SUMA 31
junio 1999, pp. 87-95

Equivalencia y orden: la enseñanza de la comparación de fracciones

Carlos Maza Gómez

ARTÍCULOS

La construcción del número racional se suele hacer a través del establecimiento de fracciones equivalentes. Sin embargo, su categoría matemática de número viene garantizada por la posibilidad de ordenación. Ello supone que una enseñanza completa del concepto de número racional debe conjuntar la equivalencia y orden entre fracciones englobadas en la acción de comparar el tamaño de las mismas. En este artículo se examinan las dificultades de aprendizaje que supone esta tarea general tal como se extrae del análisis de las investigaciones y se establece y discute una secuencia de enseñanza de la comparación de fracciones que aparece dividida en distintas fases para su mejor aplicación en el aula.

LA FRACCIÓN es, aparentemente, una pareja de números enteros y no, como nos afirma la Matemática, un solo número. Históricamente era considerado un número especial, desde luego, y por ello se le denominaba número «roto» o, como después se popularizó, «quebrado». Pero seguía siendo un número y no dos.

¿Cuál es el lugar de la fracción? Para entenderlo es imprescindible considerar la relación de equivalencia que se puede definir sobre dos fracciones. Así, decimos que 2/3 y 4/6 son equivalentes y que 2/3 y 4/7 no lo son. Si partimos de la idea de que la fracción es un par ordenado de números no se puede entender que las dos primeras sean equivalentes. Ni 2 es igual a 4 ni 3 es igual a 6. Si los consideramos como un solo número, el número 2/3 y el número 4/6 no serán equivalentes sino idénticos. La idea que justifica la denominación «equivalentes» reside, como es conocido, en el hecho de que 2/3 y 4/6 representan al mismo número racional aunque sean distintos como pares ordenados. Tal como lo expresa acertadamente Ohlsson (1988, 71):

> La solución de la paradoja de la equivalencia consiste en postular la existencia de un tercer tipo de ente abstracto que es intermedio, de alguna manera, entre el par ordenado y el correspondiente número racional. Estos entes intermedios se parecen a los pares ordenados en que su identidad es determinada por el primer y segundo elementos, pero se parecen a los números en que pueden ser ordenados, sumados y multiplicados. Dos entes intermedios tales son equivalentes cuando tienen diferentes propiedades como pares ordenados pero propiedades numéricas idénticas. Sugiero que un uso común del término «fracción» se refiere a estos entes intermedios.

Esta larga cita pone en evidencia que las fracciones tienen una apariencia (como pares ordenados) y una sola naturaleza (como números) y que dicha naturaleza sólo se manifiesta cuando las fracciones se ordenan y se operan entre sí. Para la comprensión numérica de las fracciones, es decir, para entenderlas en relación con el número racional, su equivalencia es importante pero no lo es menos el considerarlas susceptibles de admitir un orden y una operación entre ellas.

En la enseñanza de fracciones la definición de una relación de equivalencia ha sido, casi en exclusiva, el punto más tratado. Particularmente, desde la introducción de la Matemática Moderna, uno de los objetivos prioritarios era el de construir el número racional a partir de esta relación. Las características estructuralistas del currículum de los años sesenta conllevaban una consideración menor respecto al orden, mientras que las operaciones, cuya importancia era tradicional dentro de la enseñanza de las Matemáticas, seguían presentes. Ahora bien, la Educación Matemática actual defiende, entre otras cosas, que la noción de equivalencia de fracciones no debe ser el único camino para la comprensión numérica de las mismas ya que dicho aspecto debe ser complementado con la concepción de las fracciones como entes matemáticos ordenados.

El aprendizaje de la equivalencia de fracciones

Existen dos fuentes principales de dificultad en el aprendizaje de la equivalencia de fracciones: en primer lugar, el paso de las representaciones manipulativas o icónicas a las simbólicas y, en segundo lugar, las provenientes de las mismas manipulaciones simbólicas. La segunda depende, de alguna forma, de la primera.

En efecto, en el comienzo del aprendizaje y mientras el alumno aún no puede manipular los símbolos por sí mismos, el reconocimiento o la construcción de fracciones equivalentes depende de lo que Post y sus colegas (1985) denominan la «traslación coordinada de las representaciones». Así, el reconocer que las fracciones 3/4 y 6/8 son equivalentes implica el trasladar ambas formas simbólicas a representaciones icónicas (figura 1), comparar éstas últimas y trasladar la comparación y su resultado, de nuevo, al nivel simbólico.

Es por ello que la noción de equivalencia es adquirida con más facilidad cuando se comienza con el plegado de papel o, incluso, con el modelo de área que directamente a través de una forma simbólica, como es el caso de la multiplicación por uno (Bohan, 1971; cit. por Dickson, Brown y Gibson, 1991):

$$\frac{3}{4}\cdot 1=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{2}=\frac{3\cdot 2}{4\cdot 2}=\frac{6}{8}$$

...la Educación Matemática actual defiende, entre otras cosas, que la noción de equivalencia de fracciones no debe ser el único camino para la comprensión numérica de las mismas ya que dicho aspecto debe ser complementado con la concepción de las fracciones como entes matemáticos ordenados.

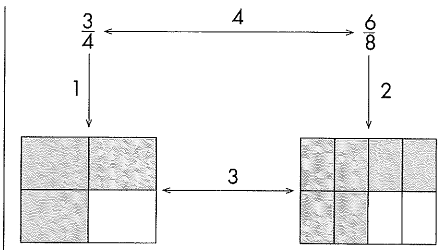

Figura 1

En este primer momento, por tanto, existen dos pasos fundamentales en el aprendizaje de la equivalencia: por un lado, reconocer la equivalencia entre las dos representaciones icónicas y, por otro, trasladar adecuadamente esta comparación a las representaciones simbólicas.

Respecto al primer paso, la cuestión reside en reconocer que ante un todo con dos particiones distintas, la fracción expresada es la misma (parte inferior de la figura 1). El planteamiento de esta cuestión como mero reconocimiento o como una operación a realizar en el todo puede cambiar los resultados del aprendizaje. Además, la presencia de «distractores perceptivos» (como es el caso de referirse a 3/4 y aparecer el diagrama dividido en cuatro u ocho o doce partes) dificultaría la comparación entre las dos representaciones icónicas.

El segundo paso se refiere a trasladar a nivel simbólico la comparación realizada sobre las representaciones manipulativas (plegado de papel) o icónicas (el modelo de área). Esta traslación, desde luego, no es inmediata. El mismo Bohan (1971) encontraba que, tras un aprendizaje efectivo de la equivalencia basado en el plegado de papel, menos de la mitad de los estudiantes de 11 años eran capaces de simplificar fracciones en el nivel simbólico (pasar de 9/12 a 3/4, por ejemplo). Esta falta de inmediatez en la traslación a lo simbólico y, simultáneamente, su enorme importancia en el aprendizaje de la equivalencia de fracciones, hacen de esta traslación un objetivo prioritario de la enseñanza.

Se ha comentado antes que otra fuente de errores y dificultades en el aprendizaje de la equivalencia se encuentra en las mismas manipulaciones simbólicas. A este respecto, traeremos a colación la distinta dificultad de dos tareas aparentemente basadas en reglas semejantes. Así, Dickson y sus colegas (1991) citan diferentes estudios que señalan que:

$$\text{de } \frac{8}{12} \text{ a } \frac{2}{3}$$

es más difícil que

$$\text{de } \frac{2}{3} \text{ a } \frac{8}{12}$$

es decir, que es más fácil construir fracciones equivalentes a partir de una más elemental que al revés, simplificar una fracción dada. ¿A qué es debido este hecho? Para Ettline (1985) la división de numerador y denominador por el mismo número lleva a confusión con la división de fracciones, donde la regla marca «invertir y multiplicar». Sin descartar esta explicación creemos que la distinta dificultad de ambas tareas reside en que el alumno tiene, en general, un deficiente aprendizaje de la regla de multiplicación por uno (reflejada en lineas anteriores). Sin embargo, posee estrategias incompletas o informales para sustituir a esta regla. En cambio, la división de numerador y denominador por el mismo número depende directamente, por inversión, de la regla de multiplicación por uno.

Estas estrategias se revelan con bastante claridad en tareas de encontrar el cuarto número frente a dos fracciones equivalentes. Por ejemplo, Hart (1981) planteaba encontrar la incógnita en

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{?}$$

El porcentaje de aciertos oscilaba entre el 72% a los 12 años y el 79% a los 15 años lo cual podría ser relativamente satisfactorio. Sin embargo, ante el mismo tipo de prueba, Vance (1992) encontraba alumnos que justificaban que $1/2 = 2/4 = 3/6$ porque

$$\frac{1+1}{2+2} = \frac{2}{4} \quad y \quad \frac{2+1}{4+2} = \frac{3}{6}$$

sin que vieran la conexión entre lo realizado y la multiplicación. A este respecto (Dickson y otros, 1991:316):

...es más fácil construir fracciones equivalentes a partir de una más elemental que al revés, simplificar una fracción dada.

Es difícil saber si los niños que obtuvieron resultados correctos en estas cuestiones numéricas están demostrando auténtica comprensión de la equivalencia y no limitándose a detectar pautas o regularidades.

Otros investigadores (Hart, 1981; Ohlsson y Bee, 1991, por ejemplo) han detectado resultados erróneos en estas pruebas al basarse en pautas o regularidades basadas en la comparación de los números, en la suma o en la resta de los mismos. Por ejemplo, se puede afirmar que $3/5 = 7/9$ porque $3–5 = 7–9$. O que $12/15 = 2/5$ dado que a los dos términos de la primera fracción les restamos una decena (una generalización incorrecta de la regla de que operando ambos términos del mismo modo la fracción no varía).

¿Qué conclusiones se pueden sacar de todos estos datos?

1. La regla de multiplicar una fracción por uno no es ni elemental ni inmediata ya que el alumno la va construyendo, muy probablemente, a partir de la suma del numerador y el denominador consigo mismos, tal como detectaba Vance (1992).
2. Existen otros criterios (de comparación numérica entre numerador y denominador, de falsa generalización de las reglas, entre otros) que obstaculizan seriamente el aprendizaje de la regla de multiplicación por uno.

¿A qué se debe la presencia de estos obstáculos? La respuesta residiría en la escasa transparencia de los símbolos y reglas utilizados, es decir, en que el estudiante no reconoce el referente de estas fracciones y reglas y, por ello, este referente no actúa a modo de restricción de las acciones que ejecuta. Es por ello necesario que se refuerce la conexión símbolo-referente de modo que se compruebe que, sobre el segundo, las erróneas manipulaciones simbólicas carecen de sentido.

Por ejemplo, ¿es posible que 3/4 sea una fracción equivalente a 7/8? Para el alumno que razone en términos de la diferencia entre numerador y denominador, sí. Pero si se enfrenta a una representación más elemental (figura 2) se puede comprobar con facilidad que la regla es errónea.

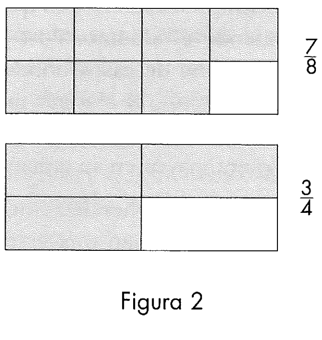

Figura 2

Kieren (1992) recuerda que la idea de equivalencia entre fracciones implica, entre otras cosas, la comprensión de dos tipos de igualdades: la «relativa» (traducible a la regla de la multiplicación por uno) y la «deductiva», que afirma que dos fracciones son equivalentes cuando es igual el producto de «medios» y de «extremos». Esta conocida regla basa su presencia en la forma en que los matemáticos definen la relación de equivalencia entre fracciones pero, en la práctica, se revela como de difícil aprendizaje y desligada de la igualdad anterior (la multiplicación por uno). En efecto, esta última es construida desde la suma de numeradores y denominadores consigo mismos. La igualdad deductiva, en cambio, es vista antes como una regularidad observable que como una regla construida en relación con las acciones sobre el referente.

El aprendizaje del orden de fracciones

Las propiedades numéricas de las fracciones implican, no sólo su posible equivalencia, sino la posibilidad de que sean distintas en cuyo caso son susceptibles de ser ordenadas. El alumno, cuando se enfrenta a la necesidad de efectuar ese orden, tiene una serie de dificultades que provienen de distintas fuentes: la influencia de los números naturales, las características lingüísticas del orden entre fracciones y la constitución de la fracción como pareja de números. Examinemos con detalle estas dificultades.

En primer lugar, el estudiante ya sabe ordenar números pero su experiencia se reduce a los naturales. Por ello, enfrentado a dos fracciones como

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$$

puede llegar a la conclusión de la segunda fracción es mayor, dado que 4 es mayor que 3. Esta regla es válida cuando se comparan numeradores siendo iguales los denominadores, como en

$$\frac{3}{4} > \frac{2}{4}$$

pero no lo es cuando se comparan denominadores siendo iguales los numeradores, como en el primer caso planteado.

Existe también un conjunto de dificultades lingüísticas que fomentan la incomprensión entre lo que pide el profesor y lo que entiende el alumno. Post y sus colegas (1985) describen una serie de casos donde, ante la pregunta «Dime cuál es mayor», el alumno manifestaba no entender si se preguntaba por cuál fracción tenía mayor número de partes o era mayor en su tamaño.

Estas dos dificultades (falsa generalización del orden de naturales y la lingüística) tienen una estrecha relación con otro obstáculo básico: la incomprensión de que el orden de las fracciones se determina por la consideración

Las propiedades numéricas de las fracciones implican, no sólo su posible equivalencia, sino la posibilidad de que sean distintas en cuyo caso son susceptibles de ser ordenadas. El alumno, cuando se enfrenta a la necesidad de efectuar ese orden, tiene una serie de dificultades que provienen de distintas fuentes...

simultánea de sus numeradores y denominadores entre sí. En otras palabras, el hecho de que un mayor número de partes (numerador) puede venir compensado por un menor tamaño de cada parte (denominador) y viceversa.

Esta incomprensión es el origen, prácticamente, de todos los errores observables, en algunos casos de forma evidente (Post y Cramer 1987, 33):

> Cuando se les pide comparar 3/9 y 4/9, algunos argumentan: «3/9 es mayor que 4/9 porque en los cuartos las piezas son más pequeñas y debemos tomar más para igualar la unidad entera» o, similarmente, «porque en 3/9 las piezas son mayores porque hay pocas».

Cuando el estudiante no dispone de este conocimiento (la relación inversa entre el número de divisiones y el tamaño de la fracción unitaria) repara esta incomprensión con estrategias alternativas. Por ejemplo, ante las fracciones

$$\frac{2}{5}, \frac{6}{9}$$

puede afirmar que son iguales porque si suma cuatro tanto al numerador como al denominador de la primera resulta la segunda. Otra forma de razonar en semejante caso es que la diferencia entre los denominadores y numeradores es igual en ambas fracciones.

Existen también dos estrategias que son válidas pero no aplicables a todos los casos y que revelan, además de un interesante conocimiento informal que el profesor debe potenciar y aprovechar, un rechazo a los métodos escolares formales, sobre todo cuando persisten a lo largo de los años, como luego se verá. Son las siguientes:

1. Presencia de una fracción intermedia. Aplicable cuando una de las fracciones excede y otra es menor que una fracción conocida (preferentemente la unidad pero también 1/2). Por ejemplo,

$$\frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$$

2. Comparación del complementario a la unidad. Esta estrategia sólo es aplicable para fracciones muy próximas a la unidad, como es el caso de

$$\frac{7}{8}, \frac{4}{5}$$

A la primera fracción le falta 1/8 para llegar a la unidad mientras que a la segunda le falta 1/5. Dado que 1/5 es mayor que 1/8, a la segunda fracción le falta más para llegar a la unidad y, por tanto, será menor. Obsérvese la economía mental que supone este procedimiento: una comparación entre parejas de números se ha reducido a una comparación entre dos de ellos (los denominadores), labor que, sin embargo, es conceptualmente más compleja.

Desde el punto de vista matemático es evidente que, en cualquier pareja de fracciones, su ordenación vendrá determinada con facilidad si las transformamos en fracciones equivalentes con el mismo denominador. Así, la ordenación de 7/8 y 4/5 se basaría en reducir a denominador común de manera que la determinación de la mayor se dedujera de la comparación de sus nuevos numeradores:

$$\begin{array}{ccc} \frac{7}{8} & & \frac{4}{5} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{35}{40} & > & \frac{32}{40} \end{array}$$

¿Se aprende con facilidad el mecanismo de cálculo de una fracción intermedia a otras dos? Por ejemplo, si pedimos escribir una fracción situada entre 1/2 y 2/3, la forma de resolver este problema es expresar ambas fracciones con unas equivalentes que presenten un denominador común: 3/6 y 4/6 no serán adecuadas, pero sí 6/12 y 8/12 para determinar a 7/12 como fracción intermedia. Esta pregunta era planteada por Hart (1981) que encontraba, entre jóvenes de 15 años, un 21% de acierto.

...la perspectiva estructuralista de los años sesenta resaltaba la equivalencia como más importante, fundamentalmente porque permite una construcción rigurosa del conjunto de números racionales. La necesidad de enseñar la ordenación de fracciones se ha ido abriendo paso con cierta dificultad.

¿Dónde situar la equivalencia?

El punto de vista más tradicional indica que la enseñanza sobre la equivalencia de fracciones debe preceder a la de su orden aunque éste, en general, es apenas abordado. Ya hemos comentado que la perspectiva estructuralista de los años sesenta resaltaba la equivalencia como más importante, fundamentalmente porque permite una construcción rigurosa del conjunto de números racionales. La necesidad de enseñar la ordenación de fracciones se ha ido abriendo paso con cierta dificultad.

Hay que tener en cuenta que el orden de fracciones sólo sirve para destacar las propiedades numéricas de las fracciones. La equivalencia, en cambio, es una herramienta imprescindible para construir otros conocimientos fraccionarios: La propia ordenación, la simplificación de fracciones, la suma y la resta. Esta utilidad de la equivalencia ha llevado a que se valore como un conocimiento previo que el alumno tiene que tener antes de abordar el resto de conocimientos. Sin embargo, existen otras opiniones al respecto.

Ellerbruch y Payne (1978) defendían que la equivalencia se integrara dentro de la enseñanza de la suma de fracciones. La creencia que fundamenta esta postura podría expresarse del siguiente modo: si la equivalencia de fracciones sirve para resolver con métodos generales la suma de fracciones, ¿por qué aislar un conocimiento del otro? Abordemos la equivalencia cuando sea necesaria dentro de una secuencia de enseñanza de la suma.

Este enfoque tiene sus limitaciones y condiciona de manera decisiva el tipo de equivalencias que se tratan. Por ejemplo, la simplificación de fracciones, más difícil que la generación de fracciones equivalentes a través de la multiplicación por uno, es simplemente descartada (Ellerbruch y Payne, 1978:140):

> No se incluye en este punto la simplificación de fracciones a términos más bajos por la dificultad que tienen los estudiantes con la reducción y la confusión que resulta de tratar, en el caso general de la suma, dos temas difíciles al mismo tiempo.

Desde otro punto de vista, sin embargo, se llegaría a la conclusión contraria: es mejor enseñar la simplificación como procedimiento inverso y, por tanto, estrechamente relacionado, con la multiplicación de una fracción por uno.

Partiendo de la misma base que estos autores tomaremos en este artículo, no obstante, un camino diferente. Coincidimos en que la equivalencia no debe ser enseñada aislada de otros conocimientos sobre fracciones sino en estrecha relación y, aún más, incluida en dichos conocimientos. Sin embargo, relacionar la equivalencia con la suma, aunque es una opción válida, no parece la mejor habida cuenta de los resultados observados en apartados anteriores.

En efecto, se puede afirmar que la ordenación de fracciones es un campo lleno de procedimientos intuitivos, incompletos, informales y de falsas generalizaciones. No existe un conocimiento conceptual que garantice la unificación de métodos como los basados en las fracciones equivalentes. Al mismo tiempo, la consideración numérica de las fracciones es un aprendizaje con notables debilidades, mediatizado por numerosos obstáculos. El estudiante tiene serias dificultades para entender la relación entre fracciones y números racionales, lo que conlleva una limitación de todo su aprendizaje sobre fracciones.

Es por ello que entendemos necesario incluir la noción de equivalencia dentro de la del orden de fracciones. La idea no es nueva, tal como comenta Giménez (1991), pero nunca ha pasado del estado de idea sin concretar. Aquí nos proponemos llegar a una propuesta didáctica al respecto. Será importante, a partir de esta decisión, no limitar el conocimiento de la equivalencia por su mayor o menor dependencia de la ordenación, como pasaba en el caso de la suma antes tratado. Por otro lado, este planteamiento tiene una ventaja. La interrelación equivalencia/orden permite entender esta fase del aprendizaje sobre fracciones como la ejecución de una acción general: la comparación del tamaño de dos fracciones. En unos casos el alumno encontrará que son distintas y habrá de determinar cuál es menor y mayor y, en otros casos, las dos fracciones serán del mismo tamaño y las llamaremos equivalentes.

Secuencia de tareas escolares

Con todo lo dicho se hace necesario establecer una secuencia de tareas que, puestas en práctica en el aula, conduzcan a un conocimiento integrado de la equivalencia y el orden de fracciones y, en suma, a una comprensión del carácter numérico de las fracciones. Las tres primeras corresponderán preferentemente al tercer ciclo de Educación Primaria mientras que las restantes tendrían su mejor ubicación en el primer ciclo de la ESO.

...se hace necesario establecer una secuencia de tareas que, puestas en práctica en el aula, conduzcan a un conocimiento integrado de la equivalencia y el orden de fracciones y, en suma, a una comprensión del carácter numérico de las fracciones.

Ordenar fracciones de igual denominador

1. Comparar fracciones obtenidas por iteración de una fracción unitaria.
2. Comparar fracciones con igual denominador y numerador cualquiera.
3. Comparar el tamaño de dos números mixtos cuya parte fraccionaria tenga el mismo denominador.

Evidentemente, esta labor es la más sencilla y se inicia con la construcción de distintas fracciones de igual denominador a partir de una fracción unitaria. Esta fase únicamente complementa este último aprendizaje con la comparación de distintas fracciones de igual denominador. Sin embargo, surgen distintos casos particulares de interés: Por ejemplo, la comparación entre dos fracciones complementarias respecto de la unidad o la de dos fracciones impropias expresadas como números mixtos. La consideración de la fracción unitaria debe ser el mecanismo adecuado para resolver los problemas planteados.

Ordenar fracciones con igual numerador

1. Comprender la relación inversa entre el número de partes y el tamaño de cada parte en el reparto de la unidad.
2. Comparar fracciones no unitarias del mismo numerador.
3. Ordenar tres fracciones simultáneamente con igual numerador.

La ordenación de dos fracciones cualesquiera requiere tener en cuenta la relación inversa entre el número de partes y el tamaño de las mismas dentro de la división de la unidad. Esta consideración simultánea de dos cantidades variables es difícil, sobre todo para un alumno acostumbrado a ordenar números naturales. Por esta razón conviene separar esta variación: En el punto anterior se ha hecho variar el numerador (observando el tamaño diferente de cada fracción) y en este punto se aborda la labor inversa de variación del denominador. Se debe pasar así, paulatinamente, de una comparación cualitativa del tamaño de las fracciones a otra cuantitativa.

En este caso las fracciones unitarias volverán a ser de gran importancia para fundamentar el aprendizaje. En efecto, la primera labor consistirá en comparar el tamaño relativo de las distintas fracciones unitarias respecto de la misma unidad. Este caso es aquél donde el numerador es constantemente uno. La resolución de los casos restantes (cuando el numerador es distinto de uno) se apoyará en el anterior.

El material fundamental que se debe utilizar será el diagrama circular. El rectangular, presente en el aprendizaje del concepto de fracción, es aquí de una limitada aplicación por lo complicado que resulta comparar sus distintas fracciones unitarias. Así, 1/4 y 1/3 de una hoja de papel son partes que varían en dos dimensiones mientras que estas mismas fracciones, en un diagrama circular, varían en una (su ángulo central). Cuando se rebasen las fracciones unitarias esta diferenciación perderá importancia, como se verá en los ejemplos que planteemos oportunamente.

Distintas fracciones como expresión del mismo estado o acción

1. Comprobar que varias fracciones expresan la misma relación parte-todo.
2. Comprobar que distintas fracciones expresan la misma acción de reparto o medida.
3. Expresar en la línea numérica la equivalencia de fracciones.

Las fracciones han debido servir, inicialmente, para describir una relación entre un todo y una de sus partes o bien, posteriormente, para describir una acción (repartir, medir o comparar) dentro de otras interpretaciones del concepto de fracción. El alumno ha de comprobar que esta labor puede realizarse con distintas fracciones que expresan lo mismo o actúan igual.

Este primer contacto con las fracciones equivalentes empezará con la utilización de las primeras formas de representación: manipulativas (con el doblado de una hoja de papel, por ejemplo) e icónicas (como en la división de un diagrama o en las distintas expresiones de una medida sobre la línea numérica). La conclusión, alcanzando ya un nivel plenamente simbólico, consistirá en la aplicación de la noción de operador considerando distintas fracciones que mostrarán el mismo funcionamiento al llegar a idéntico resultado final.

Este primer contacto con las fracciones equivalentes empezará con la utilización de las primeras formas de representación: manipulativas (con el doblado de una hoja de papel, por ejemplo) e icónicas (como en la división de un diagrama o en las distintas expresiones de una medida sobre la línea numérica).

Construcción de fracciones equivalentes

1. Manipular simbólicamente una fracción para obtener fracciones equivalentes.
2. Describir la regla de transformación de una fracción en otras mayores y equivalentes.

El primer contacto con las fracciones equivalentes es de naturaleza inductiva y reducida a dos formas de representación. El punto más importante y delicado en este aprendizaje consistiría en trasladar las descripciones anteriores a una forma simbólica. Por ello, este punto no es independiente del anterior sino que está totalmente entrelazado. Cuando el estudiante doble de formas diferentes un papel deberá expresar de forma simbólica los resultados de sus acciones. Cuando mida una longitud y exprese los resultados en una linea numérica deberá describir simbólicamente lo realizado.

La cuestión más importante aquí es que el estudiante debe pasar, ahora, a la manipulación simbólica y al descubrimiento de las reglas que la rigen. Así, deberemos mostrar dos fracciones como

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{6}$$

¿Cómo se puede llegar de una a la otra a través del doblado de un papel? ¿Cómo llegar de una a la otra por medio de los símbolos numéricos? Dada una fracción cualquiera, como 1/4, ¿cómo construir a partir de ella otras fracciones que expresen lo mismo? En este punto, se debe favorecer una evolución de las estrategias infantiles desde lo simplemente aditivo:

$$\frac{2}{3} = \frac{2+2}{3+3}$$

hasta lo multiplicativo:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2}$$

Ordenar fracciones con denominadores múltiplos

1. Ordenar fracciones que presenten denominadores múltiplos.
2. Aplicar el método de construcción de fracciones equivalentes.

Una inmediata aplicación del punto anterior la constituye la ordenación de fracciones de manera que un denominador sea múltiplo del otro, como en

$$\frac{3}{5}, \frac{7}{10}$$

El objetivo, como es fácil de apreciar, es que el conocimiento adquirido antes sobre construcción de fracciones equivalentes sea aplicado inmediatamente a estas tareas de ordenación. Este punto encierra una decisión que es conveniente mencionar. Ellerbruch y Payne (1978:145) afirman que

> Los problemas no deben ser separados en tipos especiales, tales como los de denominadores múltiplos simples o primos relativos u otros casos especiales. Si ciertos tipos de fracciones son tratados como casos especiales, los alumnos tenderán a desarrollar algoritmos especiales para cada caso.

No creemos que esta recomendación deba entenderse en el sentido de presentar conjuntamente todos los casos indiferenciados, como por ejemplo

$$\frac{3}{5}, \frac{11}{15}; \frac{3}{4}, \frac{5}{6}; \frac{3}{5}, \frac{4}{7}$$

ante el temor de que se adopten todo ese tipo de estrategias intuitivas o incompletas que examinamos anteriormente. El consejo de estos autores debe entenderse en el sentido de utilizar un mismo método, crecientemente generalizable, en todos los casos a medida que se van abordando.

En este punto comenzaríamos a aplicar el método consistente en el cálculo de fracciones equivalentes: de una fracción para llegar a la otra (si los denominadores son múltiplos) o de los dos simultáneamente hasta coincidir en un denominador común (si son primos).

Se alternarían las tareas de reconocimiento con las de construcción teniendo en cuenta las limitaciones que el tipo de fracciones imponen. Ello es particularmente aplicable a la ordenación de fracciones construidas por los propios alumnos, puesto que éstas, de momento, no pueden ser cualesquiera. La graduación aquí defendida, que tiene por objetivo desarrollar estrategias de equivalencia y orden que se apoyen en las anteriores, tiene el inconveniente de que la enseñanza debe limitar el conjunto de fracciones sobre el que se actúa de manera algo directiva.

Ordenar a través de la simplificación de fracciones

1. Construir fracciones equivalentes a través de la división por el mismo número del numerador y denominador.
2. Descubrir el carácter inverso de este método respecto al de la multiplicación por uno.
3. Formular la regla de simplificación de fracciones.
4. Utilizar la simplificación de fracciones en su ordenación.

Los problemas no deben ser separados en tipos especiales, tales como los de denominadores múltiplos simples o primos relativos u otros casos especiales. Si ciertos tipos de fracciones son tratados como casos especiales, los alumnos tenderán a desarrollar algoritmos especiales para cada caso.

La generación de fracciones equivalentes por la multiplicación por uno tiene su acción inversa en la simplificación, obtenida por división de numerador y denominador entre el mismo número. Ahora bien, sobre esta tarea se deben hacer dos observaciones. La primera es que, por dicho carácter inverso, la simplificación no debe enseñarse aislada del método de multiplicación por uno sino en relación con él. Por ello la hemos colocado inmediatamente después de su aplicación de ordenar fracciones con denominadores múltiplos. Lo segundo que hay que destacar es que esta aplicación puede ser, precisamente, el mejor nexo de unión entre ambos métodos de construcción de fracciones equivalentes.

En efecto, si la ordenación ha de hacerse entre las dos siguientes fracciones:

$$\frac{4}{5}, \frac{36}{40}$$

antes que partir de 4/5 para llegar a otra fracción de denominador 40, quizá también sea posible (y más sencillo para realizar la comparación final) reducir el tamaño de 36/40 encontrando su fracción original (la canónica). Así puede llegarse a que

Dividiendo por 2 se obtiene
18/20
Dividiendo nuevamente por 2 se llega a
9/20

siendo relativamente fácil la comparación entre 4/5 y 9/10, sea por la construcción de una fracción equivalente a la primera (8/10) o a través de una estrategia informal como el examen de la fracción complementaria de la unidad. Este método, junto al de la utilización de una fracción intermedia de referencia, deben ser potenciados por la flexibilidad en la ordenación que suponen.

No obstante, será necesario un trabajo previo de construcción de fracciones equivalentes a partir de una cuyo numerador y denominador sean grandes. Es decir, realizar una tarea de simplificación al objeto de descubrir y formular la regla característica.

Ordenar fracciones con denominadores primos

1. Aplicar sistemáticamente el método de multiplicación por uno para la ordenación de fracciones cualesquiera.

El procedimiento a aplicar será el mismo: la generación simultánea de fracciones equivalentes hasta llegar a una coincidencia de denominadores. Este método tiene la ventaja de preparar en el alumno la noción de mínimo común múltiplo frente a la regla tan conocida de encontrar el denominador común multiplicando simplemente los denominadores. Esto es adecuado para 5 y 7, por ejemplo, pero sobreabundante en el caso de 4 y 6. Esta regla supone tal simplificación mental que no es difícil observar a los alumnos aplicándola incluso a los denominadores 4 y 8, por ejemplo.

El procedimiento que aquí se defiende (generación simultánea de fracciones equivalentes), tal como lo proponen Ellerbruch y Payne (1978) no favorece tales simplificaciones aunque, desde luego, tampoco la impiden.

Obsérvese que, en todo caso, nos vamos a mover, como en puntos anteriores, en un terreno estrictamente simbólico. Ello no obsta para que, eventualmente, se utilicen diagramas de algún tipo. Esta recomendación es particularmente aplicable a los casos en que el imperio de las reglas memorizadas haga ver en el profesor un olvido por el alumno de los referentes.

...las tareas anteriores se han orientado siempre hacia la ordenación de dos fracciones que vienen dadas por el profesor. La construcción de fracciones por parte del alumno será una labor complementaria de la anterior y de una mayor creatividad.

Carlos Maza
Departamento de Didáctica de las Matemáticas.
Facultad de Ciencias de la Educación.
Universidad de Sevilla.
Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»

Calculo de una fracción intermedia a otras dos

1. Dadas dos fracciones no equivalentes, construir una fracción menor que una y mayor que la otra.
2. Aplicar lo descubierto a la ampliación de la línea numérica.

No es una tarea que suela realizarse habitualmente pero creemos que es un digno colofón a las actividades de ordenación. Tiene, al tiempo, la ventaja de utilizar fracciones equivalentes de manera sistemática y el favorecer la representación de las fracciones sobre la línea numérica percibiendo la densidad de los números racionales. Démonos cuenta, además, de que las tareas anteriores se han orientado siempre hacia la ordenación de dos fracciones que vienen dadas por el profesor. La construcción de fracciones por parte del alumno será una labor complementaria de la anterior y de una mayor creatividad.

Bibliografía

DICKSON, L., M. BROWN y O. GIBSON (1991): *El aprendizaje de las Matemáticas*, Labor, Barcelona.

ELLERBRUCH, L. y J. N. PAYNE (1978): «A teaching sequence from initial fraction concepts through the addition of unlike fractions», en M. N. SUYDAM y R. E. REY (Eds): *Developing computational skills*, N.C.T.M. Reston, Virginia.

ETTLINE, J. F. (1985): «A uniform approach to fractions». *Arithmetic Teacher*, 32, 7, 42-43.

GIMÉNEZ, J. (1991): «Realidad y material para un conocimiento intuitivo del orden en las fracciones», *Epsilon*, 19, 25-34.

HART, K. (1981): *Children's understanding of Mathematics: 11-16*. J. Murray, Londres.

KIEREN, T. E. (1992): «Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge: Implications for curriculum and instruction», en G. LEINHARDT, R. PUTNAM y R. A. HATTRUP (Eds): *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*, L.E.A. Hillsdale, New Jersey.

OHLSSON, S. (1988): «Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts», en J. HIEBERT y M. BEHR (Eds): *Number concepts and operations in the middle grades*, 2. L.E.A. Hillsdale, New Jersey.

OHLSSON, S. y N. BEE (1991): «Intra-individual differences in fractions arithmetic», *Proceedings Fifteenth PME Conference*, III, Assisi, Italia.

POST, T. R. y otros (1985): «Order and equivalence of rational numbers: A cognitive analysis», *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 1, 18-36.

POST, T. R. y K. CRAMER (1987): «Children's strategies in ordering rational numbers», *Arithmetic Teacher*, 35, 2, 33-35.

VANCE, J. H. (1992): «Understanding equivalence: A number by any other name». *School, Science and Mathematics*. 23, 231-246.