SUMA 32
noviembre 1999, pp. 99-103

# Medios informáticos en la resolución de problemas de divisibilidad

Antonio Sarmiento Escalona

IDEAS Y RECURSOS

La resolución de problemas puede ser complementada con la utilización de una amplia gama de recursos informáticos. En este trabajo se comenta una experiencia de utilización de ese tipo de recursos complementado el desarrollo de diversas líneas de actuación de los alumnos frente a un determinado problema. Además la experiencia integra actividades sin ordenador de una manera bastante natural contribuyendo a una reflexión quizá más equilibrada sobre el impacto de las nuevas tecnologías en la educación.

DÍA A DÍA se está comprobando que el amplio dominio de recursos informáticos es una facilidad añadida a las situaciones de resolución de problemas. Con el término recursos informáticos queremos expresar los diferentes entornos de aprendizaje basados en el ordenador para la enseñanza de las matemáticas existentes en el mercado (Balacheff y Kaput, 1996). Evidentemente nos encontramos con las dificultades de aprendizaje que en sí mismo tienen los propios entornos: micromundos, computación simbólica, hojas de cálculo, bases de datos, programación, etc. Estas dificultades llevan en muchos casos a abandonar procesos que utilicen el ordenador. Se podría decir que la alfabetización informática enmascara y ralentiza el aprendizaje matemático. Sin embargo, no podemos ignorar la existencia de esos recursos informáticos, de fácil acceso, cuyo conocimiento, a nivel elemental, es sencillo y que pueden enriquecer notablemente la clase de resolución de problemas. Usando la terminología habitual podríamos decir que cada recurso informático dota al alumno de un heurístico más en su bagaje para resolver problemas. Además, recursos informáticos diferentes generan situaciones de aprendizaje diferentes que pueden surgir en el aula y que merece la pena analizar en su contexto. Esto se corresponde, en el fondo, con los diversos entornos de aprendizaje que genera el medio informático.

En el transcurso de una clase de resolución de problemas para alumnos de últimos años de secundaria con conocimientos de recursos informáticos variados se planteó en grupos de 2 o 3 alumnos el siguiente problema:

> Hallar el menor múltiplo de 7 tal que dividido por 2, 3, 4, 5 y 6 tiene como resto 1.

Uno de los inconvenientes que se suele indicar de la clase de resolución de problemas es la llegada de muchos alumnos a un «callejón sin salida» después de unos primeros intentos de búsqueda fallidos, lo que les lleva a abandonar prematuramente todo esfuerzo personal y esperar que por algún sitio surja un rayo de luz que permita encontrar una vía hacia la solución. Contradiciendo esos hechos se pretendía mostrar que ningún esfuerzo es inútil y que casi todas las líneas de trabajo que se abren al enfrentarse con un problema nuevo pueden llevar a soluciones imaginativas de las que se pueden aprender conocimientos y procesos. En suma, cada línea de trabajo puede alcanzar una autonomía y desarrollo propios si perseveramos en ella. Además, inmersos en un marco de disponibilidad de distintos recursos informáticos se pretendía mostrar justamente las posibilidades de éstos para ser utilizados en determinadas situaciones.

## Un sistema de ecuaciones

Muchos alumnos del nivel señalado, que han estudiado álgebra, inevitablemente después de ensayos variados llegan a plantear un sistema de ecuaciones parecido al siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} 7x = 2y+1 \\ 7x = 3z+1 \\ 7x = 4u+1 \\ 7x = 5v+1 \\ 7x = 6w+1 \end{array}\right\}$$

Pronto descubren que el número de incógnitas es mayor que el de ecuaciones lo que les produce un conflicto que les lleva, en general, a abandonar esta forma de resolución del problema. En este momento, el profesor debe insistir en esta línea e intentar resolver el sistema de ecuaciones. Los alumnos van adquiriendo más confianza en sí mismos y descubren bastante rápidamente que la solución debe ser un conjunto de números enteros.

Un salto cualitativo se produce cuando en uno de los grupos un alumno con conocimientos de hojas de cálculo sugiere la posibilidad de utilizar este software para resolver el sistema de ecuaciones. Entonces, el profesor señala la posibilidad de organizar las ecuaciones de manera isomorfa a las planteadas.

En una hoja de calculo, las celdas están numeradas siguiendo una tabla de doble entrada A1, C3, E2, etc., con lo cual parece bastante simple traducir el sistema anterior a la forma:

7A1 = 2B1 + 1;
7A1 = 3C1 + 1;
7A1 = 4D1 + 1;
7A1 = 5E1 + 1;
7A1 = 6F1 + 1.

A continuación, se despejan los valores de B1, C1, D1, E1 y F1 y se introducen en las celdas correspondientes:

B1 = (7*A1 – 1)/2;
C1 = (7*A1 – 1)/3;
D1 = (7*A1 – 1)/4;
E1 = (7*A1 – 1)/5;
F1 = (7*A1 – 1)/6.

La solución del problema se puede obtener de manera sistemática dando valores a la celda A1 y deteniendo la búsqueda cuando todas las celdas incógnitas tengan valores enteros. Hay seguridad de obtener el número más pequeño ya que hemos hecho una búsqueda completa variando A1 desde 1 a 43.

Como complemento se puede añadir en otra columna, la G1 el valor «=7*A1» para hallar el valor real del múltiplo de 7 que obtenemos en cada ensayo.

Archivo Edición Ver Ins. Formato Herramientas Datos Ventana Ayuda

B1 =(7*A1-1)/2

Libro1

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 2 | 1,5 | 1,2 | 1 | 7 | |
| 2 | 2 | 6,5 | 4,33333333 | 3,25 | 2,6 | 2,16666667 | 14 | |
| 3 | 3 | 10 | 6,66666667 | 5 | 4 | 3,33333333 | 21 | |
| 4 | 4 | 13,5 | 9 | 6,75 | 5,4 | 4,5 | 28 | |
| 5 | 5 | 17 | 11,3333333 | 8,5 | 6,8 | 5,66666667 | 35 | |
| 6 | 6 | 20,5 | 13,6666667 | 10,25 | 8,2 | 6,83333333 | 42 | |
| 7 | 7 | 24 | 16 | 12 | 9,6 | 8 | 49 | |
| 8 | 8 | 27,5 | 18,3333333 | 13,75 | 11 | 9,16666667 | 56 | |
| 9 | 9 | 31 | 20,6666667 | 15,5 | 12,4 | 10,3333333 | 63 | |
| 10 | 10 | 34,5 | 23 | 17,25 | 13,8 | 11,5 | 70 | |
| 11 | 11 | 38 | 25,3333333 | 19 | 15,2 | 12,6666667 | 77 | |
| 12 | 12 | 41,5 | 27,6666667 | 20,75 | 16,6 | 13,8333333 | 84 | |
| 13 | 13 | 45 | 30 | 22,5 | 18 | 15 | 91 | |
| 14 | 14 | 48,5 | 32,3333333 | 24,25 | 19,4 | 16,1666667 | 98 | |
| 15 | 15 | 52 | 34,6666667 | 26 | 20,8 | 17,3333333 | 105 | |
| 16 | 16 | 55,5 | 37 | 27,75 | 22,2 | 18,5 | 112 | |
| 17 | 17 | 59 | 39,3333333 | 29,5 | 23,6 | 19,6666667 | 119 | |
| 18 | 18 | 62,5 | 41,6666667 | 31,25 | 25 | 20,8333333 | 126 | |
| 19 | 19 | 66 | 44 | 33 | 26,4 | 22 | 133 | |
| 20 | 20 | 69,5 | 46,3333333 | 34,75 | 27,8 | 23,1666667 | 140 | |
| 21 | 21 | 73 | 48,6666667 | 36,5 | 29,2 | 24,3333333 | 147 | |
| 22 | 22 | 76,5 | 51 | 38,25 | 30,6 | 25,5 | 154 | |
| 23 | 23 | 80 | 53,3333333 | 40 | 32 | 26,6666667 | 161 | |
| 24 | 24 | 83,5 | 55,6666667 | 41,75 | 33,4 | 27,8333333 | 168 | |

Hoja1 Hoja2 Hoja3 Hoja4 Hoja5 Hoja6 Hoja7

Listo NUM

Archivo Edición Ver Ins. Formato Herramientas Datos Ventana Ayuda

B1 =(7*A1-1)/2

Libro1

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 25 | 87 | 58 | 43,5 | 34,8 | 29 | 175 | |
| 26 | 26 | 90,5 | 60,3333333 | 45,25 | 36,2 | 30,1666667 | 182 | |
| 27 | 27 | 94 | 62,6666667 | 47 | 37,6 | 31,3333333 | 189 | |
| 28 | 28 | 97,5 | 65 | 48,75 | 39 | 32,5 | 196 | |
| 29 | 29 | 101 | 67,3333333 | 50,5 | 40,4 | 33,6666667 | 203 | |
| 30 | 30 | 104,5 | 69,6666667 | 52,25 | 41,8 | 34,8333333 | 210 | |
| 31 | 31 | 108 | 72 | 54 | 43,2 | 36 | 217 | |
| 32 | 32 | 111,5 | 74,3333333 | 55,75 | 44,6 | 37,1666667 | 224 | |
| 33 | 33 | 115 | 76,6666667 | 57,5 | 46 | 38,3333333 | 231 | |
| 34 | 34 | 118,5 | 79 | 59,25 | 47,4 | 39,5 | 238 | |
| 35 | 35 | 122 | 81,3333333 | 61 | 48,8 | 40,6666667 | 245 | |
| 36 | 36 | 125,5 | 83,6666667 | 62,75 | 50,2 | 41,8333333 | 252 | |
| 37 | 37 | 129 | 86 | 64,5 | 51,6 | 43 | 259 | |
| 38 | 38 | 132,5 | 88,3333333 | 66,25 | 53 | 44,1666667 | 266 | |
| 39 | 39 | 136 | 90,6666667 | 68 | 54,4 | 45,3333333 | 273 | |
| 40 | 40 | 139,5 | 93 | 69,75 | 55,8 | 46,5 | 280 | |
| 41 | 41 | 143 | 95,3333333 | 71,5 | 57,2 | 47,6666667 | 287 | |
| 42 | 42 | 146,5 | 97,6666667 | 73,25 | 58,6 | 48,8333333 | 294 | |
| 43 | 43 | 150 | 100 | 75 | 60 | 50 | 301 | |
| 44 | | | | | | | | |
| 45 | | | | | | | | |
| 46 | | | | | | | | |
| 47 | | | | | | | | |
| 48 | | | | | | | | |

Hoja1 Hoja2 Hoja3 Hoja4 Hoja5 Hoja6 Hoja7

Listo NUM

## Buscando el mínimo común múltiplo

En una experiencia como la que estamos estudiando pueden aparecer soluciones inesperadas. Por ejemplo, un grupo multiplicó los números citados en el enunciado 2, 3, 4, 5 y 6 y al resultado le sumó 1, obteniendo 721 que es efectivamente múltiplo de 7 pero no el más pequeño. Al preguntar el razonamiento que habían seguido para llegar a él daba la sensación de que se habían comportado como aquellos alumnos que para hallar la solución de un problema combinan datos que aparecen en el mismo con una o varias operaciones elementales (suma, producto,...) recientemente estudiadas. Por supuesto no fueron capaces de probar si era o no el múltiplo de 7 más pequeño.

Pero pensando en el problema de encontrar el menor múltiplo de 7 se llegó a una solución más satisfactoria. La idea de menor llevó a hallar el mínimo común múltiplo de 2, 3, 4, 5 y 6, es decir 60, y a continuación a darse cuenta que el número 61 tiene de resto 1 al dividir por 2, 3, 4, 5 y 6. Entonces la progresión aritmética:

61, 121, 181, ...

está formada por números que cumplen la condición de dar resto 1 al dividir por 2, 3, 4, 5 y 6. Lo único que falta es encontrar en ella el primer múltiplo de 7. Por supuesto, se puede seguir buscando otros múltiplos de 7 (por ejemplo 721). La dificultad de encontrar más múltiplos de 7 con comodidad llevó a plantearse utilizar el programa DERIVE.

Entonces, se escribió la expresión:

*VECTOR*(60**N* + 1, *N*, 1, 20)

La función *Vector* de DERIVE genera un vector cuyas componentes son el resultado de sustituir diferentes datos en una misma expresión (García, Martínez y Miñano, 1995). En este caso, genera los 20 primeros términos de la progresión aritmética citada. Al pedirle a DERIVE mediante la orden *Expand* que desarrollase el vector anterior se obtuvo:

*En una experiencia como la que estamos estudiando pueden aparecer soluciones inesperadas*

[61, 121, 181, 241, 301, 361, 421, 481, 541, 601, 661, 721, 781, 841, 901, 961, 1021, 1081, 1141, 1201]

Como había que encontrar los múltiplos de 7 se vio la necesidad de emitir un mandato paralelo: hacer un vector que mostrase el resto (o el módulo) de dividir cada elemento del vector anterior por 7:

*VECTOR*(*MOD*(60**N*+1, 7), *N*, 1, 20)

y se obtuvo entonces el nuevo vector:

[5, 2, 6, 3, 0, 4, 1, 5, 2, 6, 3, 0, 4, 1, 5, 2, 6, 3, 0, 4]

Una simple correspondencia biunívoca nos permite hallar los valores requeridos y comprobar que el 5.°, el 12.°, el 19.°,... términos de la sucesión son múltiplos de 7.

Por otra parte, después de analizar el método anterior se llegó a la conclusión que el sistema de ecuaciones del apartado anterior se hubiese resuelto de manera más directa utilizando la orden *Solve* del programa DERIVE:

*SOLVE*([7**x*=2**y*+1, 7**x*=3**z*+1, 7**x* = 4**u* +1,
7**x* = 5**v*+1, 7**x* = 6**w*+1, *x*= 1],[*x*, *y*, *z*, *u*, *v*, *w*])

La orden *Solve* admite una lista de ecuaciones y una lista de incógnitas respecto a las cuales se quiere resolver el sistema. Cuando se da la orden *Expand* para el programa devuelve en pantalla:

[*x*=1, *y*=3, *z*=2, *u*=1.5, *v*=1.2, *w*=1]

variando los valores de *x*, como en la hoja de calculo, buscamos hasta encontrar una solución en la que todas las incógnitas sean números enteros. Esto ocurre como en la hoja de calculo para el valor de $x = 43$.

## Programación

Otros grupos de alumnos habían organizado, por su parte, una búsqueda sistemática del primer múltiplo de 7 que cumpliese las condiciones del problema. Para ello, dividieron 7 sucesivamente por 2, 3, 4,... y luego hicieron lo mismo para 14, 21,... y demás múltiplos de 7. Cuando llegaron a 63, desistieron en su empeño. Sin embargo, la idea no es en absoluto desdeñable. El método empleado es justamente lo que haría un ordenador debidamente programado. El problema es la dificultad que conlleva programar un ordenador en un lenguaje conocido tal como LOGO, BASIC, PASCAL,...

En cualquiera de estos lenguajes de programación imperativa las herramientas necesarias para resolver un problema como el planteado se pueden reducir a cuatro:

- *asignación*, que indicamos con el signo «:=», por ejemplo cuando a la variable $n$ le damos el valor 7, ($n := 7$), o cuando aumentamos 7 al valor que tiene ya la variable $n$, ($n := n + 7$).

- *composición secuencial de instrucciones*, que indicamos con el signo «;», y que señala el orden secuencial en que deben realizarse las instrucciones del programa.
- *composición alternativa de instrucciones*, que escribimos si <condición> entonces <acción>, que tienen incluso la posibilidad de encadenarse unas a otras como en «si <el módulo de *n* entre 2 es igual a 1> entonces si <el módulo de *n* entre 3 es igual a 1> entonces <escribe *n*>».
- *composición iterativa de instrucciones*, que escribimos mientras <condición> hacer <acciones>, como en «mientras <el número *n* sea menor que 1000> hacer <buscar el modulo de *n* entre 2, entre 3, etc.>».

Provisto de estas posibilidades el ordenador reduce el problema a una búsqueda bruta como la planteada por este grupo de alumnos: examinar sucesivamente todos los múltiplos de 7 y cuando haya uno que pase el filtro de la divisibilidad escribirlo.

```
n := 7;
mientras n < 2000 hacer
    si n mod 2 = 1 entonces
        si n mod 3 = 1 entonces
            si n mod 4 = 1 entonces
                si n mod 5 = 1 entonces
                    si n mod 6 = 1 entonces
                        escribe n
    n := n + 7;
```

Escribiendo este pseudocódigo en un ordenador provisto de un lenguaje adecuado como los anteriormente citados nos devuelve los múltiplos de 7 hasta el número 2000.

## Algunas conclusiones y sugerencias

La primera pregunta que surge en una reflexión sobre el tema es cuál es el papel que cumple el ordenador en cada uno de los casos. En los dos primeros casos se concluye que el alumno asume una parte de la resolución de un problema haciendo que el ordenador ejecute una parte del trabajo. El ordenador funcionaría en este caso de manera similar a la que podría ser la actuación de otra persona que ayuda o guía al alumno asumiendo una parte de su trabajo, liberándolo por ejemplo de una carga mental excesiva, facilitándole la memoria o asumiendo una parte de los procedimientos que él no es capaz de dominar. El ordenador asume una parte del trabajo cognitivo que requiere la resolución del problema y se convierte en un regulador externo de la actividad del alumno (Martí, 1992). El tercer caso es diferente, aquí el ordenador asume un protagonismo mayor. De la resolución de un problemas de matemáticas hemos pasado a la resolución del mismo problema en informática. El método usado es el mismo pero un humano abandona un proceso tan largo si sabe que se puede automatizar. Sin embargo de todos los procesos de resolución que hemos examinado. y en que ha intervenido el ordenador, es justamente aquí en la programación donde notamos una diferencia cualitativa importante. Se podría decir que hay un pensamiento de ordenador, en realidad una forma de pensar del programador del mismo, que influye en la resolución de un problema.

*La primera pregunta que surge en una reflexión sobre el tema es cuál es el papel que cumple el ordenador en cada uno de los casos*

La segunda pregunta lleva a analizar las relaciones entre el trabajo previo hecho por cada grupo antes de utilizar el ordenador, el trabajo que éste hizo y cómo se complementaron ambos. Todos los alumnos sintieron que había una correlación entre el trabajo previo realizado por cada grupo en la clase y el apoyo posterior prestado por el ordenador. En el primer caso, se realizó una cierta elaboración que llevó a plantear un sistema de ecuaciones con las dificultades de abstracción consiguientes. Ante un bloqueo, la imposibilidad de resolver la ecuación, la hoja de cálculo –ya experimentada en contextos algebraicos (Filloy y Sutherland, 1996)– ayudó a salir del punto muerto. Aunque se les hizo ver a los alumnos que se podía resolver manualmente el sistema de ecuaciones, éstos concluyeron que sin la hoja de cálculo no hubieran terminado el problema. De alguna manera el ordenador fue un *insight* para ese grupo de alumnos.

*La segunda pregunta lleva a analizar las relaciones entre el trabajo previo hecho por cada grupo antes de utilizar el ordenador, el trabajo que éste hizo y cómo se complementaron ambos*

En cambio, el segundo caso es más simple. El grupo hizo un trabajo previo muy completo al que sólo le faltaban unos pequeños cálculos. El ordenador se utilizó como una simple calculadora, que libera de cálculos más o menos largos pero el problema estaba prácticamente resuelto. También en esta experiencia puede surgir una reflexión sobre la contaminación informática: puesto que existen los ordenadores hay que utilizarlos (Smith 1994). Esta crítica puede argumentarse siempre desde el momento que analizamos y volvemos a resolver problemas que tienen historia y se han planteado cuando no existían herramientas de cálculo potentes. La crítica se debilita cuando analizamos problemas nuevos o antiguos, aparcados por falta de solución, en nuestra era informática.

El tercer caso es el más complejo de todos. Sin embargo, el trabajo de los alumnos parece el más elemental: organizar una búsqueda sistemática. Sin embargo, han avanzado un paso importante: han descubierto cómo se piensa para programar un ordenador. Aquí el ordenador no es un auxiliar de trabajo sino que adquiere todo su protagonismo. En realidad, hemos trasladado nuestras dificultades de resolución de un problema de un contexto matemático a un contexto informático. Con este tipo de resolución es probable que mejoremos la enseñanza de la programación de ordenadores pero es más dudoso que mejoremos el aprendizaje de la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, volviendo la reflexión a la inversa ¿podemos aprender de los métodos que se emplean para resolver problemas en informática para resolver problemas en matemáticas? En ese sentido la programación vuelve a adquirir al menos parte de la importancia que tuvo cuando los interfaces de comunicación hombre/ordenador estaban mucho menos desarrollados.

*¿podemos aprender de los métodos que se emplean para resolver problemas en informática para resolver problemas en matemáticas?*

Se podría argumentar que el problema es demasiado elemental como para permitir apreciar suficientemente las ayudas informáticas incorporadas. Volvería asurgir el tema de la contaminación informática que nos obliga a utilizar el ordenador aún sin necesidad. Sin embargo, al intentar resolver problemas más complejos, como el siguiente, los alumnos apreciaron las ventajas de poder disponer de recursos informáticos:

COCONUTS

Cinco hombres y un mono naufragan y se refugian en una isla desierta. Los náufragos pasan todo el primer día recogiendo cocos. Por la noche, uno de ellos se despierta y desconfiado decide separar su parte. Dividió los cocos en cinco montones, y como sobraba un coco se lo dio al mono. Después ocultó su parte y volvió a acostarse. Poco más tarde un segundo náufrago se despierta y hace lo mismo. Al dividir los cocos en cinco montones volvió a sobrar un coco; también se lo dio al mono. Después ocultó su parte y se durmió. Uno tras otro, el tercero, cuarto y quinto náufragos hacen lo mismo. Por la mañana del día siguiente agruparon los cocos que aún quedaban en cinco montones iguales y esta vez no sobró ningún coco. ¿Cuántos se habían recolectado inicialmente?

Este problema desborda las posibilidades de controlar la situación por parte de los alumnos y difícilmente llegan a una solución sin un previo entrenamiento en recursos informáticos. Con éstos, en cambio, se puede convertir en un ejercicio para ver si han aprendido bien la lección anterior.

**Antonio Sarmiento**
Facultad de Educación
Universidad da Coruña.
ENCIGA

## Referencias

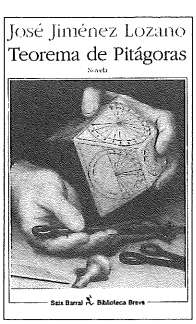
BALACHEFF, N. y J. J. KAPUT (1996): «Computer-Based Learning Environments in Mathematics», en A. J. BISHOP y otros (eds.): *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, 469-501.

FILLOY, E. y R. SUTHERLAND (1996): «Designing Curricula for Teaching and Learning Algebra», en A. J. BISHOP y otros (eds.): *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, 139-160.

GARCÍA A., A. MARTÍNEZ y R. MIÑANO (1995): *Nuevas Tecnologías y Enseñanza de las Matemáticas*, Síntesis, Madrid.

MARTÍ, E. (1992): *Aprender con Ordenadores en la Escuela*, ICE-Horsori, Barcelona.

SMITH, E. (1994): «Mathematics, Computers and People: Individual and Social Perspectives», en P. ERNEST (ed.): *Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematical Education*, The Falmer Press, 73-91.




*Teorema de Pitágoras*
José Jiménez Lozano

*La pirámide*
Ismaíl Kadaré