SUMA 31
junio 1999, pp. 51-54

Algoritmos iterativos para la computación de raíces en sistemas de ecuaciones

Juan Bosco Romero Márquez
Benito Hernández Bermejo
María Ángeles López y Sánchez Moreno

ARTÍCULOS

En el presente trabajo se obtiene un conjunto de familias infinitas de métodos numéricos, para la resolución de sistemas de ecuaciones simultáneas. Estos algoritmos se basan en la realización de desarrollos analíticos previos a nivel local mediante diversos procedimientos tomados del Cálculo elemental, como por ejemplo el binomio de Newton o la serie geométrica. Como los posibles desarrollos a escoger son infinitos, el conjunto así definido constituye una familia de métodos, cada uno de los cuales es convergente mediante aproximaciones sucesivas a la solución (o soluciones) de un mismo problema. Tanto esta sistematización de métodos como alguno de los mismos podrían ser, según creemos, novedosos en la literatura: de hecho, como se ilustra en el cuerpo del artículo, ciertos elementos particulares de estas familias equivalen a algoritmos previamente conocidos que se ven, por tanto, generalizados bajo esta nueva perspectiva.

A MODO DE INTRODUCCIÓN del método general, comenzaremos con el caso más sencillo de desarrollo de algoritmos iterativos convergentes para el cálculo aproximado de las raíces reales de un polinomio, utilizando para ello métodos elementales de aproximaciones recurrentes sucesivas, cuya construcción se basa en el desarrollo del binomio de Newton y en la serie geométrica.

El método aquí expuesto sigue la siguiente línea. Sea la ecuación polinómica:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = P(x) = 0 \qquad (1)$$

donde $P(x)$ es un polinomio de grado n, con coeficientes reales o complejos a_i, $i = 1,2,\dots, n$.

Para establecer nuestros algoritmos usamos el siguiente:

Lema: Si x es un número real tal que $|x| < 1$, y k es un entero positivo, entonces:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \binom{p+k}{k} x^p = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \qquad (2)$$

La demostración, puede consultarse en Apostol (1978).

Tenemos que si $\alpha \neq 0$ es una solución real de (1) entonces:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i = \sum_{i=0}^{n} a_i((\alpha - r) + r)^i = 0 \quad r \in I(\alpha, \rho), \rho > 0 \quad (3)$$

Si en el primer miembro de (3) desarrollamos con el binomio de Newton y escogemos los términos lineales en $(\alpha - r)$ y $(\alpha - r)/r$, ambos convergentes a cero, en los dos miembros (porque $(\alpha - r)^p$ y $((\alpha - r)/r)^p$ tienden a cero cuando $r \to a$, $p > 1$, $p \in \mathbb{R}$), entonces podemos despejar α como función de r en un entorno de la raíz α y obtenemos así una función que llamaremos $\alpha = \xi(r)$.

Alternativamente, podemos transformar la ecuación $P(x) = 0$ en otra equivalente, si suponemos que la raíz α de $P(x) = 0$ es no nula (las raíces nulas son identificables por simple inspección de un polinomio y no presentan mayor interés en el problema que ahora nos ocupa). Por ejemplo:

$$\frac{P(x)}{x^m} = 0$$

Si ahora utilizamos (2) o el binomio de Newton, dependiendo de si los valores que damos a m son o no positivos, y de si m es un número entero o real, y despejando α como en el caso anterior, llegamos a una familia infinita de algoritmos $\alpha = \xi_m(r)$.

Dada la función $\xi(r)$, se toma un valor de partida $x_0 = c$, que es un número racional o real arbitrario en un entorno de la raíz α (por ejemplo, x_0 puede ser la parte entera de α, en el caso en que se conozca el intervalo en que se encuentra la raíz). A partir de aquí tendríamos:

$$x_{n+1} = \xi(x_n) \quad n \geq 0$$

Planteamos al lector como problema abierto la demostración formal de que tales familias de algoritmos son convergentes.

En particular, en el caso de la ecuación $x^2 = a$, $a > 0$ para $m = 0, 1, 2$ obtenemos $x^2 = a$, $x = a/x$, y $1 = a/x^2$, respectivamente. El primero de estos tres métodos conduce al llamado algoritmo de Newton o aritmético; y el segundo es el algoritmo de aproximación armónico.

Como ilustración de lo anterior mostramos a continuación varios algoritmos iterativos para el cómputo de las raíces de la ecuación: $x^2 = x + 1$

Ejemplo: distintos algoritmos iterativos para el cálculo de la raíz de la ecuación $x^2 = x + 1$

Como ilustración de lo anterior mostramos a continuación varios algoritmos iterativos para el cómputo de las raíces de la ecuación:

$$x^2 = x + 1 \qquad (4)$$

Algoritmo 1: Si α es una raíz de (4), entonces $\alpha^2 = \alpha + 1$. Así, si $r \in I(\alpha, \rho)$, $\rho > 0$:

$$\alpha + 1 = ((\alpha - r) + r)^2 \approx 2r(\alpha - r) + r^2$$

donde se ha tomado la aproximación lineal. Por tanto:

$$\alpha = \alpha(r) = \frac{r^2 + 1}{2r - 1}, \quad r \neq \frac{1}{2} \qquad (5)$$

El algoritmo asociado a (5) será pues:

$$x_{n+1} = \frac{1 + x_n^2}{2x_n - 1}, \quad n \geq 0 \qquad (6)$$

Los dominios de convergencia en este caso son:

$$\lim_{x \to \infty} x_n = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, & x_0 > 1/2 \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, & x_0 < 1/2 \end{cases}$$

Algoritmo 2: Dado que $\alpha = \alpha + 1/\alpha$ tememos:

$$\alpha = 1 + \frac{1}{r\left(1 - \dfrac{r-\alpha}{r}\right)} \approx 1 + \frac{1}{r}\left(1 + \frac{r-\alpha}{r}\right)$$

donde hemos tomado la aproximación lineal y $r \in I(\alpha, \rho)$, de modo que resulta que:

$$\alpha = \alpha(r) = \frac{r^2 + 2r}{r^2 + 1}$$

De aquí se deduce el algoritmo para la computación de α:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2x_n}{x_n^2 + 1}, \quad n \geq 0$$

ahora los dominios de convergencia son:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, & x_0 > 0 \text{ ó } x_0 < -2 \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, & -2 < x_0 < 0 \end{cases}$$

Algoritmo 3: Escribiendo la ecuación (4) como $1 = 1/\alpha + 1/\alpha^2$ y operando se obtiene trivialmente:

$$1 = \frac{1}{r\left(1 - \dfrac{r-\alpha}{r}\right)} + \frac{1}{r^2\left(1 - \dfrac{r-\alpha}{r}\right)^2} \approx$$

$$\frac{1}{r}(1 + \alpha') + \frac{1}{r^2}(1 + 2\alpha')$$

donde $\alpha' = (r - \alpha)/r$. Por tanto el algoritmo es:

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n + 1)(3 - x_n)}{x_n + 2}, \quad n \geq 0$$

En este caso tenemos:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, & 3 > x_0 > 0 \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, & 0 > x_0 > -1 \end{cases}$$

Algoritmo 4: La última posibilidad que consideraremos resulta al tomar la expresión $\alpha^3 = \alpha^2 + \alpha$. Con $r \in I(\alpha, \rho)$ tenemos:

$$(\alpha - r + r)^3 = (\alpha - r + r)^2 + \alpha$$

Y la aproximación lineal nos da:

$$\alpha(3r^2 - 2r - 1) = 2r^3 - r^2 \quad \Rightarrow$$

$$\alpha(r) = \frac{r^2(2r-1)}{(r-1)(3r+1)}$$

Así llegamos al algoritmo:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2(2x_n - 1)}{(x_n - 1)(3x_n + 1)}, \quad n \geq 0$$

Como en casos anteriores resulta:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, & x_0 > 1 \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, & x_0 < -1/3 \end{cases}$$

Fuera de los rangos indicados en los algoritmos 3 y 4, la convergencia se da por intervalos. Se propone como ejercicio al lector el estudio del comportamiento de los algoritmos en estas regiones.

Sistemas generales. Ejemplo: intersección de dos cónicas

De la teoría y los ejemplos precedentes se infiere que esta misma técnica puede utilizarse para aproximar ecuaciones trigonométricas, exponenciales, etc.

De la teoría y los ejemplos precedentes se infiere que esta misma técnica puede utilizarse para aproximar ecuaciones trigonométricas, exponenciales, etc. De hecho, los sistemas de cualquier clase en las incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ pueden resolverse aplicando los métodos anteriores.

Ejemplo: Calculemos los puntos comunes o de intersección de las cónicas:

$$C_1: \quad x^2 + y^2 = a^2, \quad a > 0$$

$$C_2: \quad xy = b, \quad b > 0$$

Si $P(\alpha, \beta)$ fuera un punto de la intersección $C_1 \cap C_2$, entonces, para cada $(r, s) \in I[(\alpha, \beta), \rho]$, $\rho > 0$, entorno del punto (α, β), podemos escribir:

$$((x - r) + r)^2 + ((y - s) + s)^2 = a^2$$

$$((x - r) + r)((y - s) + s) = b$$

Teniendo en cuenta los rangos de valores que toman las distintas variables podemos realizar la aproximación lineal correspondiente, de la que se obtiene:

$$2r(x - r) + 2s(y - s) = a^2 - r^2 - s^2$$

$$s(x - r) + r(y - s) = b - rs$$

Resolviendo en $(x - r)$ e $(y - s)$ llegamos a:

$$x = x(r,s) = \frac{r^3 + r(a^2 - s^2) - 2sb}{2(r^2 - s^2)}, \quad r^2 \neq s^2$$

$$y = y(r,s) = \frac{-s^3 + s(r^2 - a^2) + 2rb}{2(r^2 - s^2)}, \quad r^2 \neq s^2$$

Así hemos obtenido dos funciones racionales, en las variables r, s, definidas para $r, s \in \mathbb{R}$, $r^2 \neq s^2$, continuas y diferenciables y que pueden ser interpretadas como dos superficies en $\mathbb{R}^3$, asociadas al sistema original. Entonces, si $[x]$ denota la parte entera de un número real x, podemos construir el algoritmo iterativo asociado al problema:

$$(x_0, y_0) = ([\alpha], [\beta])$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + x_n(a^2 - y_n^2) - 2y_n b}{2(x_n^2 - y_n^2)}, \quad \alpha = \lim_{n \to \infty} x_n$$

$$y_{n+1} = \frac{-y_n^3 + y_n(x_n^2 - a^2) + 2x_n b}{2(x_n^2 - y_n^2)}, \quad \beta = \lim_{n \to \infty} y_n$$

El rango de n es $n \geq 0$. Al igual que en el ejemplo de la ecuación, este algoritmo no es el único posible: pueden construirse otros mediante desarrollos similares a los allí empleados.

Se puede comprobar que el algoritmo anterior es convergente a la raíz (α, β) del sistema y que, además, este punto es un invariante de las superficies.

Conclusiones

Se ha presentado aquí un método que genera familias infinitas de algoritmos iterativos convergentes para la resolución de sistemas de ecuaciones generales en una o más variables. Estos algoritmos han sido comprobados en la práctica, para ejemplos concretos, mediante una rutina en TURBO PASCAL ejecutada sobre un PC con procesador 386. Las convergencias observadas en los intervalos apropiados son, sin excepción:

- Hacia alguna de las soluciones correctas.
- Al cabo de pocos pasos (en los mejores casos se puede obtener a partir de un entero una aproximación a un número trascendente con 9 cifras decimales correctas al cabo de 3 iteraciones).

- En tiempos de computación instantáneos (menores al segundo).

Los algoritmos expuestos, aparte de su generalidad o de su interés teórico por los aspectos de su desarrollo que quedan pendientes, ofrecen una amplia posibilidad de el ección que se adapte a la implementación concreta que requiera cada caso. Es aquí donde los criterios de robustez, velocidad de convergencia y economía en tiempo de cálculo deberán ser tenidos en cuenta para seleccionar el algoritmo óptimo entre los infinitos posibles.

Bibliografía

ACTON, F. S. (1990): *Numerical Methods that usually work*, MAA.

APOSTOL, T (1978): *Análisis Matemático*, Reverté, Barcelona.

BREUER, S y G. ZWAS (1988): *Comput. Educ. 12*, n.° 2, 289.

DANILINA N.I., N.S. DUBROVSKAYA, O.P. KVASHA y G.S. SMIRNOV (1988): *Computation al Mathematics*, Mir, Moscú.

DEMIDOVIC, B.P. y I.A. MARON (1987): *Computational Mathematics*, Mir, Moscú.

DIEUDONNE, J. (1968): *Calcul Infinitesimal*, Hermann, Paris.

FROBERG, C.E. (1969): *Introduction to Numerical Analysis*, Addison-Wesley, Reading (Massachusetts).

GASTINEL, N. (1974): *Analyse numerique lineaire*, Hermann, Paris.

HENRICI, P. (1964): *Elements of Numerical Analysis*, John Wiley, New York.

HILDEBRAND F. B. (1956): *Introduction to numerical analysis*, Mc Graw-Hill, New York.

HOUSEHOLDER A. S. (1953): *Principles of numerical analysis*, Mc Graw-Hill, New York.

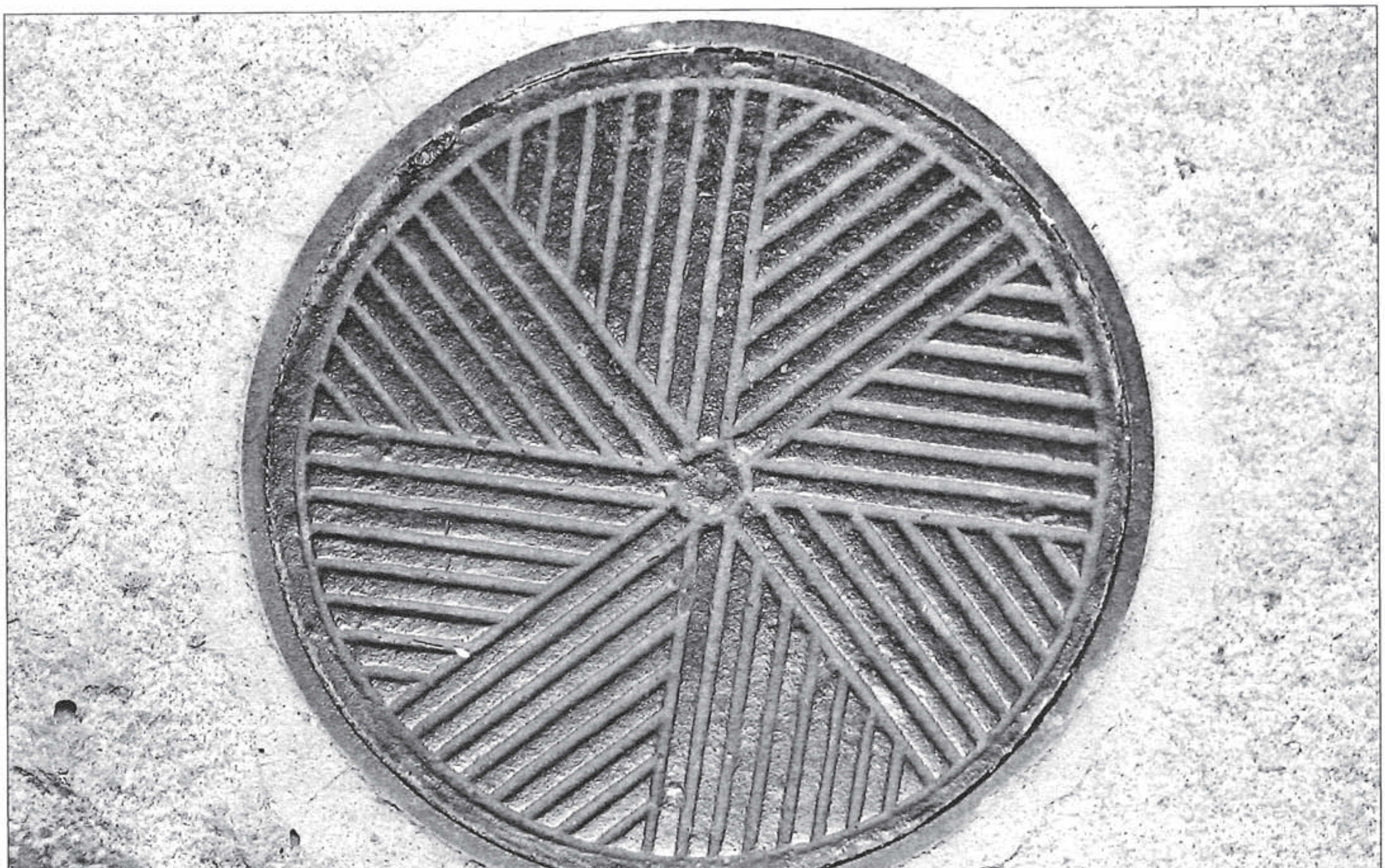
KNOPP K. (1990): *Theory and applications of infinite series*, Dover, New York.

RALSTON A. (1976): *Análisis Numérico*, Limusa, México.

STOER J. y E. BURLISCH (1993): *Introduction to Numerical Analysis*, Springer Verlag, New York.

YOUNG D. M. y R. TODD GREGORY (1973): *A Survey of Numerical Mathematics*, Tomos I y II, Dover, New York.

Juan Bosco Romero
IB Isabel de Castilla. Ávila
Benito Hernández
Departamento de Física Fundamental. UNED
María Ángeles López
IB Isabel de Castilla. Ávila
Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas



Huelva (Foto: Luis Balbuena)