SUMA 32
noviembre 1999, pp.5-9

La paradoja de San Petersburgo: una reivindicación didáctica

Gabriel Ruiz Garzón

ARTÍCULOS

Este trabajo trata de reivindicar la Paradoja de San Petersburgo como una mejor arma didáctica para introducir, a través de la equidad en un juego, el concepto de esperanza matemática.

LOS QUE ENSEÑAMOS Matemáticas sabemos que muchos conceptos matemáticos se nos presentan en los libros de texto, y por tanto los enseñamos a nuestros alumnos, totalmente descontextualizados, fuera de su génesis histórica. No siempre esa descontextualización va en beneficio de la claridad y de la compresión del concepto. La asepsia de muchos libros de texto, que despoja a los conceptos de su origen histórico, no siempre es beneficiosa.

El término paradoja viene del griego *para* y *doxos* y significa «más allá de lo creíble». Hoy su significado viene a ser «una creencia o afirmación contraria a las expectativas u opiniones aceptadas».

La utilización de paradojas en nuestras explicaciones, al igual que la resolución de problemas, es conveniente para que el alumno llegue a comprender determinados conceptos en toda su extensión. Son famosas, por ejemplo, las paradojas ligadas al continuo espacio tiempo, como las de Zenón de Elea (siglo v a.C.), siendo la de Aquiles y la tortuga la más conocida. O la paradoja de Galileo que enuncia que hay tantos números que sean cuadrados perfectos como números enteros. O las formuladas por David Hilbert en 1920, como la del hotel infinito, relacionadas con propiedades de los conjuntos infinitos. También son conocidas las paradojas de reordenación de los términos de una serie que afirman que la suma de una serie puede cambiar al redisponer sus términos.

Por ejemplo,

$$0=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots=1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots=1+0+0+\ldots=1$$

La paradoja de San Petersburgo está ligada al concepto de esperanza matemática. Concretamente, presenta una variable con esperanza infinita.

En los libros de probabilidad de comienzos de siglo, esta paradoja ocupaba un lugar preponderante. Con el paso de los años ha casi desaparecido de los manuales de texto, quedando si acaso, como un mero ejercicio rutinario de problemas, todo ello en aras del formalismo. Como pretendo demostrar en este trabajo, su utilización es altamente conveniente desde un punto de vista metodológico para la introducción del concepto de esperanza.

El juego

Imagínese que le ofrezco poder participar en el siguiente juego. ¿Lo haría?:

> Se trata de lanzar al aire continuamente una moneda hasta que salga cara por primera vez. Si esto no ocurre hasta que salga el vigésimo lanzamiento (o después), usted gana mil millones de pesetas. Si la primera cara sale antes, paga 100 pesetas.

El juego que le planteo es una variante de la paradoja de San Petersburgo. ¿Quizás piense que es una manera fácil de ganar veinte duros? Mientras lo decide, veamos algo de Historia.

El término de esperanza matemática se debe al matemático holandés Christian Huygens (1629-1695). En 1657 escribió una monografía en latín titulada *De ratiociniis in alae ludo* definiendo el concepto de *expectatio* y que después se tradujo por la palabra *esperanza*.

Christian Huygens (1629-1695)

Hay dos maneras de que un juego o lotería no sea justo. Bien porque los premios no sean iguales o bien porque los billetes no puedan ser extraídos con la misma «facilidad».

Huygens necesitaba saber la *expectatio*, o sea, el valor de cualquier juego en particular. Huygens pensaba que en una lotería justa está claro que cada apostador paga el mismo precio por cualquier billete. Mas aún, si el premio es z entonces cada uno de los n billetes debería costar z/n. Si los billetes cuestan más, el dueño de la lotería obtendría ganancias sin riesgo. Si los billetes cuestan menos, los apostadores podrían formar una asociación que obtendría ganancias sin riesgo.

Hay dos maneras de que un juego o lotería no sea justo. Bien porque los premios no sean iguales o bien porque los billetes no puedan ser extraídos con la misma «facilidad».

En el primer caso supóngase un juego con dos personas y quien gane puede conseguir un premio a o b con la misma facilidad. El precio por participar en el juego supongamos que es z y lo vamos a determinar en función de a y b. Luego cada jugador ha puesto una cantidad z y llegan al acuerdo de que el ganador debe pagar al perdedor la cantidad b. Esto significa que el ganador alcanzaría la cantidad $2z-b$ y el perdedor b. Para que el ganador consiga su premio a entonces la apuesta por participar en el juego debe valer

$$E(X) = z = \frac{a+b}{2}$$

luego el precio justo de la apuesta o la esperanza de cada jugador debe ser ésa.

En el segundo caso, supongamos que los billetes tienen distinta posibilidad de ser extraídos o lo que es lo mismo supongamos que compramos más de un billete en una lotería justa. Entonces, supongamos que hay p posibilidades de ganar a y q de ganar b. Mediante un razonamiento similar al primero llega a que el valor de esa jugada es

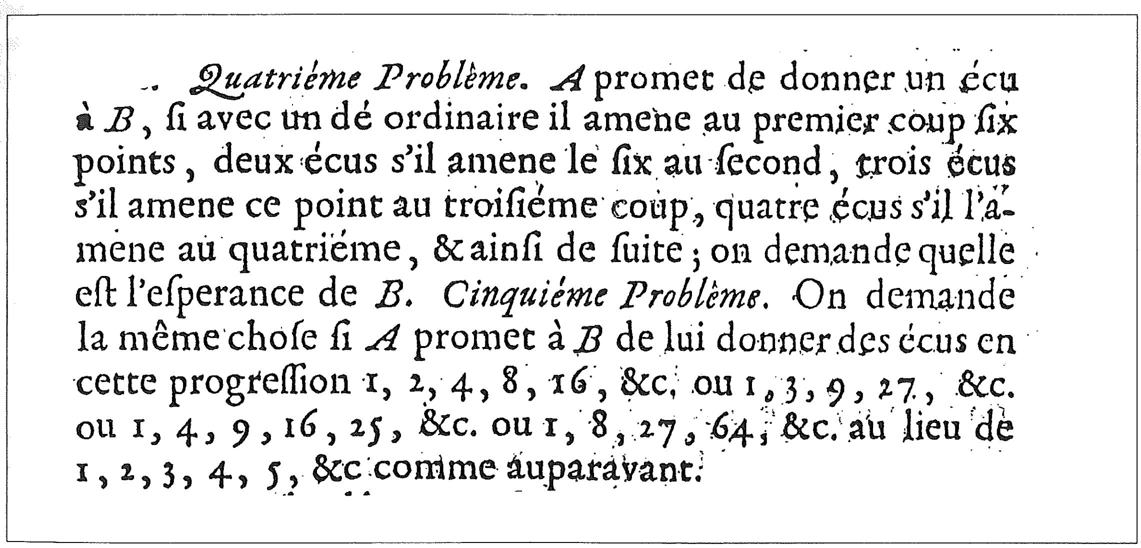
$$E(X) = z = \frac{pa+qb}{p+q}$$

Luego en ambos casos, tanto si el juego es justo o no, si se nos invita a jugar con un esquema dado de premios que dependen de los diversos resultados, exigimos un precio justo para aceptar la apuesta. La esperanza matemática de esa apuesta es lo que vale la apuesta. Si se paga más de la esperanza se tenderá a perder y si se paga menos se tenderá a ganar. Un juego o experimento aleatorio se dice justo o equilibrado si su esperanza global es cero, si un juego no es equilibrado se dice que es un juego con ventajas.

La paradoja o problema de San Petersburgo fue el problema quinto, propuesto por Nicolás Bernoulli (1687-1759) a Pierre Remond de Montmort en una carta con fecha 9 de septiembre de 1713 y que se reproduce en la figura 1.

D. Bernouilli

El primo de Nicolás, Daniel Bernoulli (1700-1782) lo estudió en la Memoria de la Academia de Ciencias de San Petersburgo, por cuyo motivo se conoce el problema con el nombre de esa ciudad rusa. Daniel permaneció en San Petersburgo durante un período de 8 años donde escribió diversos tratados dedicados a desarrollar la teoría probabilística de los errores. En uno de ellos, visto retrospectivamente, utilizó lo que hoy denominamos el método de máxima verosimilitud, en otro, incluyó un contraste de aleatoriedad sobre las órbitas de los planetas. Otros escritos tratan de hidrodinámica, mecánica y otros razonaban estadísticamente las ventajas de la vacunación contra la viruela, etc. Daniel llegó a ser muy conocido en vida. Para aseverar este hecho, a Daniel le gustaba contar la siguiente anécdota que un día le sucedió. En cierto viaje entabló conversación con un personaje ilustrado y versado en las Ciencias. Conforme la conversación se fue sucediendo, a este personaje le entraron ganas de saber quién era su joven acompañante. «¡Yo soy Daniel Bernoulli!», respondió él. «¡Y yo, Isaac Newton!», replicó el desconocido, convencido de que le estaba engañando.



.. *Quatriéme Problême.* *A* promet de donner un écu à *B*, ſi avec un dé ordinaire il amene au premier coup ſix points, deux écus s'il amene le ſix au ſecond, trois écus s'il amene ce point au troiſiéme coup, quatre écus s'il l'amene au quatriéme, & ainſi de ſuite; on demande quelle eſt l'eſperance de *B*. *Cinquiéme Problême.* On demande la même choſe ſi *A* promet à *B* de lui donner des écus en cette progreſſion 1, 2, 4, 8, 16, &c. ou 1, 3, 9, 27, &c. ou 1, 4, 9, 16, 25, &c. ou 1, 8, 27, 64, &c. au lieu de 1, 2, 3, 4, 5, &c comme auparavant.

Figura 1

En palabras de Daniel, la Paradoja de San Petersburgo queda como sigue:

> Pedro tira una moneda al aire tantas veces como sea necesario para sacar cara. Si esto ocurre en la primera tirada, tiene que dar a Pablo un ducado; si en la segunda 2; si en la tercera, 4; si en la cuarta, 8, y así sucesivamente, duplicando el número de ducados a cada jugada que es necesario efectuar. ¿Cuál es la esperanza de ganar correspondiente a Pablo? En otras palabras, ¿cuál es el precio justo que Pablo debe pagar por este juego?

Pedro paga a Pablo 2^{n-1} ducados si la moneda sale cara por primera vez en el n-ésimo lanzamiento, con probabilidad $(1/2)^n$, luego la esperanza de Pablo es:

$$E(X)=\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}=\infty$$

Es decir, Pablo debería pagar un precio infinito por participar en el juego y a cambio sólo recibiría un pago finito en cada lanzamiento. Es más, recibiría como mucho 4 ducados con probabilidad 7/8. Seguramente, nadie en el puesto de Pablo querría poner una suma considerable con vistas a la ganancia anhelada, se consideraría más justo aportar una suma relativamente menor. El resultado parece estar en contradicción con el sentido común, y sin embargo es cierto, de ahí la paradoja.

Históricamente hubo matemáticos que intentaron resolver la paradoja. Gabriel Cramer en 1728 propuso a Nicolás Bernoulli las siguientes suposiciones para resolver la paradoja:

1. Suponer que el dinero debía valer en proporción, no a su valor intrínseco, sino al uso que se puede hacer

de él o a la satisfacción que da, lo que después se llamó *utilidad*. Estableció un umbral, a partir del cual, la adición de una cantidad más de dinero no proporciona ya ningún placer a las personas, fijándolo en 2^{24} ducados. Según esa suposición el dinero que debería pagar Pablo por jugar era de 13 ducados, ya que

$$E(X)=\sum_{n=1}^{24} 2^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\sum_{n=25}^{\infty} 2^{24}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=13$$

2. O bien suponer que el placer ofrecido por una cantidad grande de dinero puede crecer indefinidamente pero es proporcional a la raíz cuadrada del importe, entonces

$$E(X)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}=\frac{1}{2-\sqrt{2}}\approx 2{,}9$$

luego Pablo debería pagar 2,9 ducados.

Daniel Bernoulli propone en 1731 en *De Mensura Sortis*, que la utilidad o el valor que para una persona representa un aumento de bienes es inversamente proporcional al capital primitivo. Esto significa que un pequeño crecimiento dx en la fortuna de una persona causará un incremento en su utilidad de

$$du = k\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

integrando da

$$u = k\log x + c$$

esto es, la utilidad de una fortuna x es proporcional a $\log x$. Daniel llamó a la utilidad *emolumentum*, y Laplace, *valor moral del crecimiento de bienes*. Los economistas y matemáticos Carl Menger (1840-1921), William Stanley Jevons (1835-1882), precursor de la media geométrica como medida de la variación de los precios y Léon Walras (1834-1910), famoso por promover un modelo para calcular el equilibrio de actividades y precios en una economía cerrada, volvieron a recoger la idea de utilidad de Daniel Bernoulli y lo aplicaron al ámbito económico.

Daniel razona que el pago de Pablo depende de su capital inicial. Si Pablo comienza con una fortuna a y paga z por el juego, tendrá al acabar la cantidad de $a - z + 2^{n-1}$. Así pues, la utilidad final esperada será igual a la utilidad inicial si z satisface

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[k\log(a-z+2^{n-1})+c\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=k\log a+c$$

O sea,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\log(a-z+2^{n-1})\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\log a$$

En particular, si el capital incial de Pablo es $a = 10$ ducados entonces lo que debe pagar es de $z \approx 3$ ducados. Obviamente z crece si lo hace a.

Georges Louis Leclerc, Conde de Buffon (1701-1788), en su *Essai d'Arithmétique Morale*, amén de exponer el

Daniel Bernoulli propone en 1731 en De Mensura Sortis, *que la utilidad o el valor que para una persona representa un aumento de bienes es inversamente proporcional al capital primitivo.*

Poisson

conocido Problema de la Aguja, intenta resolver la paradoja de San Petersburgo. Propone despreciar las probabilidades pequeñas, concretamente menores que 1/10000, ya que, según sus tablas de mortalidad, la probabilidad de que un hombre de 56 años muera en el transcurso del día era de 1/10189 y si, para un hombre de esa edad, dicha probabilidad no le causa temor y le parece pequeña, con igual motivo lo será 1/10000 en nuestro problema. Con estas premisas, como $2^{13} = 8192$ y $2^{14} = 16384$, tenemos que la esperanza del juego es de

$$E(X)=\sum_{n=1}^{13} 2^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=6{,}5$$

No contento con todo esto, encargó a un niño el experimento de tirar una moneda 2048 veces. Al final, todas estas partidas produjeron 10057 ducados. Luego el valor de cada partida es de 10057 : 2048 = 4,9, es decir, casi 5 ducados.

Simón Denis Poisson (1781-1840) pensaba que Pedro no podía pagar a Pablo el dinero que no tiene. Poisson pensaba que 50 millones de francos, de aquella época, era ya una suma desorbitante para cualquier particular, luego la partida no podía prolongarse más allá de la tirada 26 porque en caso de perder el número de francos que Pedro debía entregar a Pablo, en la tirada 27 era de 2^{26} = 67.108.864 francos, muy superior a la fortuna de Pedro. Recíprocamente, Pablo conociendo la fortuna de Pedro no jugaría más de 26 tiradas y sólo arriesgaría 13 francos.

Incluso si suponemos que Pedro fuera el todo poderoso Estado y fuera éste el que organizara una lotería con las condiciones del juego, esto es, la Administración emitiera billetes, el número 1 conllevara un premio de 1 franco a su portador si sale cara en la primera tirada, el número 2 conllevara un premio de 2 francos si sale cara en el segundo lanzamiento, etc. El Estado pondría un precio a cada número, estando el precio de cada billete en sentido creciente al de su número. Pues bien, habría un número que no podría ser comprado por ningún particular lo que hace que la paradoja no pudiera establecerse en la realidad. El enunciado original de la paradoja de San Petersburgo equivale a un ciudadano que comprara un billete de cada una de las series de números que la lotería hacer poner en circulación.

Otro gran matemático francés Condorcet (1743-1749) argumentó que un precio infinito no era justo para Pablo porque no tendría el tiempo suficiente para repetir las tiradas y que las ganancias medias se aproximaran al precio. Esta argumentación tiene mucho que ver con el nacimiento del punto de vista frecuencial de la probabilidad. También Buffon pensaba que sólo habría tiempo, durante la vida de una persona, para jugar un número finito de tiradas. Concretamente, Buffon calculó que si se juegan 1048566 partidas y se estima en 2 minutos la duración para cada partida, comprendiendo el tiempo para pagar, esto supondría 2097132 minutos, es decir, casi 16 años jugando 6 horas al día, porque no sólo de juego vive el hombre, y tan sólo para una ganancia esperada de 10 ducados.

Grandes matemáticos como Venn, Feller, et se han ocupado también de la paradoja, pero entrar en más detalles haría muy prolijo este artículo.

Conclusiones

A modo de resumen decir que, a mi juicio, la introducción del concepto de esperanza a través de la paradoja de San Petersburgo presenta algunas ventajas metodológicas frente a la presentación clásica como una suma de los productos de los valores de la variable por sus probabilidades. Éstas son:

a) Definimos la esperanza en términos de equidad de un juego y no en términos de probabilidad, con todo lo que presenta de motivador para el alumno.

b) Presenta el caso de una variable con esperanza infinita. El alumno está mal acostumbrado, piensa que todas las variables tienen esperanza finita y tiende a creer que es innecesaria la comprobación de que los momentos de segundo orden sean finitos, por ejemplo, en el Teorema Central del Límite. Las variables sin esperanza juegan un papel muy importante. La distribución de Cauchy que tiene por función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

con $-\infty < x < \infty$, así como otras muchas variables ligadas al tiempo de espera y de recurrencia en física carecen de esperanza.

c) Podemos utilizar la Historia de la Estadística para ver cuales han sido las tentativas para su resolución. Aunque otras veces es contraproducente, en este caso particular, la introducción de la esperanza matemática como la expresión de equidad de un juego refleja la génesis histórica del concepto. La formalización del concepto fue posterior.

d) La resolución de la paradoja lleva asociada la introducción del concepto de utilidad, tan importante en las ciencias económicas y administrativas.

En cuanto al juego que le propuse al comienzo, aunque es prácticamente seguro que en una apuesta particular pierda las cien pesetas, la ganancia media para este juego es de aproximadamente 1807 pesetas,

$$E(X) = \frac{1}{524.288} 1.000.000.000 + \frac{524.287}{524.288}(-100) \approx 1.807$$

lo que posiblemente hiciese cambiar su reticiencia a no jugar, si no hubiera que ajustar cuentas hasta que hubiera acabado la partida y si en vez jugar una sola vez, pudiera jugar tan a menudo y tan seguido como quisiera.

...la introducción de la esperanza matemática como la expresión de equidad de un juego refleja la génesis histórica del concepto. La formalización del concepto fue posterior.

Gabriel Ruiz
Escuela Universitaria de Empresariales.
Universidad de Cádiz. Jerez
Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»

Bibliografía

BERNOULLI, D. (1738): «Specimen theoriae novae de mensura sortis», *Comentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, n.° 5, 175-192.

BUFFON, G. L. (1777): «Essai d'Arithmétique Morale», *Supplément à l'Histoire Naturelle, générale et particulière, avec la description du cabinet du Roy, vol. 4*, París.

COURNOT, A. A. (1843): *Exposition de la Théorie des Chances et des Pro-babilités*, Librairie de L. Hachette, París.

HUYGENS, C. (1742): *De Ratiociniis in Ludo Alae*, Opera Varia, Lugduni Batavorum.

MONTMORT, P. R. (1713): *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, París.

PAULOS, J. A. (1990): *El hombre anumérico: El analfabetismo matemático y sus consecuencias*, Tusquets Editores, Barcelona.