SUMA 30
febrero 1999, pp. 53-58

Una nueva mirada a «la prueba del 9»

María Luz Callejo de la Vega

ARTÍCULOS

La tradicional «prueba del 9», aunque pasada de moda para verificar la corrección de resultados de cálculos numéricos, ofrece una situación problemática interesante sobre teoría de números.
En este artículo se recordará en qué consiste la prueba del 9 y se abordarán las siguientes cuestiones: ¿qué prueba la prueba del 9?; ¿por qué el 9 y no otro número como el 7 o el 11?; ¿sirve el 9 para sistemas de numeración distintos de 10?; por último ¿qué hacer con la prueba del 9: abandonarla como prueba o buscarle otra utilidad didáctica?

DE ENTRE los viejos libros de textos de Matemáticas que como testigos de la historia de la educación están guardados en armarios del Instituto donde trabajo, han caído en mis manos dos que hacen alusión a la famosa «prueba del 9»: uno es la *Aritmética* de Segundo grado de la Editorial Luis Vives, publicado en Zaragoza en 1949; el otro lleva por título *Aritmética y Álgebra*, es del Curso Preuniversitario, sus autores son A. Alcaide y N. Nofuentes y está publicado en Madrid el año 1959. El de Segundo grado dedica un apartado a la prueba de la multiplicación en el que describe cómo se hace la «prueba del 9» y advierte que esta prueba es falsa con frecuencia indicando algunos casos en que un error en los cálculos no se refleja en la prueba; el de Preuniversitario tiene un apartado denominado *Justificación de la «Prueba del 9»* para comprobar la suma, la multiplicación y la división como aplicación de las congruencias.

Esto me ha hecho reflexionar sobre esta prueba que, aunque pasada de moda para verificar la corrección de resultados de cálculos numéricos, ofrece una situación problemática interesante sobre teoría de números.

¿En qué consiste la prueba del 9?

La prueba del 9 es un caso de aplicación de la aritmética modular a la detección de errores aritméticos. Esta prueba consiste simplemente en hacer cálculos módulo 9. Reducir un número módulo 9 es hallar el resto de la división de dicho número entre 9; el valor de este resto se puede obtener sin necesidad de dividir, basta con sumar los dígitos del número y si supera a 9 volver a sumar los dígitos del resultado obtenido y así sucesivamente hasta obtener un número menor que 9.

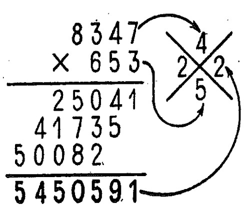
PRUEBA DE LA MULTIPLICACIÓN

93. Para comprobar si una multiplicación está bien hecha, se repite la operación invirtiendo el orden de los factores. Si los productos resultan iguales, es casi seguro que la operación está bien.

Decimos *casi seguro,* porque es posible que ambas operaciones sean falsas y contengan el mismo error. Si, por ejemplo, a algún producto parcial o total de las dos operaciones, les aumentamos o disminuímos en un mismo número, las dos operaciones serán falsas, aunque sus resultados sean iguales.

94. Una prueba muy práctica es la llamada prueba del 9.

Para explicar el modo de hacerla nos serviremos de la operación siguiente, advirtiendo que cuando las sumas pasan de 9, se suman sus cifras, y que los 9 no se cuentan nunca:



Se traza un aspa y se escriben las cifras según indican las flechas.

Multiplicando: 8 y 3, 11; 1 y 1, 2; y 4, 6; y 7, 13; 1 y 3, 4.

Multiplicador: 6 y 5, 11; 1 y 1, 2; y 3, 5.

Se multiplican: 4 × 5, 20; 2 y 0, 2. Se escribe a izquierda.

Producto: 5 y 4, 9; se anula; 5 y 5, 10; 1 y 0, 1; y 1, 2.

La operación está bien hecha, porque los números de la derecha y de la izquierda del aspa son iguales.

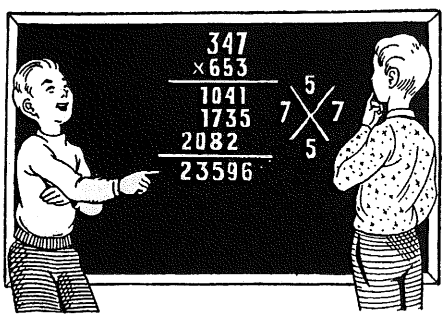
Nota. — Esta prueba es falsa con frecuencia. Así sucede cuando las cifras se cambian de lugar; cuando se añade o suprime algún nueve; cuando se añaden o quitan cifras cuya suma es 9, etc.

¡ATENCIÓN!

Simplicio Cándido ha hecho esa operación, y asegura que está bien hecha, porque le sale bien la prueba del 9.

En cambio, Juan Pícaro, su amigo burlón, se ríe de él y le asegura que la operación es completamente falsa.

¿Quién tiene razón? Explicar por qué.



— 50 —

Figura 1. *Aritmética. Segundo Grado,* Luis Vives, Zaragoza, 1949

La prueba del 9 aplicada al caso de la multiplicación

8.347 x 653

que presenta el primero de los libros antes citados (figura 1) se realiza de la siguiente forma:

a) se hace la reducción módulo 9 del multiplicando y del multiplicador

multiplicando: 8+3+4+7 = 22; 2+2 = 4

multiplicador: 6+5+3 = 14; 1+4 = 5

b) se multiplican estos números y se hace la reducción módulo 9 del resultado:

4 x 5 = 20

2+0=2

c) se hace al reducción módulo 9 del producto obtenido en la operación, que es 5.450.591:

5+4+5+0+5+9+1 = 29;

2+9 = 11;

1+1 = 2

d) se comparan los resultados de (b) y de (c); si coinciden es probable que la operación esté bien hecha, si no coinciden y hemos aplicado bien la prueba del 9, la multiplicación está mal hecha.

La disposición en forma de aspa (figura 1) es una manera de ir anotando los resultados del proceso anterior.

Cálculos módulo 9

Veamos en qué se fundamenta esta prueba. Si *a* y *b* son dos enteros y su diferencia *a – b* es divisible por 9, decimos que «*a* es congruente con *b*, módulo 9» y lo expresamos escribiendo:

$$a \equiv b \ (\text{mód } 9)$$

Por tanto:

$$a - b = 9k, \text{ siendo } k \text{ entero}$$

Si $a \equiv b$ (mód 9) y $c \equiv d$ (mód 9), se deduce fácilmente que:

$$a + c \equiv b + d \ (\text{mód } 9)$$

$$a - c \equiv b - d \ (\text{mód } 9)$$

$$ac \equiv bd \ (\text{mód } 9)$$

Ya se trate de sumar números, de restarlos, de multiplicarlos y en general de cualquier cálculo consistente en una sucesión finita de sumas, restas y multiplicaciones, los cálculos módulo 9 consisten:

- bien en realizar el cálculo y reducir el resultado módulo 9;
- bien en reducir módulo 9 los números que entran en juego en dicho cálculo para efectuar después las operaciones con los números reducidos y, si fuese necesario, reducir otra vez módulo 9.

Con esta notación el ejemplo anterior se expresa así:

$$
\begin{array}{lll}
8.347 \equiv 4 \ (\text{mód } 9) & \rightarrow & 4 \\
\underline{\times\ 653} \equiv 5 \ (\text{mód } 9) & \rightarrow & \underline{\times\ 5} \\
5.450.591 \equiv 2 \ (\text{mód } 9) & & 20 \equiv 2 \ (\text{mód } 9)
\end{array}
$$

Podemos tener una imagen de la aritmética módulo 9 con una esfera de reloj de 9 horas donde 0 equivale a 9 (Lauber, 1990):

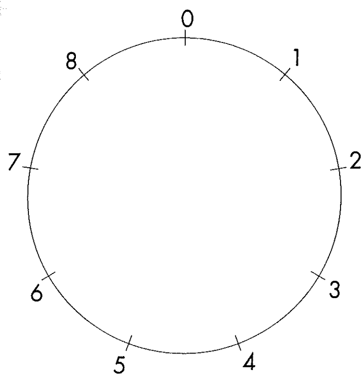


Figura 2

La suma se representa mediante la rotación en el sentido de giro de las agujas del reloj; así para calcular 4 + 7 módulo 9 se comienza en el 4 y se «avanzan» 7 horas, teniendo como resultado 2; la resta se hace invirtiendo el sentido de giro. Las tablas de multiplicación se obtienen uniendo los puntos de 1 en 1, de 2 en 2, de 3 en 3, etc., comenzando por el 0 y dando las vueltas necesarias hasta volver a éste. Por ejemplo la multiplicación por 2 se representa en la circunferencia como un polígono estrellado de 9 lados:

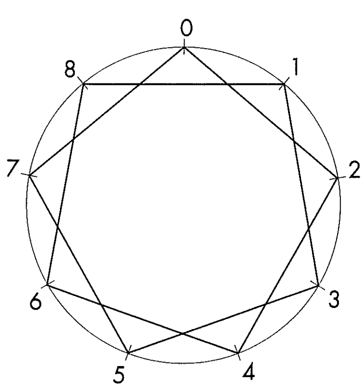


Figura 3

...las pruebas del 9 solamente nos indican si existe o no congruencia entre el resultado obtenido en el cálculo y el resultado correcto, suponiendo que se haya realizado bien la prueba del 9.

Las tablas de multiplicación módulo 9 son las siguientes:

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	2	4	6	8	1	3	5	7
3	0	3	6	0	3	6	0	3	6
4	0	4	8	3	7	2	6	1	5
5	0	5	1	6	2	7	3	8	4
6	0	6	3	0	6	3	0	6	3
7	0	7	5	3	1	8	6	4	2
8	0	8	7	6	5	4	3	2	1

¿Prueba algo la prueba del 9?

Anteriormente hemos dicho que si coincide la reducción módulo 9 del producto de la multiplicación con la del producto del multiplicando y del multiplicador ya reducidos módulo 9, es probable que la operación esté bien hecha y que si no coinciden y hemos aplicado bien la prueba del 9, es seguro que la multiplicación está mal hecha. Por tanto, hemos dejado entrever que la prueba del 9 no es una demostración matemática. Pero nos preguntamos, ¿prueba algo la prueba del 9?

Supongamos que el cálculo que se desea efectuar es $a * b$ y el resultado encontrado c:

$$a * b = c$$

Tendríamos que:

$$a(\text{mód } 9) * b(\text{mód } 9) \equiv c(\text{mód } 9)$$

Pero el recíproco no es cierto porque podemos encontrar un valor d distinto de c pero congruente con c modulo 9 tal que:

$$a * b \neq d$$

como muestra la ilustración, no muy edificante por cierto, del libro de *Aritmética* antes mencionado (figura 1).

Por tanto, las pruebas del 9 solamente nos indican si existe o no congruencia entre el resultado obtenido en el cálculo y el resultado correcto, suponiendo que se haya realizado bien la prueba del 9. Por ello no se trata de un razonamiento demostrativo sino de una condición necesaria que nos da indicios de que hay posibilidades de que la operación esté bien hecha.

En cambio es una «prueba psicológica» en el sentido siguiente: si tenemos que multiplicar dos números grandes, debemos efectuar un gran número de operaciones elementales cuya corrección depende de la habilidad y de los conocimientos de quien las realiza, pero si se hace la prueba del 9 de esta multiplicación, hay que hacer un número más pequeño de operaciones elementales y pensamos que «es más probable equivocarse en el cálculo de a x b que en el de la cuatro cantidades: a(mód 9), b(mód 9), a x b (mód 9), a(mód 9) x b(mód 9)»; luego si los dos últimos números no coinciden es que probablemente hemos cometido un error en el cálculo «largo», o sea el de a x b; si, por el contrario, los dos últimos números son los mismos, es decir, si la prueba del 9 funciona, se piensa que hay pocas posibilidades de haberse equivocado.

Lo que es cierto es que si los cálculos módulo 9 no coinciden (supuesto que se han hecho bien), la operación larga está mal hecha.

Al adentrarnos en la vertiente matemática de la «prueba», constatamos que ésta no es un razonamiento demostrativo, pero ello nos permite contemplar otros aspectos que forman parte de la experiencia matemática como la verificación de una condición necesaria pero no suficiente con su correspondiente carga psicológica y el interés didáctico de un uso extendido en las matemáticas escolares de otros tiempos (Bruckheimer y otros, 1995).

Durante mucho tiempo se enseñó a los escolares a incluir en los cálculos la «prueba del 9»; en manuales antiguos, como el de *Aritmética* que se mencionó al comienzo, se encuentra la disposición en aspa para ir colocando las congruencias módulo 9.

¿Por qué el 9?

Esta claro que en lo dicho hasta ahora el 9 no juega ningún papel especial y podría reemplazarse por cualquier otro número natural *m* y hablaríamos entonces de cálculos módulo *m*. Entonces, ¿por qué elegir la congruencia módulo 9? Hay diversas razones relacionadas con la facilidad de los cálculos y con la fiabilidad de la prueba.

Facilidad de los cálculos

Aunque el creador de la teoría de las congruencias es el matemático alemán Gauss, que publicó su trabajo sobre teoría de números en su obra *Disquisitiones Arithmeticae*, aparecida en 1801 cuando sólo contaba 24 años, hay trazas del uso de las congruencias siglos antes de Gauss en las reglas antiguas de comprobación de cálculos como la prueba del 9. Oystein Ore (1967) ofrece una posible explicación del nacimiento de esta prueba retrocediendo al tiempo del uso del ábaco para realizar cálculos.

En el ábaco un número ABCD se representa usando A + B + C + D cuentas. Si este número se quiere sumar con otro, por ejemplo EFGHI es necesario añadir E + F + G + H + I cuentas en las barras correspondientes a los distintos órdenes de unidades. Pero en cada barra del ábaco hay 9 cuentas; la suma de los dos números exige reemplazar 10 cuentas de una barra por una cuenta en la barra siguiente, tantas veces como sea necesario. Por tanto, cada vez que hacemos este cambio disminuye en 9 el número de cuentas, luego el número de cuentas en el resultado final debe diferir del número de cuentas total al inicio (A+B+C+D+E+F +G+H+I) en un número múltiplo de 9. Esta comprobación no es otra cosa que la «prueba del 9» para la suma y se apoya en que nuestro sistema de numeración es de base 10 y por ello los cálculos módulo 9 son fáciles y rápidos.

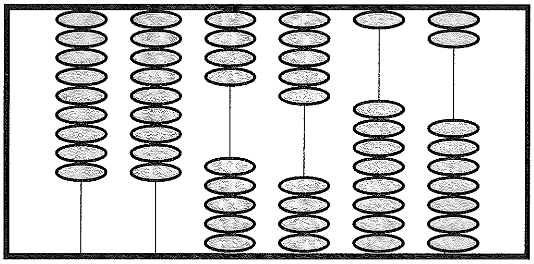


Figura 4

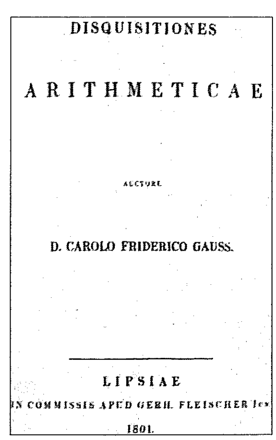
El número ABCD tiene como desarrollo decimal:

$$1000A + 100B + 10C + D$$

y como las potencias de 10 módulo 9 son todas congruentes con 1, tenemos:

$$ABCD \text{ (mód 9)} \equiv A + B + C + D$$

Por tanto no hay necesidad de hacer divisiones para calcular congruencias módulo 9 sino que pueden realizarse mentalmente; pero si la base del sistema de numeración fuese distinta de 10, el 9 no jugaría ningún papel especial en los cálculos. Como decía Pascal «los caracteres de divisibilidad de los números deducidos de la suma de sus dígitos descansan a la vez sobre la naturaleza íntima de los números y sobre su representación en el sistema de numeración decimal» (citado en Paquelier, 1983).


DISQUISITIONES

ARITHMETICAE

AUCTORE

D. CAROLO FRIDERICO GAUSS.

LIPSIAE

IN COMMISSIS APUD GERH. FLEISCHER Iun.

1801.

Nuestro sistema de numeración tiene también otros números para los que la reducción de un número cualquiera módulo *m* es tan fácil como con el 9; son el 2, el 5, el 10, el 11, el 20, el 25, el 50, el 100… Pruebas fáciles de realizar son las del 2 y las del 5, pero son poco fiables porque cualquier error en cualquier dígito del producto que no sea el de las unidades no los detecta la prueba; también es fácil la del 11, que detecta errores como el desplazar un lugar un producto parcial de una multiplicación. La reducción de un número módulo 11 se puede hacer agrupando sus dígitos de dos en dos, de izquierda a derecha, sumando luego estos números de dos dígitos y repitiendo este procedimiento hasta obtener un número pequeño cuyo resto al dividir entre 11 se calcule fácilmente.

Por ejemplo si el número que hay que reducir fuese 7.345.651 se escribe

7 34 56 51

y se calcula

$$7+34+56+51 = 149;\ 1 + 49 = 50$$

y

$$50 \equiv 6 \ (\text{mód } 11).$$

La razón de que funcione esta regla es

$$10^{2n} \equiv 1 \ (\text{mód } 11).$$

Fiabilidad

Sin embargo, no todo el mundo se inclina por una economía de cálculos. El francés Nicolas Chuquet (1484) consideraba la prueba del 7 más fiable que la del 9: «Prefiero la prueba del 7 ya que 7 tiene menos familiaridad con los números que 9». Chuquet cita tres tipos de errores que la prueba del 9 no detecta y la del 7 sí: la adición o supresión de un 9 o del 0, la permutación de dígitos o el cambio de un dígito por otros que sumen lo mismo (citado en Bruckheimer y otros, 1995).

Desde el punto de vista didáctico lo más importante es identificar los tipos de errores sistemáticos que se suelen cometer con las operaciones aritméticas y cuáles de ellos los detecta la prueba del 9 o la del 7 o cualquier otra. Así, si un producto parcial de una multiplicación se desplaza un lugar, la prueba del 11 detecta el error.

Como ya hemos indicado, las pruebas por 9 o por cualquier otro número entero m solamente nos informan de la congruencia o no módulo m entre el resultado obtenido en el cálculo largo y el resultado correcto (si la prueba está bien hecha). Nos planteamos pues disminuir la probabilidad de que la coincidencia se deba al azar, considerando que los errores son equiprobables, lo cual sabemos que no es cierto.

Sólo cuando los alumnos estén en edad de comprender el alcance y la limitación de la denominada «prueba» podrán utilizarla sabiendo su carácter de instrumento que da indicios, pero no certeza, sobre la corrección de la operación realizada.

Sea P_n la probabilidad de que el resultado obtenido en el cálculo largo y el resultado correcto (si la prueba está bien hecha) sean congruentes módulo n; esta probabilidad disminuye a medida que n aumenta pues un cálculo módulo 9 tiene sólo nueve posibles respuestas, luego la posibilidad de que un cálculo incorrecto no se detecte es 1/9. Nos planteamos pues si hay otros números que presentan más ventajas que el 9.

Por un lado los cálculos módulo mayor que 11 no pueden hacerse siempre mentalmente en el caso de la multiplicación, luego los eliminamos; por otro lado, los cálculos módulo menor que n presentan una probabilidad P_n mayor que P_9, luego tampoco nos interesan; no nos queda pues más que 10 y 11. El cálculo de un número módulo 10 es muy cómodo pero no tiene en cuenta más que las cifras de las unidades; el cálculo de un número módulo 11 es menos rápido que para 9 y la diferencia entre P_{11} y P_9 es pequeña.

Luego si no hacemos más que una prueba nos interesa más la del 9, pero si hiciéramos además la prueba del 11, la probabilidad de que la coincidencia sea debida al azar es muy pequeña: su cálculo se reduce a un producto de probabilidades ya que éstas son independientes.

Conclusión

¿Qué hacer con la prueba del 9: abandonarla o buscarle otra utilización didáctica?

Como prueba aritmética la del 9 es una causa perdida puesto que tenemos calculadoras que nos permiten conocer con facilidad y rapidez la corrección de un resultado. Si bien las pruebas del 9 suponen un ejercicio interesante de utilización de cálculos módulo 9 o de operaciones en $\mathbb{Z}_9$, donde $\mathbb{Z}_9$ representa las clases de equivalencia módulo 9, así como de homomorfismos de anillos entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_9$, no debemos atribuirle valor de demostración matemática. Sólo cuando los alumnos estén en edad de comprender el alcance y la limitación de la denominada «prueba» podrán utilizarla sabiendo su carácter de instrumento que da indicios, pero no certeza, sobre la corrección de la operación realizada.

Sin embargo, la prueba del 9 tiene interés como situación para indagar el «juego de números» que subyace en sus cálculos, pues da pie a profundizar en su significado; o a trabajar los aspectos de la teoría de números que se han esbozado anteriormente: divisibilidad, cálculos módulo 9, exploración de las propiedades de los números relacionadas con los sistemas de numeración. También se presta la prueba del 9 a proponer problemas relacionados con la generalización: ¿qué pasaría si cambiásemos el 9 por otro número?, ¿y si trabajásemos en otra base, por ejemplo 2, 11?

Más allá de la prueba del 9, los cálculos módulo 9 nos proporcionan situaciones didácticas interesantes como las siguientes:

— A partir de la representación de la multiplicación por 2 en una circunferencia con 9 puntos (figura 3) podemos plantearnos «saltar» ninguno o varios puntos cada vez y tratar de responder a las siguientes cuestiones (cf. Banwell y otros 1974, p. 46):

- ¿Se vuelve siempre al punto de partida?: en qué casos sí y en qué casos no.
- ¿En qué casos se vuelve al punto de partida después de dar una vuelta? ¿Cuántas vueltas se dan en los otros casos?
- ¿Qué polígonos se forman? ¿Cuáles son estrellados?
- ¿Se obtienen las mismas figuras si se invierte el sentido del recorrido?
- ¿Cómo se relacionan los distintos polígonos que se forman con las tablas de multiplicación módulo 9?

Para una división de la circunferencia en 9 partes que se unen de *n* en *n*, empezando en cualquier punto, se obtienen *p* polígonos de *q* lados, según se indica en la tabla adjunta.

n	p	q
1	1	9
2	1	9
3	3	3
4	1	9
5	1	9
6	3	3
7	1	9
8	1	9

La generalización nos empuja a considerar circunferencias con *k* puntos espaciados regularmente, a considerar las cuestiones anteriores y a hacer observaciones en la tabla dada.

— Las congruencias módulo 9 dan lugar a algunas recreaciones aritméticas como las siguientes (Rouse Ball y Coxeter, 1987):

- Se elige un número cualquiera de tres dígitos que no sea capicúa, se invierte el orden de sus cifras y se le resta al mayor el menor. Si se conoce la última cifra del resultado de esta operación, se puede adivinar éste. Por ejemplo, si la última cifra es 3 el resultado es 693, pues la cifra de las centenas es 9 menos la cifra de las unidades y la cifra de las decenas es siempre 9.
- Se elige un número, se cambia el orden de sus cifras, se resta el menor del mayor, se multiplica la diferencia por cualquier número y se tacha uno de sus dígitos distinto de cero. Si se conoce el número que se obtiene se puede adivinar el número que se ha tachado. Por ejemplo si el número obtenido es 23.420, el número tachado es 7 porque 7 es la diferencia entre 18, que es el múltiplo de 9 más próximo a 11 (11=2+3+4+2+0), y 11:

$$79.213 - 31.729 = 47.484$$

$$47.484 \times 5 = 237.420$$

Se tacha 7 y se tiene 23.420

$$7 = 18 - (2+3+4+2+0)$$

En ambos casos, al cambiar el orden de las cifras se tiene otro número congruente con el anterior módulo 9, luego la diferencia entre ambos módulo 9 es 0. Por tanto, en el primer ejemplo, como el número central es siempre 9, el primero debe ser lo que le falta al último para llegar a 9. En el segundo ejemplo, al multiplicar esta diferencia por cualquier número, el producto sigue siendo congruente con 0 módulo 9, luego el número tachado es lo que le falta a la suma de los dígitos para ser un múltiplo de 9.

— Otro posible uso didáctico es aplicar las congruencias a problemas de astronomía y cronología que encierran periodicidad, a la preparación de calendarios de torneos de competición en los que participan un número impar de equipos o para saber si un número muy grande es primo o compuesto (Ore, 1967).

Resumiendo, la vieja «prueba del 9» es una causa perdida como modo de verificar la corrección de los cálculos, pero es un buen punto de partida para profundizar en el significado de los números, para plantear generalizaciones como las esbozadas anteriormente o para explorar las aplicaciones de las congruencias.

María Luz Callejo
Departamento de Didáctica de las Matemáticas.
Instituto de Estudios Pedagógicos Somosaguas.
Madrid.
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»

Referencias bibliográficas

BANWELL, C., K. SAUNDERS, y D. TAHTA (1974): *Points de départ*, Cedic. París (Or. 1972)

BRUCKHEIMER, M., R. OFIR y A. ARCAVI (1995): «The Case For and Against "Casting out Nines"», *For the Learning of Mathematics*, 15 (2), 23-27

LAUBER, M. (1990): «Casting Out Nines: An Explanation and Extensions», *Mathematics Teacher*, Vol. 83, 661-665

ORE, O. (1967): *Invitation to Number Theory*, The Mathematical Association of America, New Mathematica Library, Washington

PAQUELIER, Y. (1983): *La preuve par neuf*, Trabajo de DEA de Didáctica de las disciplinas, opción Matemáticas, Universidad París VII. No publicado.

ROUSE BALL, W. W. y H. S. M. COXETER (1987): *Mathematical Recreations and Essays*, Dover, Toronto.