SUMA 31
junio 1999, pp. 55-66

Los enigmáticos cálculos del escriba Ahmes

José María Gairín Sallán

ARTÍCULOS

En este trabajo en el que se trata de descifrar una tabla (el Recto) del Papiro de Rhind, se presenta la fracción con el significado de cociente partitivo. La resolución de lo que denominamos enigma de Ahmes, pone en juego la formulación y contraste de hipótesis que desembocarán en una reconstrucción especulativa del concepto de reparto en el Egipto antiguo. Una vez definido el significado de fracción que, suponemos, empleó el escriba Ahmes, les queda a los alumnos un trabajo de descomposición de fracciones en suma de productos de fracciones y de comprobación de sus resultados con los que figuran en el Recto.

DIVERSOS TRABAJOS de investigación en didáctica de la matemáticas (Carpenter y otros, 1993; Behr y otros, 1993) han puesto de manifiesto la complejidad de conceptos, relaciones, operaciones y propiedades que conforman el aprendizaje y comprensión de los números racionales. Otras publicaciones (Streefland, 1991; Dickson, 1991), recogen manifestaciones de los alumnos en las que el conocimiento del número racional se interpreta como extensión del conocimiento del número natural; así, por ejemplo, subsiste la creencia de que «la multiplicación hace más grande».

Conocer y entender los números racionales exige comprender sus diferentes significados (relación parte-todo, cociente, razón,...), conocer las características sintácticas y semánticas de distintos sistemas de representación (fraccionario, decimal, recta numérica,...), y establecer conexiones conceptuales entre los sistemas de representación utilizados. En consecuencia, la enseñanza del número racional exige de nuevas acciones para el que aprende (Kieren, 1993); siendo el mundo real, el mundo de los objetos físicos, el escenario adecuado para la formación de conceptos y el área de aplicación de los mismos (Streefland, 1991). Las ideas sobre el número racional positivo están asociadas a tareas de medida de cantidades de magnitud, y será a través de las acciones de recomponer unidades y las de realizar procesos de partición cómo los alumnos podrán establecer la necesaria conexión entre los distintos significados del número racional (Carpenter y otros, 1993).

En este trabajo y bajo la apariencia de descifrar una tabla del Papiro de Rhind, se presenta la fracción con significado de cociente partitivo, la fracción como cantidad de magnitud que resulta de repartir igualmente *a* unidades enteras entre *b* individuos. Al realizar la tarea propuesta el alumno desarrollará un trabajo continuo de reconversión de unidades (que no podrá controlar sin recurrir a una simbología apropiada), que le mostrará una nueva faceta de las fracciones: la concepción del número *a/b* como una totalidad se amplía al aparecer como suma de productos de fracciones y, además, en distintas y múltiples maneras; es decir, cada fracción encierra una gran variedad de relaciones aditivas y multiplicativas con otras fracciones.

Bajo el formato de juego mental se propone a los alumnos la reconstrucción del *Recto* del *Papiro de Rhind*. Aunque escritas de forma secuenciada el lector encontrará dos mensajes diferenciados: de una parte, –sobre fondo gris– las consignas que pueden transmitirse a los alumnos. De otra parte, consideraciones para el profesor que justifican las consignas lanzadas a los alumnos, así como las reacciones que las mismas puedan provocar.

La resolución de lo que denominamos enigma de Ahmes es el motor que pone en juego la formulación y contraste de hipótesis que desembocarán en una reconstrucción especulativa del concepto de reparto en el Egipto antiguo, y siempre bajo la óptica de la concepción personal de la idea de fracción que asignamos a los egipcios, dado que de la documentación existente no se deriva una interpretación única del significado de fracción en tiempos de los faraones. Una vez que se haya definido el significado de fracción que, suponemos, empleó el escriba Ahmes, le queda al alumno un trabajo de descomposición de fracciones en suma de productos de fracciones y de comprobación de sus resultados con los que figuran en el *Recto*.

...el trabajo aquí propuesto es adecuado para alumnos de Educación Secundaria

Una última reflexión: si bien es cierto que el estudio del número racional se comienza en Educación Primaria, el trabajo aquí propuesto es adecuado para alumnos de Educación Secundaria, puesto que es en esta etapa cuando se tienen que consolidar las conexiones entre significados y representaciones de los números racionales (Rico-Castro, 1995).

Escritura actual	Escritura egipcia	Escritura actual	Escritura egipcia	Escritura actual	Escritura egipcia
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$
$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$
$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$	$\frac{2}{17}$	$\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}$	$\frac{2}{19}$	$\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114}$
$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{14}+\frac{1}{42}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{1}{12}+\frac{1}{276}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{15}+\frac{1}{75}$
$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{18}+\frac{1}{54}$	$\frac{2}{29}$	$\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}$	$\frac{2}{31}$	$\frac{1}{20}+\frac{1}{124}+\frac{1}{155}$
$\frac{2}{33}$	$\frac{1}{22}+\frac{1}{66}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$	$\frac{2}{37}$	$\frac{1}{24}+\frac{1}{111}+\frac{1}{296}$
$\frac{2}{39}$	$\frac{1}{26}+\frac{1}{78}$	$\frac{2}{41}$	$\frac{1}{24}+\frac{1}{246}+\frac{1}{328}$	$\frac{2}{43}$	$\frac{1}{42}+\frac{1}{86}+\frac{1}{129}+\frac{1}{301}$
$\frac{2}{45}$	$\frac{1}{30}+\frac{1}{90}$	$\frac{2}{47}$	$\frac{1}{30}+\frac{1}{141}+\frac{1}{470}$	$\frac{2}{49}$	$\frac{1}{28}+\frac{1}{196}$
$\frac{2}{51}$	$\frac{1}{34}+\frac{1}{102}$	$\frac{2}{53}$	$\frac{1}{30}+\frac{1}{318}+\frac{1}{795}$	$\frac{2}{55}$	$\frac{1}{30}+\frac{1}{330}$
$\frac{2}{57}$	$\frac{1}{38}+\frac{1}{114}$	$\frac{2}{59}$	$\frac{1}{36}+\frac{1}{236}+\frac{1}{531}$	$\frac{2}{61}$	$\frac{1}{40}+\frac{1}{244}+\frac{1}{488}+\frac{1}{610}$
$\frac{2}{63}$	$\frac{1}{42}+\frac{1}{126}$	$\frac{2}{65}$	$\frac{1}{39}+\frac{1}{195}$	$\frac{2}{67}$	$\frac{1}{40}+\frac{1}{335}+\frac{1}{536}$
$\frac{2}{69}$	$\frac{1}{46}+\frac{1}{138}$	$\frac{2}{71}$	$\frac{1}{40}+\frac{1}{568}+\frac{1}{710}$	$\frac{2}{73}$	$\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{365}$
$\frac{2}{75}$	$\frac{1}{50}+\frac{1}{150}$	$\frac{2}{77}$	$\frac{1}{44}+\frac{1}{308}$	$\frac{2}{79}$	$\frac{1}{60}+\frac{1}{237}+\frac{1}{316}+\frac{1}{790}$
$\frac{2}{81}$	$\frac{1}{54}+\frac{1}{162}$	$\frac{2}{83}$	$\frac{1}{60}+\frac{1}{332}+\frac{1}{415}+\frac{1}{498}$	$\frac{2}{85}$	$\frac{1}{51}+\frac{1}{255}$
$\frac{2}{87}$	$\frac{1}{58}+\frac{1}{174}$	$\frac{2}{89}$	$\frac{1}{60}+\frac{1}{356}+\frac{1}{534}+\frac{1}{890}$	$\frac{2}{91}$	$\frac{1}{70}+\frac{1}{130}$
$\frac{2}{93}$	$\frac{1}{62}+\frac{1}{186}$	$\frac{2}{95}$	$\frac{1}{60}+\frac{1}{380}+\frac{1}{570}$	$\frac{2}{97}$	$\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$
$\frac{2}{99}$	$\frac{1}{66}+\frac{1}{198}$	$\frac{2}{101}$	$\frac{1}{101}+\frac{1}{202}+\frac{1}{303}+\frac{1}{606}$		

Recto del *Papiro de Rhind*

Presentación (planteamiento del problema)

Ahmes fue un escriba del antiguo Egipto al que se atribuye la autoría de uno de los más valiosos documentos matemáticos que han llegado hasta nuestros días, el conocido como *Papiro de Rhind*, que está datado en el año 1650 A.C.

En ese papiro, además de las soluciones de problemas, aparece una tabla, conocida como *Recto* (Gillings, 1982), que recoge los valores que para los egipcios tenían las que actualmente llamaríamos fracciones de la forma *2/n*, siendo n impar y con valores entre 3 y 101. Constituye la tabla más completa y extensa de las que han llegado hasta nosotros. Con la simbología habitual, el *Recto* se puede transcribir tal como se muestra en la página anterior.

En esta transcripción se entiende que los egipcios no conocen las fracciones en la misma forma que nosotros las escribimos en la actualidad. Para Ahmes las cantidades fraccionarias son de la forma *1/n*, fracciones unitarias, y la suma de estas fracciones unitarias permite representar cualquier cantidad. Y, como se observa en la tabla, también se concede el mismo *status* a la expresión 2/3 puesto que ésta no se descompone en suma de fracciones unitarias.

En la escritura original, las fracciones unitarias vienen indicadas por una raya encima del denominador, $\overline{n}$. De este modo, los egipcios pueden escribir las cantidades fraccionarias con los mismos signos que utilizan para escribir las cantidades enteras, entendiendo que $\overline{n}$ expresa la cantidad de magnitud resultante de dividir la unidad en n partes iguales. Tan sólo hay una excepción: la fracción 2/3 se escribe con dos rayas encima del 3, es decir $\overline{\overline{3}}$.

También hay que hacer notar que en la escritura egipcia no aparecen los signos + que figuran en el cuadro ya que su sistema de numeración aditivo conlleva que la presencia de dos símbolos seguidos se interprete como la suma de las cantidades que cada uno representa.

Para Ahmes las cantidades fraccionarias son de la forma 1/n, fracciones unitarias y la suma de estas fracciones unitarias permite representar cualquier cantidad.

...la propuesta no es la de ejercitarse en la práctica de una técnica sobre la que se les ha instruido previamente, sino que la propuesta es la de describir una técnica de la que conoce el resultado.

Al observar la tabla parece evidente que la idea de fracción que usó el escriba difiere notablemente de la que tenemos nosotros, pero ¿qué hay que hacer para escribir las fracciones en la forma que lo hizo Ahmes?

Esta pregunta, nos lleva a practicar un juego apasionante en el que ganar significa descubrir cómo funcionaba la mente de una persona de la que sólo conocemos los resultados y no cómo obtenerlos.

Así que se propone el siguiente reto:

Descubrir un método para pasar de nuestra escritura de fracciones a la escritura empleada por Ahmes.

Aunque planteado como un juego, realmente se propone a los alumnos una tarea diferente a las que habitualmente se realizan en la educación matemática. Y la diferencia radica en que ahora la propuesta no es la de ejercitarse en la práctica de una técnica sobre la que se les ha instruido previamente, sino que la propuesta es la de describir una técnica de la que conoce el resultado de aplicarla en 50 casos particulares. Por tanto, se les pide a los alumnos que formulen hipótesis y que las confirmen o modifiquen si no se verifican en los resultados que ya conocen.

Es posible que los alumnos comiencen a hacer algunas conjeturas que se irán desvaneciendo en cuanto traten de verificar su validez. Después de estos intentos iniciales, y dada la complejidad de la tarea, el profesor constituirá la referencia obligada para orientar el trabajo. Estas ayudas las hemos denominado pistas.

Las ayudas del juego (algunas pistas)

Parece evidente que si Ahmes escribe las fracciones en la forma que lo hizo es porque tenía una concepción distinta de la nuestra. Por tanto, habrá que recabar información acerca de las fracciones en tiempos de los escribas, aunque debemos advertir que solamente podemos hacer algunas suposiciones razonadas puesto que en ninguno de los escasos documentos que han llegado hasta nosotros hay información al respecto.

Primera pista: usos de la fracción egipcia

Analizando los informes de los historiadores de la matemática encontramos un cierto acuerdo sobre el hecho de que en el antiguo Egipto las fracciones aparecen en la resolución de problemas sobre repartos (Fauvel y Gray, 1987; Eves, 1969) y en la presentación de resultados de cálculos aritméticos (Grattan-Guinnes, 1993). De modo que tomaremos como ciertas las siguientes consideraciones:

- Las fracciones surgen en el contexto de la resolución de problemas de reparto de cantidades enteras. Son nuevas cantidades que aparecen cuando el resultado del reparto no da una unidad entera sino una parte de la unidad.
- Los egipcios no conocen el significado de una fracción como un número: no encuentran sentido a expresiones como por ejemplo 2/11. Para ellos los números van asociados a cantidades, de forma que lo que sí entenderán es que al repartir 2 panes entre 11 personas cada una de ellas recibe 1/6 de pan y 1/66 de pan.

A cualquiera de los jóvenes estudiantes que les preguntásemos el significado de la fracción 2/5 daría una respuesta similar a esta: si tienes una tarta (o una barra de helado, u otro modelo) la divides en 5 partes iguales y tomas 2 de ellas. Por tanto, para estos jóvenes la fracción tiene una entidad numérica y utilizan objetos físicos si necesitan ejemplificar su significado.

Pero esa no es la situación en la que se encuentra la matemática egipcia, en esos momentos todavía se asocia número y cantidad. En consecuencia, los estudiantes deberán ampliar la idea de fracción como número abstracto y ligar las fracciones a objetos físicos. Item más, con esta nueva situación el alumno debe ampliar su concepción de la fracción como relación parte-todo y asociar las fracciones a acciones de reparto, lo que exige dar significado a la fracción como cociente partitivo de cantidades enteras. Esta interacción entre dos constructos diferentes de las fracciones le proporcionará mejores argumentos para la posterior identificación de las representaciones fraccionaria y decimal del número racional.

Para no distraer al alumno de la tarea propuesta no nos parece de interés ahondar en el significado de la fracción entre los egipcios por cuanto no hay acuerdo entre los historiadores de la matemática. Así por ejemplo, resultaría complejo y, en nuestra opinión, de escaso interés, defender o rebatir el significado ordinal de Gardiner (en Fauvel-Gray, 1987:22) o la concepción de Ritter (Benoit y otros, 1992:30-31) de asociar la fracción a procesos de medida.

Segunda pista: formas de repartir

Si, como hemos señalado, las fracciones egipcias aparecen al hacer repartos tiene sentido hacerse la pregunta ¿cómo se hace un reparto?

Para acercarnos más al pensamiento de los egipcios se propone hacer un reparto pero en una situación de la vida real:

Se tienen que repartir tres bizcochos rectangulares entre cinco personas de modo que cada una reciba la misma cantidad de bizcocho, ¿cuánto le corresponde a cada persona?

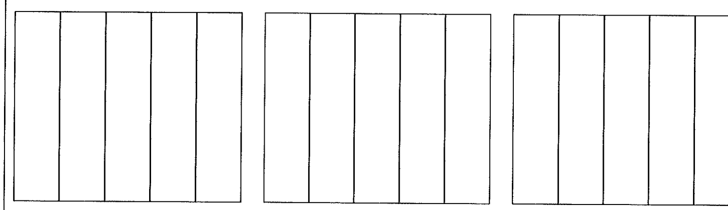
...con esta nueva situación el alumno debe ampliar su concepción de la fracción como relación parte-todo y asociar las fracciones a acciones de reparto, lo que exige dar significado a la fracción como cociente partitivo de cantidades enteras.

Básicamente, son dos los procedimientos que aparecen como respuestas de los alumnos.

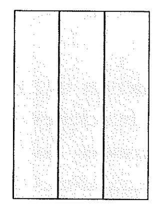
Procedimiento 1

Consiste en dividir cada bizcocho en 5 partes iguales y dar 3 de ellas a cada una de las personas.

Técnica de reparto



Resultado del reparto



Este procedimiento de reparto se corresponde con una manipulación numérica de las fracciones derivada de los conocimientos de los alumnos. Pero no se tiene en cuenta que para resolver el problema real hay que dividir cada uno de los 3 bizcochos en 5 partes iguales. Ahora bien, hacer divisiones en 5 partes iguales no es sencillo y repetir el proceso tres veces aún complica más el trabajo.

Este tipo de respuesta surge al transformar el problema para poder operar con números naturales y encontrar la respuesta por medio de una división: al cortar cada bizcocho en 5 partes lo que tenemos son 15 partes iguales de bizcocho de tamaño [1/5] de unidad, que hay que repartir entre 5 personas. Resulta sencillo hacer la división para concluir que cada persona recibe 3 partes de la 15 que se tenían. En resumen, se utiliza nuestro conocimiento matemático para llegar a la igualdad:

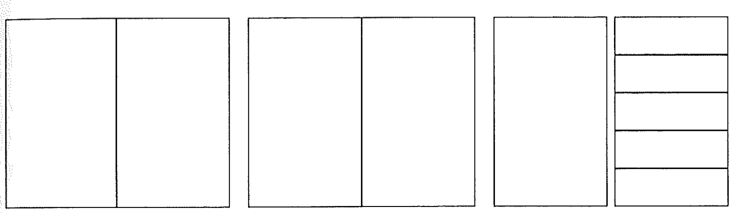
$$\frac{3}{5} = 3[1] \div 5 = 3 \cdot 5\left[\frac{1}{5}\right] \div 5 = 15\left[\frac{1}{5}\right] \div 5 = 3\left[\frac{1}{5}\right]$$

Procedimiento 2

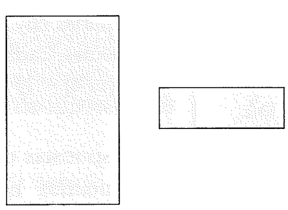
Dar a cada una de las personas una cantidad lo suficientemente grande como para realizar el reparto en una sola fase; y si ello no se cumpliese, proceder a repartir las cantidades sobrantes. De forma más detallada podíamos hacer los pasos siguientes:

- Es evidente que a cada una de las 5 personas no podemos darle un bizcocho entero; tan sólo le corresponderá una parte de un bizcocho.
- Intentemos dar a cada una de las personas una mitad de bizcocho: todos reciben la mitad de la unidad bizcocho (1/2)[1], y sobra la mitad de un bizcocho [1/2].
- Esta mitad sobrante si se distribuye entre cinco personas a cada una de ellas le corresponderá una quinta parte de ese trozo (1/5)[1/2], es decir, 1/10 de bizcocho.

Técnica de reparto



Resultado del reparto



Este procedimiento de reparto al ponerlo en práctica indica que hay que dividir los bizcochos en mitades, que es una tarea más sencilla que la de dividir en 5 partes iguales. Y la división en 5 partes iguales se tiene que hacer una sola vez con lo que, es de suponer, este reparto produce un menor número de errores, hace las partes más iguales. Este procedimiento nos lleva a la descomposición en fracciones unitarias de la forma siguiente:

$$\frac{3}{5} = 3[1] \div 5 = \frac{1}{2}[1] + 1\left[\frac{1}{2}\right] \div 5 = \frac{1}{2}[1] + \frac{1}{5}\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$$

A partir de esta concepción es como podemos entender el origen de las fracciones egipcias como suma de fracciones de numerador 1, fracciones unitarias, que indican la cantidad resultante de dividir la unidad en n partes iguales.

Desde la perspectiva de la educación matemática hay significados implícitos en el uso de los procedimientos anteriores. Si tomamos en consideración los aprendizajes que subyacen en los procedimientos de reparto indicados, observamos que:

- En el procedimiento 1, la fracción aparece como entidad única, como una totalidad. La única relación de la fracción con otras fracciones se limita a una estructura aditiva: 3/5 = 1/5 + 1/5 + 1/5, estructura que es aplicable a cualquier fracción $a/b = a\cdot(1/b)$.
- En el procedimiento 2, en la cultura egipcia antigua, la fracción no se concibe más que como suma de partes de la unidad de tamaños diferentes: cada uno de los sumandos es de tamaño más pequeño que el anterior, puesto que los sucesivos sumandos son el resultado de repartir las partes que han quedado en fases anteriores del reparto. Y cada una de esas partes diferentes son partes de partes de la unidad. De este modo, las fracciones aparecen con las estructuras aditiva y multiplicativa.

Además, este procedimiento 2 proporciona un entorno adecuado para interiorizar los principios de cambio de unidades que, como indican Behr y otros (1993:306) son aplicables a los conceptos de fracción, número racional, porcentaje, razón y proporción.

Finalmente, la aplicación del procedimiento 2, exige la adopción de un sistema simbólico que permita controlar las partes que hay que repartir, el número de individuos que participan en el reparto y el tamaño de las partes.

La práctica del juego (¿el enigma está resuelto?)

Pensar el modo en que hacía los repartos el escriba Ahmes y comprobar si los resultados coinciden con los del *Recto;* así, si queremos buscar el equivalente egipcio a nuestra fracción 2/5 tenemos que resolver el problema de repartir 2 panes entre 5 personas y hacer el reparto de acuerdo con la forma en que cada uno piense que lo hacía Ahmes.

Con el ejemplo que se ha utilizado es previsible que los alumnos opten por el modo de reparto que hemos denominado procedimiento 2. El modo de trabajo ante cada fracción será similar al que hemos empleado en el ejemplo de repartir 3 bizcochos entre 5 personas.

Si el profesor lo considera conveniente, el método de ensayo y error utilizado en el mencionado ejemplo puede sustituirse por un procedimiento más formalizado en los términos que se exponen seguidamente:

Definición: llamamos «la parte mayor» de la fracción a/b a la fracción unitaria $1/n$ tal que $n \cdot a \geq b > (n-1) \cdot a$.

Esta definición, interpretada en el contexto de las fracciones egipcias, significaría que «la parte mayor» es la mayor cantidad de magnitud que puede darse a cada uno de los b individuos entre los que hay que repartir igualmente a unidades de esa magnitud.

El reparto de a unidades entre b individuos siguiendo el procedimiento de dar a cada individuo «la parte mayor» en cada una de las fases del proceso, se resume en los siguientes puntos:

1. Dada la fracción a/b, encontrar en número natural n tal que $n \cdot a \geq b > (n-1) \cdot a$ y establecer como primera fase del reparto la descomposición:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{n} + \ldots$$

2. Si $n \cdot a \neq b$ no se ha concluido el reparto, aparecen nuevas fases del reparto para la fracción c/d, siendo:

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{n} = \frac{n \cdot a - b}{b \cdot n} = \frac{c}{d} < \frac{1}{n}$$

3. Si $c \neq 1$, la reiteración del proceso exige encontrar un número natural m, tal que:

$$m \cdot c \geq b \cdot n > (m-1) \cdot c$$
$$m \cdot (n \cdot a - b) \geq b \cdot n > (m-1) \cdot (n \cdot a - b)$$

En esta segunda fase, cada uno de los b individuos recibe una parte de tamaño $1/m$ de unidad y el reparto se simboliza como:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \ldots$$

4. El proceso continúa hasta que en la fracción del tipo c/d el numerador sea 1, en cuyo caso se completa la descomposición en la siguiente forma:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{d}$$

La propia construcción del proceso nos muestra que el procedimiento de descomposición en fracciones unitarias con el procedimiento de «la parte mayor» es único y contiene un número finito de sumandos.

Análisis de las jugadas (el enigma no está resuelto)

Los resultados de descomposiciones en fracciones que van obteniendo los alumnos seguramente levantarán pronto algunas voces de alarma: esta forma de repartir no sirve, no salen los resultados del *Recto*,...

Ahmes no sólo debía pensar en indicar cómo hacer el reparto, también debía pensar en cómo llevarlo a la práctica.

En realidad, lo que está ocurriendo es que los alumnos utilizan como técnica de reparto la que hemos denominado «la parte mayor». Ahora bien, el problema, que en principio parecía resuelto, se ha complicado puesto que al aplicar este procedimiento hace que las fracciones del tipo $2/n$ (n impar) se descomponga en suma de sólo dos fracciones unitarias, mientras que en el *Recto* aparecen fracciones descompuestas en suma de hasta cuatro fracciones unitarias.

Pista tres: la tarea de dividir en partes iguales

Hemos dicho que Ahmes no sólo debía pensar en indicar cómo hacer el reparto, también debía pensar en cómo llevarlo a la práctica. Vamos a simular la tarea de Ahmes y así es posible que entendamos su forma de actuar.

Observad las fracciones que utiliza Ahmes en el *Recto* para ver en cuántas partes se divide la unidad. Después, analizad la forma en que se llega a la construcción de esas fracciones o partes de la unidad: así, por ejemplo, para obtener la fracción 1/12 significa que la unidad hay que dividirla en 2 mitades, dos partes de tamaño 1/2; una de esas mitades hay que dividirla en dos partes iguales, cada una de ellas de tamaño 1/2 [1/2] = 1/4 de unidad; y, por último, una de esas partes hay que dividirla en tres partes iguales, cada una de ellas de tamaño 1/3 [1/4] = 1/12 de unidad.

Las respuestas de los alumnos hay que encaminarlas hacia los aspectos que son de mayor interés para nuestro objetivo de reconstrucción del *Recto*. Y en este sentido nos parece oportuno destacar los siguientes aspectos:

- Las fracciones de Ahmes tienen dos partes diferenciadas: la que corresponde a la primera fracción, primera fase del reparto, y las restantes fracciones.
- De la igualdad:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{n} + \frac{n \cdot a - b}{b}\left[\frac{1}{n}\right]$$

se deduce que la primera fracción, primer trozo del reparto, puede ser del tamaño que se «quiera», mientras que las fracciones restantes tendrán como denominador un múltiplo del denominador de la fracción inicial, salvo los casos 2/35 y 2/91 En otras palabras, la forma de realizar el reparto exige que, con independencia de las partes en que se haya dividido la unidad en la primera fase, en las sucesivas fases del mismo se debe dividir en tantas partes como personas participen en el reparto.

- En la mayor parte de los casos, las fracciones que Ahmes utiliza en el primer reparto se obtienen haciendo divisiones en 2 y en 3 partes iguales. En varios casos también aparecen divisiones en 5 partes y, en contadas ocasiones, las divisiones hay que hacer en 7, 11, 13, 17, 19 y 29 partes.
- Las fracciones de Ahmes que corresponden a las otras fases del reparto se obtienen, en su mayor parte, por divisiones en mitades y en tercios. Son escasas las divisiones en 5 partes y mucho más escasas en 7 partes.

La descomposición en factores de los denominadores de las fracciones unitarias que hay en el *Recto* hacen posible un amplio debate en torno a las relaciones de divisibilidad entre el denominador de la fracción *2/n* y los de las fracciones unitarias en que se descompone. Sin embargo, es dificultoso establecer normas de comportamiento por cuanto existen casos anómalos que impiden la formulación de hipótesis de validez general.

Con independencia del debate sobre los aspectos de divisibilidad que se estimen oportunos, lo que resulta más llamativo es la tendencia general que se aprecia a utilizar fracciones de denominador formado por múltiplos de 2 y de 3. Lo que vendría a ratificar la fuerte presencia de la relación con problemas de la vida real que subyacen en las fracciones egipcias. La constante presencia de este tipo de fracciones en la matemática egipcia induce a Neugebauer (1969:74) a denominarlas fracciones «naturales» o fracciones que tienen asignado desde el principio un signo especial y que son unidades individuales consideradas como conceptos básicos en igual nivel que los enteros.

...lo que resulta más llamativo es la tendencia general que se aprecia a utilizar fracciones de denominador formado por múltiplos de 2 y de 3. Lo que vendría a ratificar la fuerte presencia de la relación con problemas de la vida real que subyacen en las fracciones egipcias.

Los alumnos pueden encontrar justificaciones al comportamiento de Ahmes si se les formulan propuestas como las siguientes:

Sin utilizar más que el doblado, y tomando como unidad el folio de papel:

1. Hacer 2 partes iguales. ¿Se pueden hacer 4 partes iguales? y ¿ocho partes iguales? ...,
2. Hacer 3 partes iguales. Hacer 9 partes iguales, ...
3. Dividir el folio en 6 partes iguales. Idem para 12, 18, ...
4. Buscar algún modo de dividir el folio en 5 partes iguales.
5. Buscar algún modo de dividir el folio en 7 partes iguales.

...

Pista cuatro: la obtención real de las partes

Aplicando el procedimiento de «la mayor parte» se llega a la descomposición de la fracción:

$$\frac{2}{15}=\frac{1}{8}+\frac{1}{120}$$

Esta descomposición hay que interpretarla en el sentido de que al dividir 2 panes entre 5 personas hay que dividir la unidad en 8 partes iguales, que entendemos es fácil de llevar a la práctica (la mitad de la mitad de medio pan). Sin embargo, la descomposición que aparece en el Recto, la que prefiere el escriba Ahmes, es:

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$$

¿Por qué Ahmes ha elegido esa forma de reparto?

Responder a esta cuestión implica analizar las diferentes acciones que son necesarias para realizar cada una de las opciones que se quieren estudiar.

I. Procedimiento de «la mayor parte»

Para alcanzar el resultado:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{120}$$

se necesitan dar los pasos siguientes:

1) Dividir un pan en 8 partes iguales, que se hace por divisiones sucesivas en dos partes.
2) Dividir el segundo pan en 8 partes iguales. En total hay 16 partes, de tamaño 1/8, así que podemos hacer un primer reparto: cada una de las 15 personas recibe 1/8 de pan y sobra 1/8 de pan.

3) Al repartir entre 15 personas este trozo sobrante, de tamaño 1/8, hay que hacer la partición en 3 partes iguales y, después, volver a subdividir cada una de esas partes en 5 partes iguales. De este modo se presume que las últimas particiones serán complejas por la «pequeñez» de los trozos.

II. Procedimiento alternativo

La descomposición en:

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$$

requiere seguir este proceso:

1) Dividir el primer pan en 10 partes iguales, es decir dividirlo en dos partes y cada una de ellas subdividirla en 5 partes iguales.
2) Dividir el segundo pan en dos mitades, y una de ellas volverla a subdividir en 5 partes iguales. Tenemos 10+5=15 trozos de tamaño 1/10, cada uno de los cuales lo podemos dar a las 15 personas y sobra 1/2 de pan.
3) La mitad de pan que queda dividirla en 15 partes iguales: primero en 3 partes y, después, cada una de ellas en 5 partes. De esta forma tenemos 15 trozos, de tamaño 1/15 [1/2] que podemos distribuir entre las 15 personas y dar por finalizado el reparto.

Se deduce, en consecuencia, que Ahmes actúa desde la solución real de problemas de reparto. De este modo, la elección, entre distintas opciones de distribuir igualmente, viene condicionada porque las divisiones se hagan utilizando, prioritariamente, mitades y tercios, pero esa norma se desestima si con ello se logra que los repartos posteriores se hagan sobre cantidades de tamaño mayor.

La aparición de las distintas pistas permite al alumno ir formulando una hipótesis acerca del modo en que actuaba el escriba Ahmes. De las discusiones entre alumnos o entre profesor y alumnos deben perfilarse las ideas básicas:

1. Hay que analizar individualmente cada situación de reparto y tener presente que se busca una solución que garantice la facilidad de su puesta en práctica.
2. El reparto se comienza utilizando el procedimiento que hemos denominado «la parte mayor».
3. Si este procedimiento lleva a hacer una primera fase del reparto en la que se tengan que realizar divisiones «anómalas» se investiga otro alternativo. La denominación de «anómalas» hace referencia a aquellas que no sean en mitades y tercios.
4. Se investigan nuevos procedimientos en los que las divisiones iniciales sean en partes «anómalas» por si el reparto de las siguientes fases se puede hacer sobre cantidades de magnitud de tamaño mayor que las que se obtenían en el procedimiento del punto 3.

...la elección, entre distintas opciones de distribuir igualmente, viene condicionada porque las divisiones se hagan utilizando, prioritariamente, mitades y tercios, pero esa norma se desestima si con ello se logra que los repartos posteriores se hagan sobre cantidades de tamaño mayor.

Encontrar la solución (definir el método de trabajo de Ahmes)

Pista cinco: modificar el tamaño de las partes

Con todas las informaciones acumuladas, veamos si hay datos suficientes para descomponer cualquiera de las fracciones que aparecen en el *Recto*. En concreto, se propone resolver la siguiente situación problemática:

En el supuesto de repartir igualmente 2 panes entre 13 personas, encontrar una justificación a la solución que aparece en el Recto:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$$

Hagamos uso, de forma ordenada, de todos los resultados que hemos ido obteniendo:

I. Hallar «la mayor parte»

Como ya hemos indicado anteriormente, la primera cantidad que aparece en el reparto se obtiene al hacer una división primera en p partes iguales, siendo $p = (n+1)/2$. De este modo:

$$\frac{2}{13}=\frac{1}{7}+\frac{1}{91}$$

Ahora bien, al llevar este resultado a la práctica real del reparto observamos que debemos dividir un pan en 7 partes iguales; después una de esas partes hay que dividirla en 13 partes iguales. Este tipo de divisiones es de las que denominábamos «anómalas» por lo que debemos buscar algún procedimiento alternativo.

II. Búsqueda de otras particiones iniciales

El proceso consistirá en aumentar el número inicial de las partes en que se dividen los panes e ir analizando la dificultad de hacer esas particiones y de repartir las partes sobrantes.

Si cada persona recibe una parte de tamaño [1/8] de pan y sobran 3 partes de tamaño [1/8] de pan:

$$\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{3}{13}\left[\frac{1}{8}\right]=\frac{1}{8}+(3\div 13)\left[\frac{1}{8}\right] \quad (*)$$

Ahora queda resolver la tarea de repartir 3 partes de tamaño [1/8] de pan entre 13 personas.

Volviendo a aplicar el principio de «la mayor parte»:

$$\frac{3}{13}=\frac{1}{5}+\frac{2}{13}\left[\frac{1}{5}\right]$$

Y sustituyendo este resultado en (*), el reparto se formularía como:

$$\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{3}{13}\left[\frac{1}{8}\right]=\frac{1}{8}+\frac{1}{5}\left[\frac{1}{8}\right]+\frac{2}{13}\left[\frac{1}{5}\right]\left[\frac{1}{8}\right]=$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{40}+\frac{2}{13}\left[\frac{1}{40}\right]$$

Este resultado nos obliga a abandonar el proceso por cuanto aparece de nuevo un reparto similar al inicialmente planteado: repartir 2 unidades (de tamaño [1/40] de pan), entre 13 personas.

Al aumentar, de manera ordenada, el tamaño inicial de las partes de la primera fase el reparto de 3 unidades (de tamaño [1/8] de pan) entre 13 personas proporciona los resultados siguientes:

$$\frac{3}{13}=\frac{1}{6}+\frac{5}{13}\left[\frac{1}{6}\right]$$

$$\frac{3}{13}=\frac{1}{7}+\frac{8}{13}\left[\frac{1}{7}\right]$$

$$\frac{3}{13}=\frac{1}{8}+\frac{11}{13}\left[\frac{1}{8}\right]$$

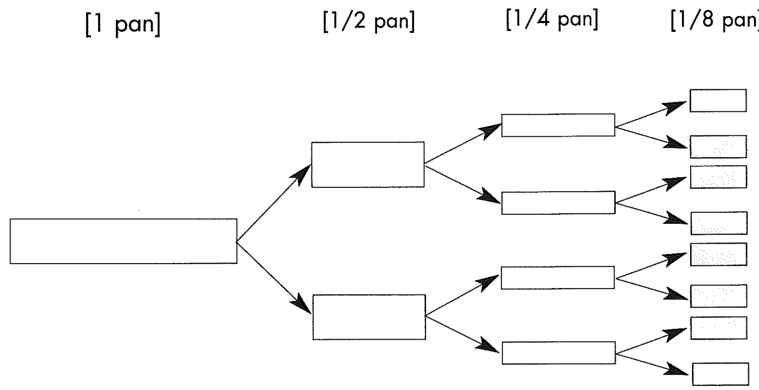
$$\frac{3}{13}=\frac{1}{9}+\frac{14}{13}\left[\frac{1}{9}\right]$$

$$\frac{3}{13}=\frac{1}{10}+\frac{17}{13}\left[\frac{1}{10}\right]$$

Es evidente que este proceso no va a permitir la descomposición (reparto) buscada puesto que cada vez aumenta el número de partes, lo que implica que el tamaño de cada una de ellas es cada vez menor.

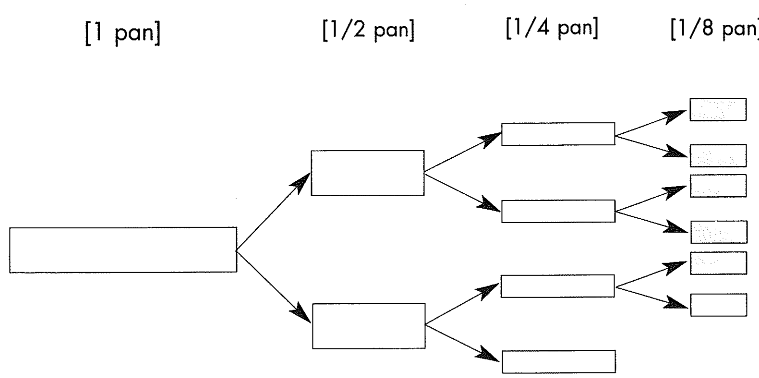
III. Modificar el tamaño de las partes

Por el resultado que figura en el *Recto* sabemos que la primera fase del reparto hace que cada persona reciba una parte de pan de tamaño [1/8]. Sin embargo, los resultados que obtiene el escriba Ahmes indican que el procedimiento de aumentar el número de partes no es adecuado. De nuevo se impone retomar la tarea de hacer efectivo el reparto de forma práctica. Para ello, observemos en qué modo hay que actuar para que las 13 personas reciban 1/8 de pan:



Al dividir el primero de los panes, disponemos de 8 partes iguales (de tamaño [1/8 de pan]), pero como hay 13 personas necesitamos más partes de ese tamaño, que hemos de conseguir del segundo pan. En concreto necesitamos 5 partes (de tamaño [1/8 de pan]).

Procedemos así con el segundo pan:



Se observa que para conseguir las 5 partes (de tamaño [1/8 de pan]) que nos hacían falta para completar la primera fase del reparto, nos han sobrado dos trozos: uno de tamaño [1/4 de pan] y otro de tamaño [1/8 de pan].

Para completar el reparto no queda más que distribuir esos dos trozos sobrantes. De este modo cada persona recibirá:

$$\frac{1}{13}\left[\frac{1}{4}\right]+\frac{1}{13}\left[\frac{1}{8}\right]=\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$$

Estas dos partes que recibe cada persona sumadas a la parte que le ha correspondido en la primera fase del reparto completan la solución que aparece en el *Recto*:

$$\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$$

Volviendo al terreno de los símbolos, la tarea inicial de repartir 3 partes de tamaño [1/8] de pan entre 13 personas, se transforma en dos: repartir 2 de esas partes entre 13 personas y la otra parte entre 13 personas. De este modo, modificando el tamaño de las partes se tendría:

- 2 partes de tamaño [1/8] se convierten en 1 parte de tamaño [1/4] , que distribuida entre 13 personas proporciona 1/13 [1/4] = 1/52 de pan por persona.
- 1 parte de tamaño [1/8] distribuida entre 13 personas proporciona 1/13 [1/8] = 1/104 de pan por persona.

En general, modificar el tamaño de las partes significará descomponer la cantidad dada por la expresión:

$$\frac{c}{b}\left[\frac{1}{p}\right]$$

en suma de fracciones unitarias. Y ello se conseguirá siempre que:

$$c\left[\frac{1}{p}\right] \text{ se pueda escribir como } q\left[\frac{1}{p}\right]+r\left[\frac{1}{p}\right]+s\left[\frac{1}{p}\right]+\ldots$$

$$\text{siendo } c=q+r+s+\ldots$$

Ahora bien, cada sumando se transforma en una fracción unitaria solamente si es 1 o un divisor de p. Por tanto, el modificar el tamaño de las partes significa descomponer c en suma de divisores de p, divisores del número de partes en que se divide la unidad en la primera fase del reparto. No obstante, y teniendo en cuenta que cada uno de los sumandos anteriores representa una parte de la unidad que hay que repartir entre b individuos, interesa que entre las posibles descomposiciones de c en suma de divisores de p se elijan aquellos que, siendo distintas, permitan que las partes resultantes sean del tamaño más grande posible. Por ejemplo, nos planteamos modificar el tamaño de las partes en el caso de la expresión 37 [1/60].

Como los divisores de 60 son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 y 60, hay distintas maneras de formar sumas con resultado 37: 30 + 4 + 2 + 1; 30 + 6 + 1; 30 + 5 + 2; 30 + 4 + 3; 20 + 15 + 2; 20 + 10 + 5 + 2; 20 + 12 + 5; 15 + 12 + 10; ...

La elección de la más conveniente, de acuerdo con el proceder del escriba, sería 15 + 12 + 10, puesto que ello permite que las 37 partes de tamaño [1/60] se transformen en las partes de mayor tamaño de las que originan otras sumas:

$$15\left[\frac{1}{60}\right]+12\left[\frac{1}{60}\right]+10\left[\frac{1}{60}\right]=\left[\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{5}\right]+\left[\frac{1}{6}\right]$$

Recopilando todas las informaciones obtenidas a través de las pistas que se han proporcionado, podemos enunciar una formulación sobre el modo en que los egipcios llevaban a la práctica el reparto de a unidades entre b individuos, y sobre cómo ello se refleja en suma de fracciones unitarias:

A la vista de la complejidad del proceso se comprende perfectamente la existencia de tablas en las que los escribas recogían resultados de operaciones y que así evitaba repetir el proceso en situaciones similares.

1. El procedimiento inicialmente utilizado es el de «la parte mayor», lo que lleva a un reparto en la forma:

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{p}+\frac{c}{b}\left[\frac{1}{p}\right]$$

2. Si el procedimiento de «la parte mayor» se considera dificultoso para poner en práctica, se analizan otras opciones incrementando de forma ordenada el valor de p. Inicialmente se eliminan algunas opciones: que p sea impar, que p sea múltiplo de 7 o de 11,... Estas opciones se reconsideran en el caso de que no se encuentre una solución satisfactoria.
3. En cada una de las opciones que aparezcan al aumentar el valor de p, se estudia la viabilidad del reparto que representa la expresión $(c/b)[1/p]$ y ello se puede hacer por dos vías:
   - Reiterar el proceso de división $c \div b$ hasta completar el reparto.
   - Modificar el tamaño de las partes, es decir, buscar la descomposición de $c\ [1/p]$ en suma de fracciones con denominador menor o igual que p.
4. La elección entre dos resultados:

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{p'}+\frac{c'}{b}\left[\frac{1}{p'}\right] \quad \text{y} \quad \frac{a}{b}=\frac{1}{p''}+\frac{c''}{b}\left[\frac{1}{p''}\right]$$

viene determinada por dos factores:
   - Se elige de entre los valores p' y p'' aquel que permita hacer las particiones de la forma menos dificultosa.
   - Se prefiere aquel de los repartos $(c'/b)\ [1/p']$ y $(c''/b)[1/p'']$ que conlleve divisiones sobre partes de unidad de mayor tamaño.

A la vista de la complejidad del proceso se comprende perfectamente la existencia de tablas en las que los escribas recogían resultados de operaciones y que así evitaba repetir el proceso en situaciones similares. Así que lo que en la actualidad nos aparece como una simple tabla de resultados en el tiempo de los faraones constituyó una herramientas de trabajo de los escribas con una valor práctico muy valioso.

Ganar (escribir la solución)

Puesto que ya se ha detallado el método que se asocia con la manera en que procedía el escriba Ahmes, queda la tarea de verificar su aplicabilidad a los resultados que aparecen en el *Recto*. En orden a facilitar la tarea, se hacen las siguientes sugerencias:

- El reparto a/b ha de hacerse en distintas fases.
- En la primera fase hay que determinar el tamaño de las partes que se otorga a cada individuo, así como las partes que restan y el tamaño de las mismas. Sugerimos la utilización de expresiones del tipo $a/b = 1/n + (c/b)[1/n]$ para indicar que al repartir a unidades entre b personas se da a cada una de ellas una parte de tamaño $1/n$ de unidad, y que queda por repartir c unidades, de tamaño $[1/n]$, entre las b personas.
- En la división de la unidad considerar prioritariamente las fracciones 1/2, 1/3 y las que resultan de productos entre ellas. Si ello no fuese suficiente tomar en consideración otras fracciones como 1/5, 1/7,...
- En el estudio de otras opciones, eliminar las descomposiciones en sumas de más de cuatro fracciones, pues no son recogidas en el *Recto*.

Ya estamos en condiciones de ver si funciona todo lo que hemos ido diciendo. Así que escondemos los resultados que aparecen en el *Recto*, y vosotros debéis conseguir escribir cada una de las fracciones de la forma $2/n$ en la forma que lo hizo Ahmes.

La calidad del trabajo reside más en reflexionar sobre el significado de la fracción egipcia que en la práctica exhaustiva de técnicas de cálculo. Por tanto, serán las circunstancias particulares del aula las que aconsejen reconstruir todo el *Recto*; o solamente hasta la fracción 2/35, por ejemplo; o bien las fracciones que se descomponen en tres sumandos,...

La calidad del trabajo reside más en reflexionar sobre el significado de la fracción egipcia [...] serán las circunstancias particulares del aula las que aconsejen reconstruir todo el Recto; o solamente hasta la fracción 2/35, por ejemplo; o bien las fracciones que se descomponen en tres sumandos,...

También se puede contemplar la posibilidad de establecer discusiones sobre temas más concretos, siempre en torno al significado de la fracción egipcia, como los siguientes :

a) En la fracción 2/45 el escriba opta por la descomposición: 2/45 = 1/30 + 1/90.

   ¿En qué mejora la propuesta del escriba a la descomposición 2/45 = 1/36 + 1/60?

b) ¿Qué descomposición te parece más adecuada 2/55 = 1/30 + 1/330 (opción del escriba) o 2/55 = 1/40 + 1/88? Justifica tu respuesta.

c) El autor Guillings (1972:68) argumenta que la descomposición que hace el escriba de la fracción 2/95 = 1/60 + 1/380 + 1/570 se obtiene del producto 1/5 × 2/19. Comprueba si es cierta la formulación de dicho autor.

d) ¿Encuentras alguna justificación a que el escriba opte por la descomposición anterior de la fracción 2/95 frente a la descomposición 2/95 = 1/60 + 1/228?

e) Es conocida por los escribas la descomposición 1 = 1/2 + 1/3 + 1/6. A la vista de las descomposiciones que has encontrado para 2/101, ¿se puede utilizar la igualdad anterior para mejorar los resultados?

Bibliografía

ARGUELLES, J. (1989): *Historia de la Matemática*, Akal, Madrid.

BENOIT, P., K. CHEMLA y J. RITTER (editores) (1992): *Histoire de fractions, fractions d'historie*, Birkhäusen Verlang, Berlin.

BEHR, M. J. y otros (1993): «Rational number, Ratio, and Proportion», en D. A. GROWS (edit.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan Publishing Company, New York.

BOYER, C. B. (1986): *Historia de la Matemática*, Alianza Editorial, Madrid.

BUNT, L. N. H., P. S. JONES y J. D. BEDIENT (1987): *Le radice storiche delle matehematiche elementari*, Cm4-Zanichelli, Bologna.

CAMPBELL, D. M. y J. HIGGINS (editores) (1984). *Mathematics. People. Problems. Results*, Wadworth international, Belmont (California).

CARPENTER, T. P., E. FENNEMA y T. A. ROMBERG (1993): «Toward a unified discipline of scientific inquiry», en T. P. CARPENTER, E. FENNEMA y T. A. ROMBERG (edits.): *Rational numbers*, Lawrence Erlbaum Associates, publishers, Hilldale, New Jersey.

COLLETTE, J. P. (1985): *Historia de las matemáticas*, Siglo XXI de España, Madrid.

CROSSLEY, J. N. (1987): *The emergence of number*, World Scientific, Singapore.

DAHAN-DALMENICO, A. y J. PEIFFER (1986): *Une histoire des mathêmatiques*, Editions du Seuil, Paris.

DICKSON, L., M. BROWN y O. GIBSON (1991): *El aprendizaje de las matemáticas*, Ministerio de Educación y Ciencia-Labor, Madrid.

EVES, H. (1969): *History of mathematics* (tercera edición), Holt, Rinehart y Winston, New York

FAUVEL, J. y J. GRAY (Editores) (1992): *The History of Mathematics. A reader,* Tercera edición, Macmillan Press-The Open University, London.

FLEGG, G. (1989): *Numbers through the ages,* Macmillan-The Open University, London.

GILLINGS, R. J. (1982): *Mathematics in the time of the pharaohs,* Dover Publications, New York.

GIMÉNEZ, J. (1991): *Didáctica especial del número racional positivo,* Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona.

GRATTAN-GUINNES (editores) (1994): *Companion enciclopedia of the history and fhilosophy of the mathematical sciences,* Vol 1, Routledge, London.

KIEREN, T. E. (1993). «Rational and fractional numbers: from quotient fields to recursive understanding», en T. P. CARPENTER, E. FENNEMA y T. A. ROMBERG (edits): *Rational numbers,* Lawrence Erlbaum Associates, publishers, Hilldale, New Jersey.

KLINE, M. (1992): *El pensamiento matemático de la Antiguedad a nuestros dias, I,* Alianza Universidad, Madrid.

LLINARES, S. y M. V. SANCHEZ (1985): *Fracciones,* Síntesis, Madrid.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1989): *Historical topics of the mathematics classroom,* N.C.T.M., Reston (Virginia).

NEUGEBAUER, O. (1969): *The Exact sciences in antiquity,* Segunda edición, Dover Publications, New Yok

NEWMAN, J. R. (1980): *Sigma. El mundo de las matemáticas, Vol. 1,* Grijalbo, Barcelona.

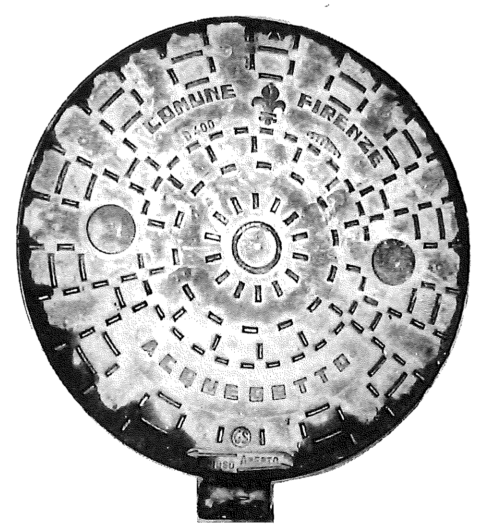
RICO, L. y E. CASTRO (1995): «Pensamiento numérico en Educación Secundaria Obligatoria», en *Aspectos didácticos de Matemáticas. 5,* Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

STREEFLAND, L. (1991): *Fractions in Realistic mathematics Education.* Kluwer Academic Publishers, Doordrecht.

José M.ª Gairín
E.U. de Formación del
Profesorado de EGB.
Universidad de Zaragoza.
Sociedad Aragonesa
de Profesores de Matemáticas
«Pedro Sánchez Ciruelo»

Mérida

Florencia



Fotos:
Luis
Balbuena

Maison
La Fitte

Las Palmas
de
Gran
Canaria