SUMA 29
noviembre 1998, pp. 29-34

Algunas ideas preconcebidas sobre probabilidad

Agustín Muñoz Núñez

ARTÍCULOS

Todas estas borrascas que nos suceden son señales de que presto ha de serenar el tiempo, y han de sucedernos bien las cosas, ya que no es posible que el mal ni el bien sean tan durables y de aquí se sigue que, habiendo durado mucho el mal, el bien esté ya cerca.
Don Quijote de la Mancha

Dos ideas preconcebidas sobre probabilidad, bastante arraigadas en muchos de los estudiantes de secundaria, son: «lo raro es menos probable» y «el pasado condiciona el futuro». Fragmentos de sendas entrevistas con alumnos de COU, antes de iniciar el estudio del tema de probabilidad, ilustran estas concepciones.

LA ADQUISICIÓN del concepto de probabilidad ha sido con frecuencia objeto de estudio de la psicología, un investigador pionero y ya clásico en este tipo de estudios con niños y adolescentes fue Piaget, sus trabajos inspiraron y siguen inspirando la investigación sobre la adquisición de conceptos en la psicología constructivista. De esta tradición constructivista forman parte los estudios sobre *concepciones falsas*, *ideas preconcebidas*, o *conceptos previos* (traducciones libres de la palabra inglesa *misconceptions*) que tuvieron su origen en el estudio del aprendizaje de conceptos físicos elementales (Clement, 1983) (McCloskey, 1983) y que luego se han extendido a otras disciplinas como la biología o las matemáticas. La aportación principal de estas investigaciones es que los alumnos tienen ideas preconcebidas sobre muchos conceptos (la velocidad, la herencia biológica, la pendiente de una recta, etc.) antes de recibir instrucción formal en la escuela sobre ellos. Las ideas preconcebidas no coinciden con el concepto científico normalmente, pero nos informan de cómo piensan los alumnos y, a veces, de formas ya superadas de pensar sobre determinados conceptos que tuvieron vigencia en épocas pasadas –la física aristotélica o el ejemplo descrito en Clement (1983)–. No son pues lo primero que se les viene a la cabeza sino el resultado de un aprendizaje desde el sentido común motivado por la necesidad de explicar los fenómenos que tienen lugar en su vida diaria. En las aulas la versión científica o escolar de un concepto y las ideas preconcebidas sobre éste entran en diálogo, de acuerdo con la visión constructivista. Así, el aprendizaje se convierte en un proceso por el cual construyendo desde lo válido de las ideas previas del alumno éste aprende a descubrir las limitaciones de aquellas y a asimilar el concepto científico. Una forma en la que este proceso tiene lugar es cuando el alumno reconoce que sus intuiciones tienen contextos de validez limitados y que no son aplicables a contextos más generales (por ejemplo, pensar que los pies de las alturas no salen de un triángulo, válido sólo en triángulos acutángulos), o simplemente porque aprende a diferenciar contextos que antes para él eran el mismo (distinguir que hay dos tipos de movimiento, el uniforme y el uniformemente acelerado, por ejemplo).

Dentro de la corriente constructivista han surgido más recientemente investigaciones de carácter más didáctico, en cuanto que están más contextualizadas en lo que se refiere a los contenidos de los experimentos de los estudios (próximos al currículo escolar) y también, a veces, en cuanto a la metodología que es menos «tipo laboratorio» y más consciente de factores que entran en juego en las aulas como el lenguaje, la cooperación o comunicación entre alumnos. Una recopilación interesante de estudios en Educación Matemática en esta línea aparece en Glasersfeld (1991); este artículo adopta la metodología de análisis de entrevistas presente en la mayoría de ellos.

El presente trabajo pretende identificar algunas ideas preconcebidas típicas observadas en alumnos de COU que no han estudiado probabilidad antes, pero que tienen, como es de esperar a estas edades, un concepto de ésta formado por la experiencia. Para ello, mantuvimos entrevistas con estudiantes en las que se les plantearon dos problemas de probabilidad bastante representativos de los conceptos que forman parte del currículo del tema de probabilidad: los sucesos equiprobables (primer problema) y la independencia de sucesos (segundo problema). Estas entrevistas se realizaban antes de la introducción del tema de probabilidad, se trataba por parte del entrevistador de intervenir lo menos posible, pero no eran completamente abiertas pues éste pretendía que dijeran por qué creían que su respuesta era correcta, y de este modo tratar de valorar el arraigo de las concepciones identificadas, viendo si estaban convencidos de lo que decían y hasta qué punto las podían apoyar con alguna explicación. A lo largo de este artículo nos referiremos a estas ideas preconcebidas también como concepciones o intuiciones.

La probabilidad dentro del currículo

El tema de probabilidad que nuestros alumnos encuentran en COU supone una novedad, y así es percibido por ellos en comparación con otros contenidos de análisis o geometría que han estudiado hasta entonces.

Por un lado, los problemas de probabilidad aunque no tienen cálculos complicados, requieren mucha atención en el planteamiento, en entender el problema. Son menos rutinarios y a menudo recibimos la queja de los alumnos de que cada problema se hace de un modo distinto, de que no hay una fórmula. Por otro, es un tema donde por la propia condición de la probabilidad de ciencia que estudia fenómenos no deterministas, las conjeturas y estimaciones (incluso con un matiz de implicación personal) surgen de modo natural: «*Me* parece más probable que...», «*Yo* escogería...». Todos los alumnos tienen una idea, bastante arraigada, de lo que significa *ser más probable*, aunque ésta no coincida siempre con el concepto matemático. Sus intuiciones sobre lo que creen ser más probable chocan a menudo con lo que la teoría matemática nos dice y esto es muchas veces un elemento de motivación y curiosidad. Nuestra experiencia con las entrevistas mantenidas es que sus intuiciones les parecen tan evidentes que al ser puestas a prueba, enseguida, tras a veces una obcecación inicial en creerlo «porque sí», empiezan a proponer explicaciones con mucho convencimiento, que consisten en ejemplos de la vida diaria relacionados con el azar que comparan con el problema propuesto: «es como cuando...». En general, hemos encontrado alumnos con capacidad para razonar sobre sus intuiciones en una materia donde el bagaje matemático se reduce a lo mínimo, y donde priman los aspectos conceptuales sobre el cálculo. La probabilidad nos permite acercarnos a las matemáticas de un modo distinto al de otros temas del currículo, bien porque son más rutinarios (aprender las reglas de derivación, por ejemplo) o bien porque es difícil que los alumnos tengan ideas preconcebidas sobre ellos (el caso de los determinantes).

Todos los alumnos tienen una idea, bastante arraigada, de lo que significa ser más probable, aunque ésta no coincida siempre con el concepto matemático. Sus intuiciones sobre lo que creen ser más probable chocan a menudo con lo que la teoría matemática nos dice y esto es muchas veces un elemento de motivación y curiosidad.

Entrevistas e identificación de concepciones

Los fragmentos de la entrevista y su interpretación pretenden *ilustrar* distintas concepciones en los razonamientos de los alumnos y no suponen un análisis exhaustivo de los datos; orientaciones metodológicas sobre el análisis cualitativo de datos verbales pueden encontrarse en la obra ya clásica de Ericson (1985). Corresponden todos a una misma entrevista mantenida con un alumno durante hora y media. En todo ese tiempo la conversación no fue siempre tan lineal como puede parecer por esta selección de fragmentos: en muchas ocasiones había que volver a reformular el problema, a centrar la conversación, a asegurarnos de que lo había entendido, y el alumno por su parte volvía a razonamientos que parecía ya haber superado. Aunque no es posible esperar que las entrevistas con todos alumnos tomen siempre el mismo curso o que el alumno colabore del mismo modo, las mantenidas con otros estudiantes nos han permitido identificar las mismas concepciones que reflejamos en esta selección. El diálogo, el debate intelectual es muy gratificante y además es una forma de aprendizaje (heredera del diálogo clásico o socrático). Es también una fuente insustituible para saber cómo piensan nuestros alumnos. Animamos a los lectores a mantener este tipo de discusiones con sus estudiantes, que incluso pueden adaptarse a diálogos con toda la clase.

Primer Problema

— Si fueras a comprar un número de lotería ¿cuál elegirías el 11111 o el 12472?

— El 12472 (*con rotundidad*).

— ¿Por qué?

— El 11111 nunca sale.

— ¿Y el 12472 sí? (*intentando orientar su argumentación*).

— Sí porque nunca salen cinco unos.

— Pero recuerdas que haya salido alguna vez el 12472 (*poniendo a prueba su argumentación de nuevo*).

— No, pero es más fácil que salga un número así.

— ¿Por qué?

— Porque puedes formar más números de esa forma y con cinco unos sólo hay uno.

— Pero estamos hablando del 11111 o el 12472, imagina todos los números en una bolsa y que sacas uno, entonces ¿cuál es más probable? (*proponiendo un modelo más sencillo equivalente*).

— Sí (*tras pensar unos segundos*), da igual, los dos tienen la misma probabilidad.

— Entonces si tuvieras que comprarlo realmente, ¿cúal comprarías?

— Cualquiera.

...la tarea del entrevistador es facilitar con ejemplos o modelos equivalentes al problema planteado, un terreno donde los argumentos del alumno puedan ser defendidos por éste y puestos a prueba por áquel, algo parecido a establecer un lenguaje común a ambos.

Este fragmento de la entrevista identifica e ilustra la concepción que podemos denominar *lo raro es menos probable*. Para el alumno el número 11111 es raro (porque se puede identificar y recordar con facilidad) frente al 12472 que es un número más. Sin embargo el error viene de comparar el suceso «salir el 11111» con «salir un número del tipo 12472» y no con «salir exactamente el 12472». Esto queda claro cuando dice «Porque puedes formar más números de esa forma y con cinco unos sólo hay uno». Está dispuesto a justificar su intuición mediante algún mecanismo generador de casos, lo cual indica que entiende que a mayor número de casos favorables mayor probabilidad, intuición por otro lado muy importante.

Aunque la concepción de *lo raro es menos probable* no es aplicable en este problema tiene sus contextos de validez, en particular los problemas en los que no interviene el orden de las cifras. Por ejemplo, si el mismo problema nos pidiera decir qué es más probable si obtener un número con las cifras 11111 o con las cifras 12472 su argumento sería correcto. La dificultad inicial para distinguir entre sucesos equiprobables es muy frecuente entre los alumnos, y también entre adultos incluso con formación científica, como hemos podido comprobar al proponer el problema a colegas que no eran matemáticos. Sin embargo, es una concepción que cuando se entra en diálogo con ella acaba por refinarse, es decir, el alumno entiende cuándo es aplicable y cuándo no, aprende a distinguir contextos donde influye el orden y donde no, generalmente porque es capaz de reducir el problema a problemas equivalentes más sencillos del mismo modo que el entrevistador lo hace con el ejemplo de las bolas.

En general, como se ve en los fragmentos, la tarea del entrevistador es facilitar con ejemplos o modelos equivalentes al problema planteado, un terreno donde los argumentos del alumno puedan ser defendidos por éste y puestos a prueba por áquel, algo parecido a establecer un lenguaje común a ambos. Esta entrevista se repite en términos parecidos casi siempre si el entrevistador sigue la misma estrategia de ir acotando y poniendo a prueba la argumentación del alumno.

Segundo Problema

— Lanzamos 8 veces una moneda, se trata de sacar 7 caras seguidas y una cruz al final o de sacar 5 caras seguidas y 3 cruces seguidas, en este orden. ¿Cuál de los dos casos te parece más probable?

— 5 y 3.

— ¿Por qué?

— Porque si te pones a tirar una moneda es más difícil que salgan 7 caras seguidas que cinco, ...haz la prueba.

— Ya, pero supón que hubieran salido ya cinco caras seguidas, y vas a lanzar la moneda de nuevo, en ese momento ¿qué es más probable, que salga cara o cruz?

— Igual.

— Entonces será igual de probable que salgan 5 que 6 y si lo vuelves a repetir 5 que 7.

— No, ...no sé. (*Dubitativo y sin que la explicación le haya convencido*).

— ¿Por qué?

— Porque ya han salido cinco caras seguidas antes y que salga otra...

— Da igual, aunque hubieran salido 99 caras seguidas, la probabilidad de que salga en la siguiente tirada cara o cruz es la misma[1].

— No puede ser porque tendrá que salir cruz alguna vez.

— Pero cada vez que lanzas es como si empezaras de nuevo. Lo que haya pasado antes no cuenta.

— Tiene que contar.

— No, no cuenta porque cada vez que tu lanzas la moneda es independiente de lo que haya ocurrido anteriormente, la moneda no tiene memoria para saber lo que ha pasado antes.

— Sí, eso es verdad ...no digo que ...eso no tendría sentido. (*No parece que entienda del todo la independencia de sucesos*).

— Entonces...

— Ya pero hay pocas formas de sacar 7 caras y 1 cruz y hay más formas de sacar 5 caras y 3 cruces. (*Parece como si no hubiera entendido la pregunta inicial donde se decía que tenían que aparecer en un orden dado*).

— Sí, pero estamos hablando de dos casos concretos donde hay un orden de aparición de las caras y las cruces dado. (*Centrando el problema de nuevo*).

— No, si eso lo entiendo pero al haber más formas de conseguirlo... porque cuando hayan salido 3 caras seguidas por ejemplo, es más fácil que salgan otras 2 y 3 cruces que no otras 4 caras y al final una cruz, ¿no?

— Sí, pero siempre que te de igual el orden en el que aparezcan, y ése no es el caso.

— Ya sé que hay que tener en cuenta el orden. Lo que digo es que 7 y 1 es poco probable, entonces la descarto y la mía está entre las que son más probables las de 5 y 3. (*La concepción de lo raro es menos probable aparece aquí de nuevo*).

— Pero la 7 y 1, en este orden, es una elección concreta entre todas las que tienen 7 caras y 1 cruz. De acuerdo que una combinación de este tipo es menos probable que una del tipo 5 caras y 3 cruces, pero esa no es la pregunta. (*A partir de aquí la conversación fue volver una y otra vez sobre lo mismo sin que el alumno cayera en la cuenta de por qué su argumento no era válido*).

Este fragmento ilustra la concepción que podemos llamar el pasado condiciona el futuro. La sabiduría popular recoge esta intuición en refranes como «no hay mal que cien años dure»

Este fragmento ilustra la concepción que podemos llamar *el pasado condiciona el futuro*. La sabiduría popular recoge esta intuición en refranes como «no hay mal que cien años dure» o en la cita del Quijote al comienzo de este artículo. También es frecuente encontrarse jugadores de azar que parten de esta premisa para apostar: «hace mucho que no sale el 5, alguna vez tendrá que salir», «no apuestes al 3 porque acaba de salir». Incluso nosotros mismos tuvimos que hacer un esfuerzo para no dejarnos llevar instintivamente por el razonamiento del alumno en algún momento de la entrevista. Esta concepción se sustenta en una idea importante asociada a un razonamiento incorrecto. La idea es la de probabilidad como límite de frecuencias (quizá el más usado en el bachillerato). Nos viene a decir que si tiramos «muchas» veces una moneda el número de caras y cruces tiende a ser muy parecido. El razonamiento incorrecto consiste en decir que habiendo salido noventa y nueve caras sea más probable una cruz en la siguiente tirada, porque como sabemos por la independencia de sucesos, el salir cara o cruz es igual de probable. Sin embargo se tiende a pensar que la tirada número cien es un buen momento para que salga una cruz pues ya van «muchas»

1 El entrevistador trata de presentar un caso límite, sin embargo, de producirse en realidad, según nos han observado colegas que han leído la entrevista, sería incluso *más razonable* pensar que la moneda está sesgada y volver a pedir cara sería lo correcto.

tiradas todas de caras y ambos números tienen que resultar al final (en infinitas tiradas) parecidos, así que tendrán que salir cruces para compensar el número de caras. Aunque los alumnos den explicaciones más o menos elaboradas todas se reducen a esta argumentación. En el caso de nuestro estudiante las frases: «Porque si te pones a tirar una moneda es más difícil que salgan 7 caras seguidas que cinco, ...haz la prueba». «Porque ya han salido cinco caras seguidas antes y que salga otra...». «No puede ser porque tendrá que salir cruz alguna vez» indican, a nuestro juicio, que su explicación va por esos derroteros en la primera parte de la entrevista. Cuando el entrevistador confronta estas explicaciones haciéndole ver que las tiradas son independientes el alumno ensaya otra explicación basada en la concepción de la entrevista anterior *lo raro es menos probable*, aunque con una argumentación, la de su última intervención en la entrevista, que nos parece bastante sofisticada y hasta «convincente».

Resulta evidente del análisis anterior, cómo dentro de una concepción que es globalmente errónea hay elementos muy aprovechables (la idea de que las frecuencias de caras y cruces se estabilizan); también como las concepciones interaccionan: en este caso una ayuda a justificar la otra. Además, vemos que son muy persistentes, como prueba por un lado el afán de justificar que el pasado tiene que condicionar la tirada actual a pesar de encontrar los argumentos en contra del profesor, y por otro, el que otra concepción que debería estar superada de la entrevista anterior vuelve a aparecer como elemento de la explicación.

El punto muerto en el que entra la conversación donde la hemos dejado indica que el diálogo con una concepción es a veces difícil, y que los ejemplos y analogías, junto a la pericia del entrevistador, no siempre sirven para hacer ver al alumno que su razonamiento no es adecuado.

La intuición a veces se obceca, como acabamos de ver, y superar esta situación puede requerir introducir la teoría matemática y que ésta sea el terreno donde el razonamiento formal pueda competir con lo intuitivo. La tarea de crear ese lenguaje común que hemos mencionado en el apartado anterior, es en este caso más difícil pues ese lenguaje es el matemático. Esto supone que el alumno aprenda a admitir la validez de un argumento porque es deducido de acuerdo con las reglas de juego de las matemáticas, aunque éste no coincida con lo que él piensa. En definitiva, que reconozca que no todo lo intuitivamente aceptable siempre es válido desde el punto de vista formal. Esto no significa despreciar los razonamientos intuitivos sino más bien una educación de la intuición. La propia historia de las matemáticas contiene episodios de este tipo, por ejemplo, el que la imagen de una aplicación continua de un segmento pueda rellenar un cuadrado fue y es algo bastante poco intuitivo, pero una vez convencidos de que es posible y comprendida realmente la idea que hay debajo, este tipo de aplicaciones (curvas de Peano) pasan a formar parte de nuestros razonamientos intuitivos cuando más adelante encontramos problemas parecidos. Este refinamiento de la intuición supone una capacidad de abstracción y de madurez matemática considerable que podemos iniciar en nuestros alumnos cuando las circunstancias nos brinden esa oportunidad.

...el alumno aprenda a admitir la validez de un argumento porque es deducido de acuerdo con las reglas de juego de las matemáticas, aunque éste no coincida con lo que él piensa. En definitiva, que reconozca que no todo lo intuitivamente aceptable siempre es válido desde el punto de vista formal.

Conclusiones

Al profesor atento le resultaran familiares estas concepciones porque las reconocerá en sus alumnos. Queremos hacer notar que aunque nuestros alumnos no hayan estudiado probablidad antes, manejan ideas previas importantes y son capaces de argumentar con ellas y de defenderlas. Estas ideas o concepciones tienen su origen en experiencias de la vida cotidiana, en analogías, etc. y siempre encierran algo de *verdad*, entendiendo como tal los contextos donde pueden resultar válidas. Cuando introducimos este tema en nuestras clases entramos en diálogo con ellas, la mente del estudiante no es un cuaderno en blanco, donde se escriben nuestras explicaciones. Los fragmentos ofrecen ejemplos de cómo este diálogo se puede producir y también de sus limitaciones. El identificar las concepciones y qué las sustenta nos da pistas de por qué hay conceptos que suelen entender con más facilidad, como el mencionado de que las frecuencias de caras y cruces tienden a ser iguales, y también, de cómo otros parecen escapárseles, como la independencia de sucesos. También nos ayuda a superar visiones reduccionistas de los errores y dificultades de nuestros alumnos, que las atribuyen exclusivamente a la complejidad intrínseca de los conceptos o a la falta de atención. El identificarlas es también un primer paso para diseñar estrategias para reforzarlas, combatirlas o refinarlas. Profundizar en esto último supone construir el conocimiento desde estas concepciones y diseñar el curriculum teniéndolas en cuenta, y esto supera el propósito de ese artículo que era sólo identificar algunas de estas concepciones.

Referencias bibliográficas

CLEMENT, J. (1983): «A Conceptual Model Discussed by Galileo and Used Intuitively by Phisics Students», en *Mental Models,* Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ, 325-340.

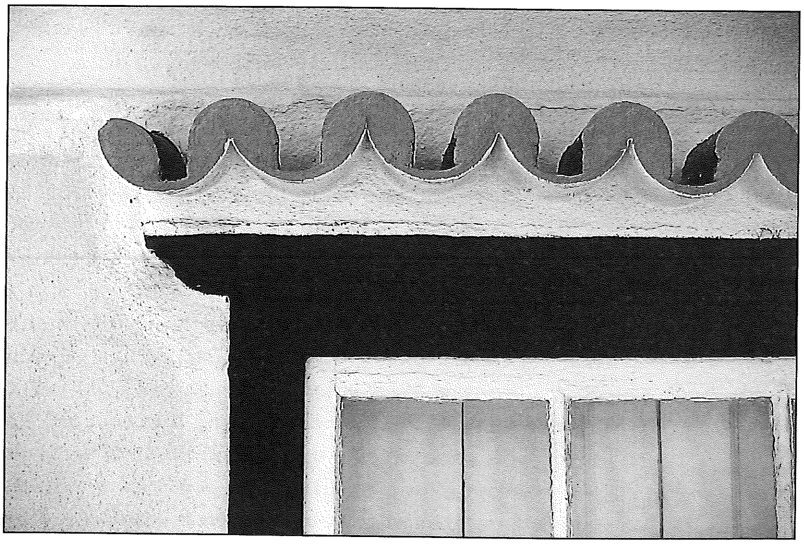
ERICSON, K. (1985): *Protocol Analysis: Verbal Reports as Data*, MIT Press, Cambridge, Mass.

VON GLASERSFELD, E. (Ed) (1991): *Radical Constructivism in Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

MCCLOSKEY, M. (1983): «Naive Theories of Motion», en *Mental Models,* Lawrence Erlbaum Associates, Hillsadle, NJ, 325-340.

Agustín Muñoz
IB Dionisio Aguado.
Fuenlabrada (Madrid)

Chartres



Cascais

Fotos:
Pilar Moreno