resultados parciales de cálculo;

b) con un algoritmo sencillo y fácil de recordar;

c) introduciendo sólo una vez los datos de los coeficientes de la E2G.

Un algoritmo de estas características es el que vamos a dar a conocer. El tiempo que se dedica a su enseñanza es pequeño en comparación con las ventajas que comporta. Por otro lado, pone de manifiesto la capacidad de manipulación de la E2G, y de un uso ingenioso de la capacidad de almacenamiento de datos en las calculadoras de bolsillo.

Las ecuaciones

La E2G del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad [1]$$

tiene por soluciones:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad [2]$$

pero para nuestros propósitos es más conveniente escribirlas en la forma:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \quad [3]$$

Si la ecuación [1] se divide por a (evidentemente $a \neq 0$) y redefinimos los coeficientes como $B = b/a$ y $C = c/a$, tendríamos

$$x^2 + Bx + C = 0 \quad [4]$$

y sus soluciones son:

$$x = -\frac{B}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{B}{2}\right)^2 - C} \quad [5]$$

Las soluciones de la E2G del tipo [4] son las mismas que la del tipo [1], pero las soluciones de [5] son más sencillas que las de [3], al menos por lo que se refiere a la aplicación de la calculadora. Es evidente que si $a = 1$ la E2G está directamente en su forma [4]. Solamente consideraremos las situaciones en las que B y C sean reales, y que el discriminante no sea negativo.

El tiempo que se dedica a su enseñanza es pequeño en comparación con las ventajas que comporta. Por otro lado pone de manifiesto la capacidad de manipulación de la E2G, y de un uso ingenioso de la capacidad de almacenamiento de datos en las calculadoras de bolsillo.

Sean x_1 y x_2 las dos raíces asociadas con los signos más y menos de la raíz cuadrada de [5]. Todo es cuestión ahora de usar una calculadora adecuada para encontrar las dos soluciones a partir de [5].

Requisitos de la calculadora

La calculadora debe poder:

1. Almacenar datos: teclas Min o STO (depende del modelo).
2. Recuperar el dato almacenado: teclas MR o RCL (también depende del modelo; están relacionadas las teclas Min con MR, y STO con la RCL).

   No es válida la memoria aditiva, M+, o la memoria sustractiva, M–.
3. Extraer raíces cuadradas: tecla $\sqrt{\ }$
4. Cambiar el signo del número de la pantalla: tecla +/–.
5. Elevar al cuadrado: tecla x^2 (ésta operación se sustituye en algunas calculadoras por la secuencia de teclas xx=).

Todos estos son requerimientos sencillos que están incluidos en cualquier calculadora científica. No se necesita más, sólo el algoritmo.

El algoritmo

Los pasos a seguir para encontrar las dos raíces reales a partir de la solución [5] son:

1. Primero calcular $-B/2$, y guardarlo en la memoria (STO). Notar que al mismo tiempo ese número permanece en la pantalla.
2. Elevar al cuadrado el número de la pantalla, esto es, calcular $(-B/2)^2$.
3. Restar C del número de la pantalla. Lo que hacemos es calcular el discriminante: $(-B/2)^2 - C$.
4. Tomar la raíz cuadrada del número de la pantalla. Así hemos hecho

   $$\sqrt{\left(-B/2\right)^2 - C}$$

   Notar que la operación nos da sólo la raíz positiva.
5. Cálculo de la raíz x_1: sumar el número almacenado en la memoria,

($-B/2$), a la pantalla. Se obtiene así x_1 (éste resultado conviene anotarlo).

6. Cálculo de la raíz x_2: restar el número almacenado en memoria, ($-B/2$), de la pantalla; en este momento se recupera el valor de la raíz cuadrada; después se cambia de signo ese número, con la tecla +/–, y entonces se suma el número almacenado en memoria, ($-B/2$), para obtener la segunda raíz, x_2. Este resultado también se anotará.

Una vez que se han obtenido las dos soluciones de la E2G se deben interpretar en el contexto del problema.

Una vez escrita la E2G en la forma [4], la siguiente anotación que hay que realizar es únicamente la de las soluciones x_1 y x_2, sin necesidad alguna de sustituir los valores numéricos de B y C en [5].

A partir de aquí lo mejor es poner en práctica el algoritmo.

Un ejercicio

Deseamos conocer los puntos de intersección de la parábola $3y^2 - 2x = 0$ y la recta $x - y = 1$. (Este ejercicio sería previo al cálculo del área comprendida entre ambos.)

Habría que resolver la ecuación $3x^2 - 8x + 3 = 0$, que es de la forma [1]. Poniéndola en la forma [3] quedaría:

$$x^2 - \frac{8}{3}x + 1 = 0$$

Ahora $B = -8/3$ y $C = 1$

En lo que sigue consideraremos que STO es la tecla de almacenamiento de la memoria; y, RCL la tecla de recuperación de memoria.

Los pasos son los siguientes:

a) Introducir $-B$, entonces calcular $-B/2$.

Pantalla (a) —> 1,33333333333

b) Almacenar $-B/2$, (STO).

Pantalla (b) —> 1,33333333333

c) Calcular $(-B/2)^2$

Pantalla (c) —> 1,77777777778

d) Calcular $(-B/2)^2 - C$

Pantalla (d) —> 0,77777777778

Una vez que este método de resolución de ecuaciones de segundo grado se ha dominado, es rápido y sencillo. [...] La gran ventaja de él es que no hay que efectuar ninguna anotación intermedia, salvo, por supuesto, los valores de las raíces.

e) Calcular

$$\sqrt{(-B/2)^2 - C}$$

Pantalla (e) —> 0,88191710368

f) Añadir el número almacenado en la memoria, con (RCL), a la pantalla (e). Esta es la raíz x_1.

Pantalla (f) —> 2,21525043702 (= x_1)

g) Restar la memoria (RCL) de la pantalla (f).

Pantalla (g) —> 0,88191710368... = Pantalla (e)

h) Cambiar el signo, +/–, de la pantalla (e).

Pantalla (h) —> –0,88191710368

i) Añadir el número almacenado en la memoria (RCL) a la pantalla (h). Esta es la raíz x_2.

Pantalla (f) —> 0,45141622964 (= x_2)

Una vez conocidos x_1 y x_2 se sustituyen sus valores en la ecuación de la recta y se encuentran los correspondientes de y_1 e y_2. Los puntos pedidos son

P_1(2,21525043702, 1,21525043702), y
P_2(0,45141622964, –0,5485877035)

Posiblemente podríamos pensar que aplicando las propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado:

$$x_1 + x_2 = -B, \; y \; x_1 \cdot x_2 = C \qquad [6]$$

obtendríamos rápidamente una solución una vez conocida la otra. Esto, aunque cierto, no es muy aconsejable especialmente en el caso en que B y C sean números que consten de muchos dígitos (incluso una vez escritos en notación científica, lo cual sucede en la resolución de problemas de equilibrios químicos) pues es engorroso teclearlos otra vez y siempre queda la posibilidad de cometer algún fallo. En general, se aconseja el algoritmo aquí dado. Por supuesto que las ecuaciones [6] pueden usarse para comprobar las raíces x_1 y x_2.

Conclusión

Una vez que este método de resolución de ecuaciones de segundo grado se ha dominado, es rápido y sencillo. El único requerimiento es transformar la ecuación general de segundo grado de la forma [1] a la forma [4], y aplicar el algoritmo aquí dado para calcular la solución [5]. La gran ventaja de él es que no hay que efectuar ninguna anotación intermedia, salvo, por supuesto, los valores de las raíces.

Una vez que nos hemos liberado de la carga computacional de la resolución de estas ecuaciones podemos, por ejemplo, dedicarnos a realizar cálculos con ecuaciones de segundo grado en los que los coeficientes sean de muchos dígitos, a estudiar cómo pequeñas variaciones en los coeficientes puede afectar a las soluciones, a buscar problemas de la Física y de la Química en que sea necesario resolver estas ecuaciones pero en los que resulta engorroso su cálculo por el método tradicional, etc.

Juan Ricardo Escribano
IES Huerta del Rosario
Chiclana (Cádiz)