SUMA 30
febrero 1999, pp. 47-51

Aproximaciones de bajo rango de una matriz

Ángela Rojas Matas
Manuel Torralbo Rodríguez

ARTÍCULOS

En este trabajo se presenta la descomposición en valores singulares de una matriz y dos de sus aplicaciones más interesantes, siguiendo la experiencia realizada con alumnos de primer curso de la Escuela de Ingeniería Técnica Industrial. Teniendo en cuenta el poco tiempo de que se dispone para la asignatura de Álgebra Lineal (un cuatrimestre sólo a cuatro horas por semana), se pretende una breve introducción teórica a este tema, resaltando principalmente las aplicaciones prácticas y procurando despertar el interés de los alumnos. Esta descomposición matricial permite expresar cualquier matriz como una suma finita de matrices de rango unidad. A partir de ella se pueden obtener matrices aproximadas a una dada pero con rango inferior a la original. También se puede aplicar en la resolución eficiente de un sistema por el método de los mínimos cuadrados.

DESCOMPOSICIÓN en valores singulares

Consideremos una matriz real A de dimensiones mxn. Construimos las matrices (A^TA) y (AA^T). Ambas son simétricas y, por lo tanto, diagonalizables por medio de una base ortonormal de vectores propios. Se pueden demostrar fácilmente las siguientes cuestiones:

1) Si $v \in M_{nx1}$ es un vector propio de (A^TA) asociado a un autovalor λ, entonces $u = Av$ es un vector propio de (AA^T) asociado al mismo autovalor λ.

2) Si v es un vector propio unitario asociado a $\lambda \neq 0$ de la matriz (A^TA), entonces

$$u = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} Av$$

es un vector propio unitario de (AA^T) asociado también a λ.

3) Los autovalores no nulos de (A^TA) son necesariamente positivos (consecuencia del apartado anterior), y coinciden con los autovalores no nulos de (AA^T). El número de autovalores no nulos coincide con el rango de A.

Supongamos que consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

En este caso tendríamos que la matriz

$$A^TA = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$$

los autovalores son $\lambda_1 = 18$ $\lambda_2 = 0$ y una base ortonormal de vectores propios sería:

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

Por otro lado

$$AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

sus autovalores son $\lambda_1 = 18$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Entonces:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} Av_1 = \frac{1}{\sqrt{18}} A \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

es un vector propio de AA_T asociado al autovalor 18. Completamos con dos vectores propios unitarios y ortogonales asociados al autovalor doble cero y tendremos una base ortonormal de vectores propios:

$$\left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{45}}, -\frac{4}{\sqrt{45}}, \frac{5}{\sqrt{45}}\right) \right\}$$

Con los resultados anteriormente obtenidos es fácil comprobar que se puede escribir la siguiente descomposición matricial de la matriz original:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{45}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{45}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{18} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = U \cdot S \cdot V^T$$

Las columnas de V se llaman vectores singulares por la derecha de la matriz A y las columnas de U son los vectores singulares por la izquierda. Los elementos situados en la diagonal de la matriz S son los valores singulares de A, en este caso $\sqrt{18}$ y 0. Este ejemplo nos sirve para entender el siguiente teorema:

> *Teorema de la descomposición en valores singulares de una matriz*
>
> Cualquier matriz real A de dimensiones *mxn* se puede descomponer de la forma: $A = U \cdot S \cdot V^T$, donde U es una matriz *mxm* ortogonal, S es una matriz *mxn* diagonal y V es una matriz *nxn* también ortogonal.

El número de valores singulares no nulos nos dará el rango de la matriz original.

Una imagen digital no es más que una matriz de números donde cada número indica un nivel de gris.

Aproximaciones de una matriz

Una consecuencia inmediata de la descomposición anterior nos permite escribir cualquier matriz A de dimensiones *mxn* como una suma finita de matrices de rango unidad de la siguiente forma:

$$A = s_1R_1 + s_2r_2 + \ldots + s_kR_k$$

siendo

$$R_i = u_i v_i^T$$

donde $k = \min(m,n)$, siendo

$$s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_r > 0 = s_{r+1} = \ldots = s_k$$

suponiendo que el rango de A es *r*, y que hemos ordenado de forma decreciente los valores singulares no nulos. Las matrices Ri son de rango unidad y la suma de los cuadrados de todos sus elementos da como resultado 1.

De esta forma, la matriz original A de rango *r* queda descompuesta en una suma de *r* matrices de rango unidad. Resulta lógico pensar que la suma anterior se podrá cortar cuando los valores singulares sean suficientemente pequeños.

Supongamos que construimos

$$A_1 = s_1R_1$$

$$A_2 = s_1R_1 + s_2\, r_2$$

$$\ldots$$

$$A_r = s_1R_1 + s_2r_2 + \ldots + s_rR_r$$

Entonces se puede demostrar (Noble, 1989) que la matriz de rango 1 más parecida a la original es precisamente la matriz A_1, que la matriz de rango 2 más parecida a la original es A_2, y así sucesivamente. Lógicamente, A_r coincide con A.

Vamos a visualizar las sucesivas aproximaciones de una matriz. Para ello vamos a considerar la imagen A de la figura 1. Una imagen digital no es más que una matriz de números donde cada número indica un nivel de gris. Habitualmente la escala de grises varía de 0, que equivale al negro, a 255, que equivale al blanco. El tamaño de la imagen original es 112x122. En este caso se trata de una imagen binaria. La reconstrucción con sólo los 5 primeros valores singulares es A_5 y con los 10 primeros es A_{10}.

En la figura 2 se muestra una imagen B que se ha obtenido escaneando la portada del libro de *Algebra Lineal* de Noble (1989). El tamaño es 222x166. En este caso, se muestran las aproximaciones B_5 y B_{15}.

Por último, se presenta una imagen real (una fotografía digitalizada) de una mujer C en la figura 3. En este caso el tamaño de la imagen es 512x512. Presentamos las aproximaciones C_{20} y C_{50}.

En todos los casos se puede observar cómo aproximaciones de bajo rango proporcionan reproducciones bastante buenas de las imágenes originales y cómo al aumentar el número de términos en la suma se van obteniendo imágenes cada vez más parecidas a las originales.

Una imagen digital como C requiere 512x512 = 262.144 posiciones de memoria para ser almacenadas en un disco. Para poder reconstruir, por ejemplo C_{50}, es necesario almacenar los 50 primeros valores singulares junto con los 50 primeros vectores singulares por la izquierda y los 50 primeros vectores singulares por la derecha. Es necesario, por lo tanto, un total de:

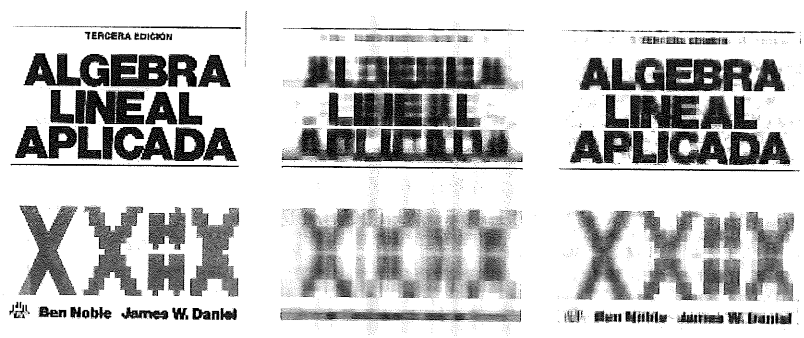
$$50 + 50\times(512+512) = 51250$$

datos. La reducción es bastante significativa y justifica su uso en el procesamiento de imágenes digitales (Pratt, 1991).

Resumiendo, hemos podido «ver» cómo matrices de rango a inferior a una dada nos pueden proporcionar reproducciones bastante parecidas a las originales. La información importante de una matriz se encuentra en los primeros términos de la descomposición y va asociada a los valores singulares más grandes. Existe mucho software disponible que permite obtener la descomposición en valores singulares de una matriz con sólo proporcionar de entrada la matriz original (Mathematica, Matlab, Cantata de Khoros, NAG, etc.). También se puede encontrar el código para efectuar esta descomposición en C, Basic y Fortran (Press, 1992).

A $\qquad A_5 \qquad A_{10}$

Figura 1



B $\qquad B_5 \qquad B_{15}$

Figura 2

C $\qquad C_{20} \qquad C_{50}$

Figura 3

Condicionamiento de una matriz

La omisión de pequeños valores singulares puede resultar también útil en otras situaciones. Supongamos que tenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 7 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 20 \\ 11 \end{pmatrix} \qquad [1]$$

la solución exacta (es un sistema de Cramer) resulta ser: x = 1; y = 1; z = 1. Mientras que el sistema:

$$\begin{pmatrix} 7,01 & 9,95 & 9 \\ 5,01 & 6,99 & 8 \\ 4 & 6 & 1,01 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 20 \\ 10,9 \end{pmatrix} \qquad [2]$$

también de Cramer, tiene como solución exacta:

$$x = 92,18;\ y = -59,02;\ z = -3,66.$$

Resulta sorprendente que cambios tan pequeños en los coeficientes o términos independientes del sistema puedan provocar cambios tan grandes en la solución. Sistemas de este tipo se llaman *sistemas mal condicionados.* Vamos a intentar entender por qué ocurre esto.

Si tenemos una matriz A cuadrada y regular, en nuestro caso 3x3, a través de la descomposición en valores singulares $A = U{\cdot}S{\cdot}V^T$, podremos descomponerla de la forma:

$$A = s_1R_1 + s_2R_2 + s_3R_3$$

Es inmediato comprobar que: $A^{-1} = V{\cdot}S^{-1}{\cdot}U^T$, y por lo tanto:

$$A^{-1} = s_1^{-1}R_1^T + s_2^{-1}R_2^T + s_3^{-1}R_3^T$$

Si tenemos un sistema de Cramer A·X=B, como en nuestro caso, la única solución del sistema planteado se obtendría como:

$$X = A^{-1}B = s_1^{-1}R_1^TB + s_2^{-1}R_2^TB + s_3^{-1}R_3^TB \qquad [3]$$

Pues bien, se demuestra que el resultado anterior se puede generalizar a cualquier matriz. Si tenemos un sistema del tipo A·X=B, donde la matriz A (que no tiene que ser cuadrada) es de rango *r*, entonces la solución de norma mínima, por el método de los mínimos cuadrados, del sistema anterior resulta ser una adaptación de la fórmula [3], ya que es la siguiente:

$$X = s_1^{-1}R_1^TB + s_2^{-1}R_2^TB + s_3^{-1}R_3^TB \qquad [4]$$

es decir, que se incluyen en la suma exactamente *r* sumandos. El número de sumandos coincide con el rango de la matriz, o lo que es lo mismo, con el número de valores singulares no nulos de la matriz de los coeficientes del sistema.

Resulta sorprendente que cambios tan pequeños en los coeficientes o términos independientes del sistema puedan provocar cambios tan grandes en la solución.

La matriz del sistema [1] tiene como valores singulares: s_1 = 20,18, s_2 = 3,71 y s_3 = 0,01 y la matriz del sistema [2] s_1 = 20,16, s_2 = 3,71 y s_3 = 0,0005. Entonces, ambas matrices estrictamente pueden considerarse regulares y, por lo tanto, se puede encontrar la solución exacta aplicando [3], obteniendo los resultados anteriormente citados.

Sin embargo, está claro que el tercer valor singular está muy próximo a cero, es decir, que las matrices son «casi» de rango 2. Si tratamos estas matrices como matrices de rango 2 y aplicamos [4] con sólo dos sumandos resulta que la solución del sistema [1] es: x = 0,80; y = 1,13; z = 1,01, mientras que la solución del sistema [2] es: x = 0,79; y = 1,12; z = 1,03. Los resultados no son ahora tan sorprendentes.

Vamos a exponer a continuación los pasos a seguir si usamos el software *Mathematica* (Wolfram, 1996) concretamente para el primer sistema (análogamente sería para el segundo). Obtenemos la descomposición en valores singulares mediante el comando **SingularValues**:

```
In:= A={{ 7, 10, 9},{ 5, 7, 8},{ 4, 6, 1}};
     B={ 26, 20, 11};
     { UTRAS, S, VTRAS}=SingularValues[N[A]] ;
```

La salida que se obtiene al ejecutar la entrada anterior son tres matrices que hemos llamado UTRAS (traspuesta de U), S (un vector con los valores singulares) y VTRAS (traspuesta de V). Podemos comprobar la descomposición:

```
In:= Transpose[UTRAS]. DiagonalMatrix[S]. VTRAS
```

el resultado proporcionado coincide con la matriz A original.

Extraemos los vectores singulares por la derecha (columnas de V) que notaremos por v1, v2 y v3; también los vectores singulares por la izquierda u1, u2 y u3 (columnas de U). Construimos las tres matrices de rango unidad siguientes:

```
In:= R1=u1. Transpose[v1];
     R2=u2. Transpose[v2];
     R3=u3. Transpose[v3];
```

La solución del sistema tratando la matriz A como una matriz de rango 3 se obtiene aplicando la fórmula [3] de la siguiente forma:

```
In:= (1/S[[1]])*(Transpose[R1].B) +
    (1/S[[2]])*(Transpose[R2].B) +
    (1/S[[3]])*(Transpose[R3].B)
```

la salida es: {1, 1, 1}.

Mientras que la solución del sistema tratando la matriz A como una matriz de rango 2 se obtiene de la siguiente forma:

```
In:= (1/S[[1]])*(Transpose[R1].B) +
    (1/S[[2]])*(Transpose[R2].B)
```

la salida es: {0,80, 1,13, 1,01}.

Conclusiones

La descomposición en valores singulares proporciona una información muy útil sobre una matriz cualquiera. Nos permite:

- Asignar un rango «razonable» dependiendo de sus valores singulares.
- Obtener matrices de rango inferior pero muy parecidas a la original.
- Resolver de forma adaptativa un sistema de ecuaciones lineales por el método de los mínimos cuadrados. Además, la solución proporcionada por la fórmula [4] de un sistema $A \cdot X=B$, por el método de los mínimos cuadrados, es más fiable que la obtenida por el método más clásico de resolver este otro sistema: $AT \cdot A \cdot X=AT \cdot B$ (más inestable numéricamente).

Por último, queremos observar que hemos abordado el tema desde un punto de vista práctico, pensando exclusivamente en el tipo de alumnos al que va dirigido. No hemos mencionado de forma consciente algunos conceptos que se hubieran necesitado para dar rigor a algunas de las cuestiones planteadas. Así, por ejemplo, hemos hablado de matriz «parecida» a una dada; hubiera sido más correcto hablar de que la diferencia en norma sea lo más pequeña posible. Sin embargo, esto requiere introducir el concepto de norma matricial, y, como ya comentamos al comienzo de este trabajo, el escaso tiempo de docencia lo impide.

Para terminar, queremos observar cómo la mayoría de los libros actualmente en el mercado de Algebra Lineal no abordan esta interesante descomposición matricial. Creemos que no es tan conocida como realmente se merece.

Ángela Rojas
Manuel Torralbo
Departamento de Matemáticas
Universidad de Córdoba
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
«Thales»

Bibliografía

NOBLE, B. y J. W. DANIEL (1989): *Algebra Lineal Aplicada*, Prentice-Hall Hispano-Americana.

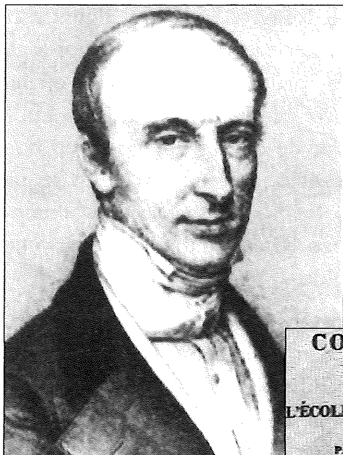
PRATT, W. K. (1991): *Digital Image Processing*, A Wiley-Interscience Publication.

PRESS, W. H., S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING, B. P. FLANNERY (1992): *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press.

WOLFRAM, S. (1996): *The Mathematica Book*, Cambridge University Press.

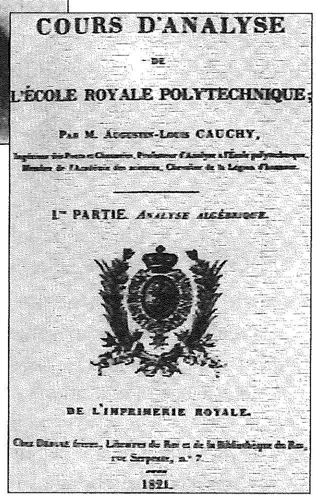
AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY
Cours d'Analise

Primera edición, 1821



La Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales» ha publicado una edición facsimilar de un ejemplar del libro, que se conserva en la Biblioteca del Real Instituto y Observatorio de la Armada en San Fernando.

La edición consta de 1.000 ejemplares numerados, impresos sobre papel verjurado conquerol y encuadernados en cartoné.



COURS D'ANALYSE
DE
L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;
PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,
Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.
1.re PARTIE. ANALYSE ALGÉBRIQUE.
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
Chez Debure frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.
1821.

Relación de precios

a) Encuadernación en cartoné:

Socios de la SAEM Thales	6.500 pts.
No socios	9.000 pts.

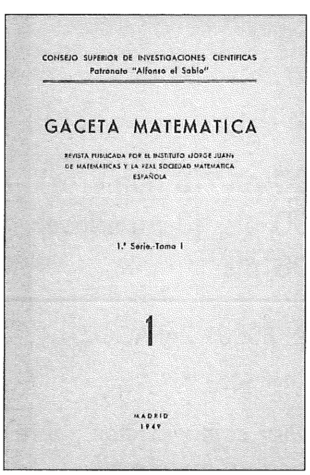
b) Encuadernación en piel (14 ejemplares):

Socios de la SAEM Thales	20.000 pts.
No socios	30.000 pts.

Nota: En los precios anteriores no están incluidos los gastos de envío ni el IVA.

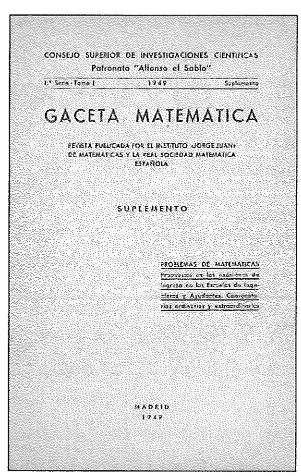
Peticiones

- Socios: SAEM Thales. Apdo. 1.160. Facultad de Matemáticas. 41080 Sevilla
- No socios: Su librería habitual o Centro Andaluz del Libro. Pgno. La Chaparrilla, 34-36. 41016 Sevilla



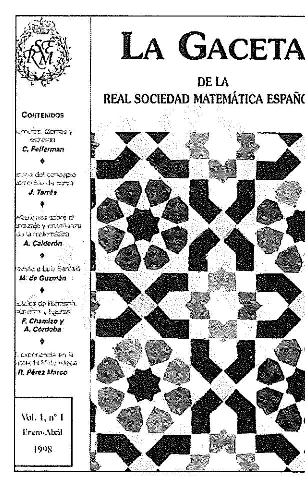
CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS
Patronato "Alfonso el Sabio"
GACETA MATEMATICA
REVISTA PUBLICADA POR EL INSTITUTO «JORGE JUAN» DE MATEMATICAS Y LA REAL SOCIEDAD MATEMATICA ESPAÑOLA
1.ª Serie.-Tomo I
1
MADRID
1949

Gaceta Matemática
1.ª Serie. Tomo I. N.° 1
1949



CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS
Patronato "Alfonso el Sabio"
1.ª Serie-Tomo I 1949 Suplemento
GACETA MATEMATICA
REVISTA PUBLICADA POR EL INSTITUTO «JORGE JUAN» DE MATEMATICAS Y LA REAL SOCIEDAD MATEMATICA ESPAÑOLA
SUPLEMENTO
PROBLEMAS DE MATEMATICAS
Propuestos en los exámenes de ingreso en las Escuelas de Ingenieros y Ayudantes. Convocatorias ordinarias y extraordinarias
MADRID
1949

Gaceta Matemática. Suplemento
1.ª Serie. Tomo I. N.° 1
1949



LA GACETA
DE LA
REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA
CONTENIDOS
C. Fefferman
J. Tarrés
A. Calderón
M. de Guzmán
F. Chamizo y A. Córdoba
R. Pérez Marco
Vol. 1, n.º 1
Enero-Abril
1998

La Gaceta de la RSME
Vol. 1, n.° 1
1998