SUMA 32
noviembre 1999, pp. 11-16

Matemática conceptual: la propuesta didáctica de F.W. Lawvere y S.H. Schanuel

Luis Español

El texto que sigue es un comentario sobre un libro de F.W. Lawvere y S.H. Schanuel, de publicación reciente pero con una década de gestación, que contiene una experiencia concreta de introducción de conceptos de la teoría de categorías en un estadio temprano de la enseñanza de las matemáticas. El comentario incluye un breve análisis comparativo de esta experiencia actual con la protagonizada por P.J. Hilton en torno al año setenta. La diferencia entre ambas propuestas se explica en términos de la evolución general de la teoría a lo largo de la segunda mitad del presente siglo, particularmente en el último cuarto.

ARTÍCULOS

ESQUEMA de la evolución de la teoría de categorías

Este apunte histórico sobre la teoría de las categorías es por necesidad breve y en consecuencia selectivo, dirigiendo la selección como es natural hacia el tema de este trabajo, que se explica mejor insertándolo en una perspectiva histórica, pues la obra que vamos a comentar (Lawvere y Schanuel, 1997) responde a un punto de vista que ha ido tomando forma con la evolución de la teoría de categorías, especialmente desde los enfoques ideológicos de F.W. Lawvere.

La formulación explícita de las definiciones básicas de la teoría de categorías fue realizada en los primeros años cuarenta por S. Eilenberg y S. Mac Lane (1945). Esta aparición se produjo en el ámbito de la investigación en topología algebraica y con la finalidad de obtener un lenguaje que permitiera expresar de modo concreto y simple construcciones matemáticas cuya complejidad en detalle era muy aparatosa. El propio fundador Mac Lane aplicó ya en 1950 esta función unificadora y simplificadora a las categorías lineales (con sumas y productos finitos isomorfos, por ejemplo grupos abelianos). Hasta finales de los años cincuenta no varió la situación, si bien el lenguaje categorial se trasladó a otros ámbitos vecinos, como la teoría de haces que se utilizaba en el análisis complejo o la geometría algebraica. El concepto de par de funtores adjuntos, formulado por D.M. Kan a finales de los cincuenta, puede considerarse como el punto clave para el cambio de estatuto que se produjo en la década siguiente (Mac Lane, 1988), de modo que los teoremas sobre funtores adjuntos iniciaron propiamente la teoría de categorías.

Este cambio fue simultáneo con el movimiento de reforma educativa que implantó la «matemática moderna» en los niveles básicos de la enseñanza a lo largo de todo el mundo occidental. En cuanto a los contenidos, la reforma trasladaba a los niveles educativos básicos la matemática estructural elaborada a principios de siglo en el entorno alemán de D. Hilbert y difundida por la obra del colectivo francés N. Bourbaki, a la que no se había incorporado la teoría de categorías, nacida norteamericana. La teoría de conjuntos y los conjuntos dotados de diversas estructuras fueron el nuevo elemento conductor de la enseñanza de la matemática desde los niveles más elementales. Pero la reforma no sólo cambió los objetivos de aprendizaje y los contenidos de la educación matemática, sino que también proclamó la necesidad de aumentar la formación matemática de la población, lo que implicó un crecimiento notable de los estudiantes universitarios de matemáticas y con ello del contingente de jóvenes investigadores.

Este hecho sociológico propició que la teoría de categorías fuera cultivada por un grupo numeroso de matemáticos, muchos de ellos jóvenes, que la desarrollaron de manera intensiva en los años sesenta y setenta, destacando entre otros los grupos norteamericanos reunidos en torno a los fundadores y las escuelas francesas de A. Grothendieck y de Ch. Ehresmann. Los primeros pusieron más énfasis en el desarrollo estructural de la teoría y los segundos en su aplicación a la geometría. Un fruto importante de la fusión de ambas tendencias fue la elaboración de la teoría de topos en torno a 1970 por parte de Lawvere y M. Tierney, teoría que recoge aspectos geométricos y lógicos de la experiencia matemática[1]. A lo largo de la década de los setenta, primero la teoría general de categorías y después la teoría particular de topos completaron su desarrollo básico y aparecieron los primeros libros monográficos de referencia que todavía están vigentes.

Un precedente esencial de la noción de topos fue la caracterización de la categoría de los conjuntos sin usar el predicado primitivo «pertenencia», realizada por Lawvere en 1963, que abrió camino a una fundamentación de la matemática más flexible que el habitual paraíso de G. Cantor. Es bien conocido que hay un lapso de tiempo entre la elaboración de un nuevo clima conceptual en el mundo de la investigación matemática y su incorporación a los centros universitarios primero y a la educación matemática general después. Resulta curioso que en la década de los sesenta coexistió la extensión al nivel básico de las imágenes de la matemática estructural, fundamentada en el rígido paraíso idealista de Cantor-Hilbert-Bourbaki, con la irrupción en el nivel investigador de una multiplicidad de paraísos flexibles de porte dialéctico, innovación que tuvo a Lawvere como conductor.

Por los mismos años centrales del siglo hizo aparición otro elemento llamado a introducir cambios importantes en la práctica matemática, el ordenador. Desde los años setenta existe una relevante línea de investigación que aplica la teoría de categorías a la computación teórica, corriente que a partir de los ochenta ha absorbido a buena parte de los matemáticos que inicialmente trabajaron en la teoría general de categorías[2]. Ya sea en la matemática más tradicional, presidida por el infinito, o en la nueva computación teórica, necesariamente finitaria, la teoría de categorías se está mostrando como una herramienta conceptual útil para guiar la investigación, el estudio y la transmisión del conocimiento matemático en sus aspectos continuos y discretos. Unas veces se presenta como el marco de trabajo adecuado para conectar diversas estructuras matemáticas –como en su origen histórico–, otras como una estructura matemática muy general que tiene su propio desarrollo –que comenzó en los sesenta– y, en tercer lugar, las categorías describen teorías formales –como señalan Barr y Wells (1995) en su texto de categorías para uso en computación– de modo más eficaz que otros medios usados antes por lógicos y algebristas.

...son un paso adelante en la línea estructuralista de Bourbaki, y por ello es natural que se hicieran sugerencias para incorporar la teoría de categorías a la enseñanza secundaria, como una especie de colofón a las diversas estructuras que eran el soporte para el aprendizaje de los conjuntos de números o de transformaciones geométricas.

Las categorías y la matemática moderna de los sesenta

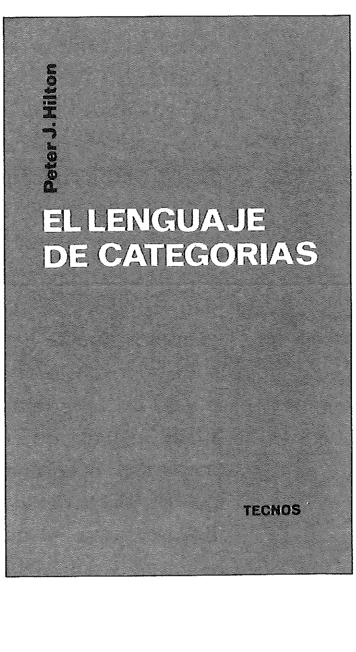
Las categorías, que surgen en la matemática superior como un lenguaje universal unificador y simplificador, se convierten luego en una teoría sistematizadora de las diversas estructuras matemáticas e incluso en una formalización de la propia noción heurística de estructura (Corry, 1996). En este sentido, son un paso adelante en la línea estructuralista de Bourbaki, y por ello es natural que se hicieran sugerencias para incorporar la teoría de categorías a la enseñanza secundaria, como una especie de colofón a las diversas estructuras que eran el soporte para el aprendizaje de los conjuntos de números o de transformaciones geométricas. Aunque estas sugerencias no llegaron a implantarse en los planes de estudios, en algunos países jugaron un papel importante en la formación de los profesores de la matemática moderna.

1 El diverso origen de los topos puede verse en McLarty (1990). Más resumido es Bunge (1984). Puede verse también Español (en prensa).

2 Como muestra del origen histórico puede verse Manes (1974). Un libro de texto reciente, escrito por teóricos relevantes de la teoría de categorías para uso específico de investigadores y estudiantes de ciencias de la computación es Barr y Wells (1995).

Baste recordar aquí unas iniciativas de P.J. Hilton, investigador de primer nivel en teoría de categorías y topología algebraica, a la vez que preocupado por y ocupado en la enseñanza de las matemáticas. En los primeros setenta tuvieron amplia difusión en los círculos de la educación matemática unas propuestas de Hilton que presentaban materiales para la introducción en secundaria de la teoría de categorías (las nociones primeras de categoría, funtor, transformación natural y construcción universal) y de un programa básico de topología dedicado al grupo fundamental de un espacio, que es un ejemplo de funtor que tiene como dominio una categoría de estructuras topológico-geométricas y como rango otra de estructuras algebraicas (Hilton, 1975). Este autor, por los mismos años, publicó junto con H.B. Griffiths un texto de gran calidad dedicado a la enseñanza en el primer nivel universitario de la matemática clásica (Hilton y Griffiths, 1970), presentada desde un punto de vista estructural contemporáneo. El libro empieza con la teoría descriptiva de conjuntos, concebida como el lenguaje de las matemáticas, sigue con la exposición de los elementos de las ramas clásicas, aritmética, geometría coordenada (no la de Euclides), álgebra y análisis –precedido éste por la construcción formal de los sistemas de números y la topología elemental del espacio n-dimensional, con homotopía y grupo fundamental–, y termina con una parte dedicada a los fundamentos, que incluye un mínimo de teoría de categorías y lógica matemática. Se trata pues de una aplicación pedagógica en el espíritu moderno de Bourbaki-Piaget, con un complemento sobre los aspectos fundacionales en el que aparece la teoría de categorías.

Baste recordar aquí unas iniciativas de P.J. Hilton, investigador de primer nivel en teoría de categorías y topología algebraica, a la vez que preocupado por y ocupado en la enseñanza de las matemáticas.



En la presentación de la obra se menciona la importancia creciente de los elementos computacionales en las matemáticas, aunque quedaban fuera de la finalidad que inspiraba el texto. Este reconocimiento fue todavía más explícito en la presentación de la reedición de 1978, en la que se defiende la pervivencia del texto a pesar de los avances del computador en la sociedad y en la educación.

Matemática conceptual y enseñanza

El libro que motiva este comentario (Lawvere y Schanuel, 1997) recoge una nueva experiencia docente, esta vez aislada y no en la onda de una reforma en marcha, realizada veinte años después con una mentalidad mucho más radical en lo que se refiere al posible papel de la teoría de categorías en la educación matemática, pues los conceptos primeros aparecen en un estadio temprano y no como colofón de un conocimiento previo, extenso y estructurado, en varias ramas tradicionales de las matemáticas. Además, el conocimiento del esqueleto categorial de las matemáticas por parte del estudiante principiante se defiende por su utilidad para la formación de futuros científicos en ramas com la física, la computación, la lógica, la lingüística, etc., además de las matemáticas.

Pero es mejor describir la obra antes de comentarla. Que *Matemática Conceptual* haya aparecido en 1997 bajo el prestigioso sello editorial de Cambridge University Press da un nuevo alcance, y sin duda multiplicará su difusión, a un libro que vio la luz en 1991, en una edición doméstica de la Universidad de Buffalo (Estado de New York, EE.UU.) de la que son profesores los autores, y fue traducida en 1994 al italiano. Lawvere y Schanuel han sido protagonistas de primera línea en el desarrollo de la teoría de categorías en las últimas décadas, especialmente el primero de ellos, que ha liderado la actividad internacional en amplias corrientes de investigación. Al mismo tiempo, ha defendido desde hace décadas que las categorías son no sólo un instrumento para guiar la investigación y el uso de las matemáticas avanzadas, sino que también están indicadas en la enseñanza de esta disciplina por su eficacia conceptual y porque abundan ejemplos útiles de naturaleza elemental (Lawvere, 1986). Este es el terreno apenas explorado que los autores abordan con su acción directa en un aula experimental, reflejada después en el libro.

Conceptual Mathematics

A first introduction to categories

F. WILLIAM LAWVERE
State University of New York at Buffalo

STEPHEN H. SCHANUEL
State University of New York at Buffalo

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

La obra (360 pp.) se divide en una sección previa y cinco partes, formada cada una de ellas por un «artículo» y varias «secciones». Los artículos (que juntos suman unas 70 páginas) contienen el texto básico de su parte respectiva, que los profesores entregan como material escrito a los estudiantes. Las secciones reflejan en formato texto la acción directa en el aula[3], en la que se discuten los conceptos contenidos en los artículos, se dan ejemplos, se aclaran dudas, se precisan o completan cuestiones, etc. En algunas secciones se eleva un poco la dificultad media de la obra, que lleva intercalados ejercicios para que el alumno o lector ponga a prueba su comprensión; muchos de ellos se resuelven luego en el texto por un procedimiento de búsqueda de la solución, y no por simple exposición sintética de la misma. Abundan los diagramas internos, para reflejar la estructura de los conjuntos y las estructuras que se manejan, y externos, para representar mediante flechas los vínculos entre los objetos de una categoría. Como se ve por el número de páginas, el contenido expositivo lineal (artículos) ocupa la quinta parte de la obra, estando las otras cuatro (secciones) dedicadas a la aclaración recurrente de los contenidos con un criterio pedagógico basado en la comunicación.

Los títulos de cada parte y del correspondiente artículo son muy similares, así que es suficiente con dar los de las primeras:

Las secciones reflejan en formato texto la acción directa en el aula, en la que se discuten los conceptos contenidos en los artículos, se dan ejemplos, se aclaran dudas, se precisan o completan cuestiones, etc.

3 En la preparación de las notas del aula los autores tuvieron la colaboración de E. Faro.

I. La categoría de los conjuntos.

II. Isomorfismos.

III. Categorías de conjuntos estructurados.

IV. Propiedades elementales de aplicación universal.

V. Propiedades superiores de aplicación universal.

La primera parte introduce la noción de categoría (objetos X, morfismos $f{:}X\to Y$, identidades $Id_X{:}X\to X$, y composición $gf{:}X\to Z$, siendo f como antes y $g{:}\,Y\to Z$) partiendo del ejemplo de los conjuntos finitos y las aplicaciones entre ellos. Compara la composición con el producto de números observando la mayor riqueza de la primera parte de la analogía. Luego introduce los isomorfismos ($fg=Id=gf$) y con ellos las secciones y las retracciones (ecuación $pj=Id$), junto con los morfismos idempotentes ($ff=f$) y las involuciones ($ff=Id$). En la tercera parte se presentan de un modo muy simple las ideas de conjunto con estructura y de aplicación que conserva la estructura. Se utiliza, por ejemplo, un conjunto X estructurado con un endomorfismo $\alpha{:}X\to X$, lo que se puede representar de modo muy intuitivo como el conjunto X de los estados de un sistema dinámico o de una máquina, con un procedimiento α de cambio de estado que actúa de modo discreto, siendo la composición iterada α^n el resultado de repetir n veces el cambio de estado. Así, un morfismo $(X,\alpha)\to(Y,\beta)$ de la categoría de conjuntos con estructura será en este caso una aplicación $f{:}X\to Y$ tal que $f\alpha=\beta f$, verificando que la composición, definida de modo natural, cumple las condiciones requeridas por la noción de categoría. En la parte cuarta se abordan, a través de la gama variada de ejemplos que se han ido desarrollando a lo largo de la obra, las nociones de objeto inicial y final, y las de producto y de suma de objetos, definidos mediante construcciones universales que las determinan salvo isomorfismo. Es interesante, y muy característico del enfoque categorial, el estudio de los puntos de un objeto X, que son los morfismos $1 \to X$ cuyo dominio es el objeto final; en los conjuntos un punto equivale a un elemento, pero no es así en otras categorías bien simples, lo que está relacionado con las condiciones de extensionalidad que establecen cuando dos morfismos (entre los mismos objetos) son iguales. Por ejemplo, en la categoría de los conjuntos punteados, cada conjunto punteado tiene un punto único que corresponde al elemento seleccionado. Junto con los productos y las sumas se analizan el posible isomorfismo entre ambas construcciones universales y la relación distributiva[4]. Finalmente, en la quinta y última parte se realiza un somero encuentro con la noción de topos, un tipo especial de categorías que admiten dos construcciones muy características de los conjuntos: el objeto Y^X de morfismos de X en Y (exponenciación[5]) y el conjunto ordenado (o categoría) $\mathcal{P}(X)$ de las partes de un objeto X. Los autores exponen con detenimiento cómo se determina cada parte A de X mediante un morfismo característico $X \to \Omega$ cuyo codominio es un objeto de valores de verdad, lo que hace que el topos lleve adherida una lógica, que en los conjuntos es la clásica asociada a verdadero-falso; pero la obra incluye ejemplos simplicísimos en los que esta lógica no es bivaluada ni booleana.

Por ejemplo, un grafo dirigido es un conjunto de flechas con otro de vértices junto con relaciones de incidencia que hacen que cada flecha tenga un vértice inicial y otro final, estructura representable en muchos casos de modo gráfico. Si tomamos un subgrafo A de un grafo X (A es un subconjunto de flechas con los objetos iniciales y finales correspondientes a cada una de ellas) y una flecha x de X, podemos estudiar la relación de pertenencia de la flecha x al subgrafo A, observando dos puntos de vista:

1. El meramente conjuntista nos hace ver los dos valores de verdad habituales del predicado pertenencia: verdadero o falso.
2. Desde el punto de vista de la estructura la situación es más rica, pues la flecha x puede pertenecer efectivamente al subgrafo A (valor verdadero de la pertenencia) o puede no pertenecer en absoluto, entendiendo por ello que ni x, ni su vértice inicial, ni su vértice final están en A (valor falso de la pertenencia); pero hay otros tres valores de verdad intermedios, que el lector puede fácilmente determinar, en función de la pertenencia o no de los vértices de la flecha. Este conjunto de cinco valores de verdad posee una estructura lógica (unión, intersección, negación, implicación), parecida pero no igual a la booleana, que se puede analizar por medio de tablas de verdad.

En su conjunto, la obra recopila un experimento pedagógico que avanza en la introducción de las categorías hasta quedarse a las puertas de los funtores adjuntos, noción que aparece implícita en algún ejemplo concreto (por ejemplo la exponenciación) pero que no se introduce de modo explícito.

En su conjunto, la obra recopila un experimento pedagógico que avanza en la introducción de las categorías hasta quedarse a las puertas de los funtores adjuntos, noción que aparece implícita en algún ejemplo concreto (por ejemplo la exponenciación) pero que no se introduce de modo explícito. El método consiste básicamente en introducir conceptos que se realizan y discuten mediante ejemplos sencillos (sobre todo conjuntos con estructuras simples de naturaleza discreta) pero que admiten una gran cantidad de generalizaciones útiles en ámbitos muy diversos de la matemática superior discreta y continua. No obstante, aparecen también numerosos ejercicios y algunos fragmentos más formales con sencillos teoremas demostrados que forman una incipiente teoría de categorías abstracta.

Ha dicho Mac Lane (1988) que las matemáticas consisten en realizar cálculos y elaborar conceptos, distinción que sin duda han tenido en cuenta los autores de *Matemática Conceptual*, porque advierten en la presentación del libro que ponen el énfasis no tanto en los cálculos algorítmicos cuanto en «el análisis que permite decidir qué cálculos hay que hacer y en qué orden», y ello desde los estadios más elementales de las matemáticas. En este libro, los conceptos nuevos se motivan y ejemplifican con una aritmética elemental, con ideas cinemáticas simples, con modelos combinatorios discretos como los grafos, con relaciones de parentesco, etc.

Volviendo al proceso histórico, recordemos que el objetivo de Hilton y Griffiths (1970) era ofrecer a lectores y estudiantes de segundo nivel (profesores de niveles elementales muchos de ellos) una relectura de las matemáticas clásicas que permitiera ver las ideas recurrentes que surgen por doquier, mostrando la unidad de las partes que aparecieron separadas en la experiencia matemática previa. Según estos autores, este propósito de unificación es parcialmente estético, pero tiene también la finalidad práctica de ayudar a controlar masas ingentes de conocimiento detallado. Por esta razón incluyeron el capítulo sobre categorías y funtores, sin ir más allá de introducir el lenguaje categórico.

4 Como ejemplos negativos de la distributividad se consideran la categoría de los conjuntos punteados y las categorías lineales.

5 Aprovecha la noción de categoría cartesiana para discutir el argumento diagonal de Cantor, explicado en una sección de la parte cuarta para una categoría con productos finitos.

Para Lawvere y Schanuel, las categorías no aparecen como la fase avanzada de un enfoque estructural, sino como expresión de conceptos muy generales pero a la vez muy básicos «que atraviesan las fronteras artificiales que separan la aritmética, la lógica, el álgebra, la geometría, el cálculo, etc.» y por ello sirven como preparación inicial para el pensamiento abstracto común a las diversas ramas, clásicas y actuales, en que dividimos a la más antigua de las ciencias, así como sus aplicaciones más diversas. Además, a la vez que se conoce la categoría de los conjuntos clásicos, proponen el conocimiento temprano y simultáneo de otras categorías, en particular de los topos, que dan un soporte más flexible a las más variadas partes de las matemáticas. Por eso, y con ellos el editor, sostienen que las ideas y las técnicas de las categorías deberán ser conocidas por todo aquel que desee estar al corriente de las matemáticas y sus aplicaciones, desde los niveles más elementales, en el siglo veintiuno.

Como ya decía Klein a principios del siglo que ahora termina, los profesores de matemáticas deben dominar algo más de lo concreto que tienen que enseñar, en particular el espíritu matemático de su época. Siguiendo su dictado podemos concluir que, aunque la materia no se incorpore a los programas elementales, los profesores deberían conocer las categorías del modo como son presentadas por Lawvere y Schanuel. Por otra parte, repasar desde el punto de vista categorial las matemáticas ya sabidas es un magnífico estímulo para mantener vivo y actualizado el conocimiento. Si cunde el ejemplo que los autores han dado con su experiencia personal, que algunos entusiastas secundan en diversos niveles educativos, llegará el momento en que los expertos en educación matemática dedicarán su esfuerzo y mejor preparación a la didáctica de la teoría de categorías.

Como ya decía Klein a principios del siglo que ahora termina, los profesores de matemáticas deben dominar algo más de lo concreto que tiene que enseñar, en particular el espíritu matemático de su época.

Agradecimiento

El autor agradece a la Cátedra Miguel Sánchez Mazas, de la Universidad del País Vasco, la oportunidad que le brindó de exponer el contenido de este artículo en las Jornadas sobre Matemáticas y su Enseñanza, celebradas en San Sebastián los días 26 y 27 de octubre de 1998, en el acogedor marco de la E. U. del Profesorado de Guipuzkoa.

Luis Español
Departamento de Matemáticas y Computación.
Universidad de La Rioja

Bibliografía

BARR, M. y Ch. WELLS (1995): *Category Theory for Computing Science* (2nd ed.), Prentice Hall, New York.

BUNGE, M. (1984). «Topos in logic and logic in topos», *Topoi,* 3, 13-22.

CORRY, L. (1996): *Modern algebra and the rise of mathematical structures,* Birkhäuser, Basel.

EILENBERG, S y S. MAC LANE (1945): «General theory of natural equivalences», *Trans. Amer. Math. Soc.*, 58, 231-294.

ESPAÑOL, L. (en prensa): «Dialéctica del cálculo infinitesimal», en E. AUSEJO y M. HORMIGÓN (eds.): *Ciencia e Ideología,* Siglo XXI, Madrid.

HILTON, P.J. (1975): *El lenguaje de categorías* (Traducción J. de Lorenzo), Tecnos, Madrid.

HILTON, P.J. y H.B. GRIFFITHS (1970): *A comprehensive textbook of Classical Mathematics. A contemporary interpretation,* Van Nostrand Reinhold, New York (1978, Springer-Verlag).

LAWVERE, F.W. (1986): «Taking categories seriously», *Revista Colombiana de Matemáticas XX* (Memorias del Seminario-Taller en Teoría de Categorías, Bogotá, agosto de 1983), 147-178.

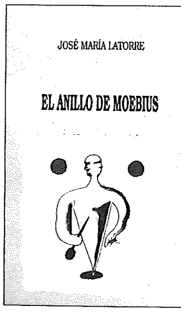
LAWVERE, F.W. y S.H. SCHANUEL (1997): *Conceptual Mathematics: a first introduction to categories,* Cambridge University Press.

MAC LANE, S. (1988): «Concepts and categories in perspective», en P. DUREN (ed.), *A century of mathematics in America,* Providence, A.M.S., Part I, 323-365.

MCLARTY, C. (1990): «The uses and abuses of the history of topos theory», *Brit. J. Phil. Sci.,* 41, 351-375.

MANES, E.G. (ed.) (1974): *Category theory applied to computation and control (Proceedings of the First International Simposium),* University of Massachusetts at Amherst.

El ocho
Katherine Neville



El anillo de Moebius
José María Latorre