SUMA 28
junio 1998, pp. 117-120

¿Dónde situar el hospital del Salnés?

Francisco Manuel Rodríguez Mayo

IDEAS Y RECURSOS

Se trata de una propuesta didáctica con la resolución de un problema real: ¿cuál es la ubicación ideal para un hospital comarcal (el del Salnés en Pontevedra)? La resolución del problema conduce a varios métodos diferentes: un procedimiento analógico (búsqueda del punto de equilibrio de una serie de masas puntuales, que puede relacionarse con el teorema de Steinitz), un método estadístico (cálculo de la media de una variables estadística) y un procedimiento propio del análisis matemático (determinar el mínimo de una función derivable y de otra no derivable). Finalmente, el problema obliga a una reflexión sobre el significado de la media y de la mediana de una distribución y del método de los mínimos cuadrados utilizado, por ejemplo, para el cálculo de la recta de regresión.

ESTA PROPUESTA didáctica para el aula de Matemáticas puede ser abordada desde una metodología próxima a la «resolución de problemas». Se trata de determinar la mejor ubicación para un hospital comarcal. Es un problema real, con las dificultades que supone manejar datos reales, pero que tambien puede ser formulado sin perder interés con ejemplos teóricos más simples, como los propuestos al final de este artículo.

Como se verá, su resolución puede efectuarse en varios niveles educativos diferentes:

a) Un primer nivel elemental, que solo necesita conocimientos básicos de Estadística y que incluso admite una resolución que no precisa de la herramienta matemática (segundo ciclo de la ESO).
b) Un segundo nivel de Matemática avanzada (2.° curso de bachillerato).

El problema

Un poco de Geografía: La comarca del Salnés abarca la mayor parte del lado sur de la Ría de Arousa (Pontevedra). Es una zona densamente poblada y con una gran dispersión de la población.

La sanidad en Galicia: El sistema de atención primaria en Galicia se basa en la división del territorio en diferentes «Áreas de Saúde», en cada una de las cuales debe existir un hospital de referencia.

En el plan propuesto por la Xunta el Salnés, a pesar de su elevada población, figuraba incluido en el «Área de Saúde de Pontevedra Sur». La movilización de un grupo de ciudadanos agrupados en la «Comisión Veciñal pro Hospital do Salnés» consiguieron, mediante la aprobación de una iniciativa legislativa popular, que se crease el «Area de

Saúde do Salnés» que integra los municipios de Catoira, Vilagarcía de Arousa, Vilanova de Arousa[1], Cambados y Ribadumia.

En consecuencia se debe construir un hospital para esa zona. Pero, ¿dónde debe situarse ese hospital?

Resolviendo problemas

Primera aproximación

— Formular adecuadamente el problema haciendo explícitos los criterios en los que se debe basar la elección. Por ejemplo: ¿En que lugar debe situarse el hospital de modo que los desplazamientos que deban efectuar los posibles enfermos sean mínimos?

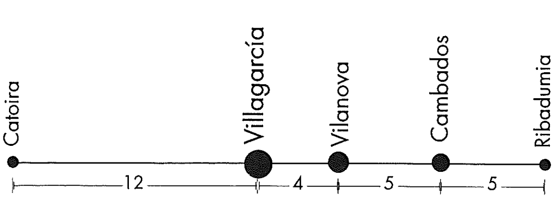
— ¿Qué datos necesitaremos?: La población de la zona y su distribución, las vías de comunicación existentes, lugares posibles, etc.

Municipio	*Población*
Catoira	3.653
Vilagarcía	31.853
Vilanova	15.104
Cambados	12.668
Ribadumia	4.005

— Reformular el problema en función de los datos. Es un primer paso hacia la «abstracción» y «matematización» del problema.

- Dada la gran cantidad de núcleos de población supondremos, para simplificar, que la población de cada municipio está concentrada en su capital.
- Si bien existen numerosas vías de comunicación, sólo existe una de importancia que une los núcleos urbanos de todos los municipios. El hospital debe estar en esa carretera.

— Matematizando: Representamos la carretera por un segmento y los núcleos urbanos por puntos a lo largo de ese segmento.



1 Con posterioridad a la elaboración de esta propuesta, se aprobó la segregación de la «Illa de Arousa» del municipio de Vilanova de Arousa, pasando a formar un municipio independiente.

Dada la dificultad de conseguir los datos del nuevo municipio, he optado por mantener la resolución del problema con los municipios de Vilanova y la Illa agrupados.

Buscar un método de resolución

Existen diferentes estrategias generales que pueden ser de utilidad:

— Buscar similitudes entre el problema y tipos conocidos para poder aplicar el correspondiente método de resolución, modificandolo ligeramente de ser necesario. Es el método favorito de nuestros estudiantes pero, en este caso, no parece ser muy útil al tratarse de un problema nuevo.

— Intentar resolver un problema similar pero más simple.

Por ejemplo, determinar el emplazamiento óptimo para dos pueblos con igual población. Este problema puede conducirnos a la solución.

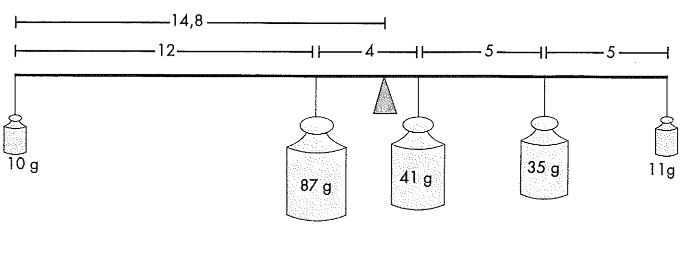
Solución 1

La solución ideal, cuando se trate de dos pueblos con poblaciones iguales, parece ser el punto *medio* entre los dos (permita el lector que, por el momento, demos por válida esta idea intuitiva).

Dado que el punto medio es el punto de equilibrio, podemos construir un modelo *analógico* de la situación y buscar ese punto de equilibrio:

1. Necesitamos un trozo de varilla roscada y diferentes pesas proporcionales a la población de cada municipio.
2. Colgamos las pesas en la varilla a distancias proporcionales a las reales.
3. Determinamos el punto de equilibrio.

La solución obtenida es un lugar situado entre Vilagarcía y Vilanova a una distancia de 14,8 desde Catoira.



Solución 2

El método anterior no es muy preciso. ¿Podemos determinar el punto medio numéricamente con lo que conseguiríamos una mayor precisión?

El primer paso para transformar un problema geométrico en numérico, es introducir coordenadas: optamos por elegir el origen en el primer pueblo (Catoira). Cada punto del segmento queda determinado por su distancia al origen.

La posición es una variable estadística discreta, x_i, que toma los valores 0, 12, 16, 21 y 26 siendo la frecuencia de cada valor la población del municipio respectivo, p_i.

La posición del punto de equilibrio será la media de esa variable:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot p_i}{\sum_{i=1}^{5} p_i} =$$

$$= \frac{0 \cdot 3653 + 12 \cdot 31853 + 16 \cdot 15104 + 21 \cdot 12668 + 26 \cdot 4005}{3653 + 31853 + 15104 + 12668 + 4005} = 14{,}774$$

Nota: Un buen ejercicio es comprobar que la solución obtenida no depende del sistema de coordenadas elegido.

Solución 3

Las soluciones anteriores se basan en la suposición de que la media es efectivamente el punto respecto al cual los desplazamientos son mínimos. Esa suposición obedece a una idea intuitiva pero no ha sido establecida formalmente.

Podemos abordar directamente el problema de determinar cual es el punto óptimo.

Si x es la posición del hospital, la función que describe el desplazamiento que efectúan los posibles enfermos es:

$$D = 3653 \cdot |x-0| + 31853 \cdot |x-12| + 15104 \cdot |x-16| + 12668 \cdot |x-21| + 4005 \cdot |x-26|$$

Nuestro método de obtención de mínimos consiste en derivar e igualar a 0, pero la función desplazamiento contiene valores absolutos y, por lo tanto, no es derivable. Sustituimos el valor absoluto **por elevar al cuadrado (ojo)** para conseguir la derivabilidad:

$$SD = \sqrt{3653(x-0)^2 + 31853(x-12)^2 + 15104(x-16)^2 + 12668(x-21)^2 + 4005(x-26)^2}$$

Derivando y simplificando:

$$SD' = \frac{3653(x-0) + 31853(x-12) + 15104(x-16) + 12668(x-21) + 4005(x-26)}{\sqrt{3653(x-0)^2 + 31853(x-12)^2 + 15104(x-16)^2 + 12668(x-21)^2 + 4005(x-26)^2}}$$

Igualando a 0 y despejando x (las operaciones se dejan indicadas para facilitar la interpretación de la expresión final):

$$3653(x-0) + 31853(x-12) + 15104(x-16) + 12668(x-21) + 4005(x-26) = 0$$

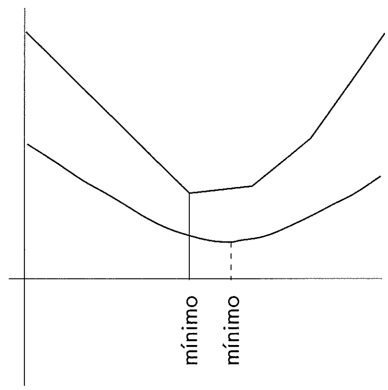
$$x = \frac{0 \cdot 3653 + 12 \cdot 31853 + 16 \cdot 15104 + 21 \cdot 12668 + 26 \cdot 4005}{3653 + 31853 + 15104 + 12668 + 4005} = 14{,}774$$

Como puede apreciarse, la expresión final es la misma que la utilizada para el cálculo de la media, lo que *casi* demuestra que nuestra suposición acerca de la media como posición correspondiente al desplazamiento mínimo es correcta.

Casi demuestra no es demuestra

El problema es que la función que hemos utilizado no es exactamente la que describe el desplazamiento.

Utilizando una calculadora gráfica o un programa de cálculo simbólico podemos encontrar el mínimo de una función sin necesidad de que sea derivable.



Sorpresa: La gráficas de la función desplazamiento (trozos de rectas) y de la función desplazamiento modificada (hipérbola) son las que aparecen en la figura y sus mínimos no coinciden.

La función desplazamiento alcanza el mínimo en x = 12 y no en x = 14,774.

¿Por qué en x = 12? x = 12 es la mediana de la distribución de las distancias.

Es evidente (ahora): La mediana divide a la distribución en dos partes iguales. Desplazarse una cantidad cualquiera a un lado de la mediana beneficia en esa cantidad, *como mucho*, a la mitad de los elementos de la distribución y perjudica, *por lo menos*, en esa misma cantidad a los elementos de la otra mitad.

La media proporciona el punto óptimo cuando el criterio es el equilibrio (en este caso, la distribución homogénea de los gastos de desplazamiento entre la población). No olvidemos que la suma de las desviaciones respecto a la media es 0.

Quizás es el momento de que el lector reflexione sobre la importancia de los métodos algebraicos y de conceptos como el de media o el de recta de regresión (recta de mínimos cuadrados).

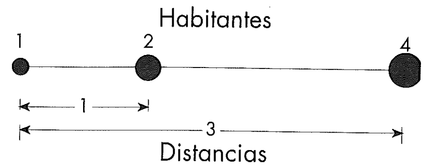
Nota final

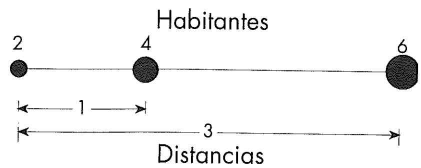
El anterior es un problema real con las dificultades y complejidades que eso conlleva.

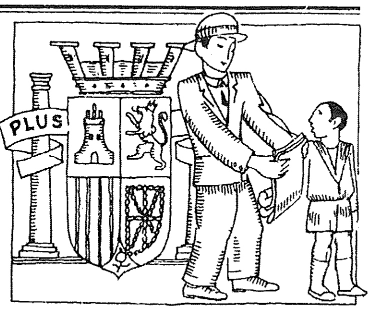
Francisco M. Rodríguez*
IES de Carril
Villagarcía de Arousa
ENCIGA

* La idea inicial del artículo (planteamiento y soluciones 1 y 2) surgieron de un trabajo conjunto de Roberto Vidal, Marina Germinás y el autor.

Problemas teóricos semejantes pero de mayor simplicidad en cuanto a su escritura son los siguientes (en el segundo ejemplo la mediana no corresponde a ninguno de los valores de la distribución):



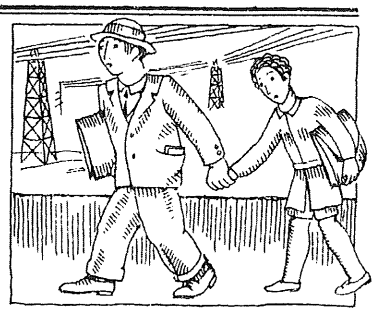




N.° 194. Un rentista ha vendido 15 títulos serie A (de 500 ptas.) de la Deuda interior 4 °/₀ del Estado al cambio de 62'75. ¿Cuánto ha cobrado?

$15 \times 500 = 7500$ ptas. nominales.

$\frac{62'75}{100} \times 7500 = 4706'25$ ptas. que ha cobrado.



N.° 195. Hemos comprado 25 obligaciones de 500 ptas. de la Chade 6 °/₀ al cambio de 102'50. ¿Cuánto hemos tenido que pagar?

$25 \times 500 = 12{,}500$ ptas.

$\frac{102'50}{100} \times 12{,}500 = 12{,}812'50$ ptas. efectivas.