

# Ideas previas: experimentación acerca de ideas arraigadas e ideas inducidas sobre fracciones

**Alberto Martínez Delgado**

## IDEAS PREVIAS: importancia educativa y mitificación

La importancia de los conocimientos previos para el aprendizaje ha sido reconocida tradicionalmente en el pensamiento sobre la educación. Comenius, en el siglo XVII, indicaba que «todas las cosas deben ser enseñadas en la debida sucesión...» (1907, 191), orden en el que la conexión entre unos conocimientos y los anteriores parece determinante. Pestalozzi (1927, t. 1, 99) parece incluir esta relación entre conocimientos previos y posteriores en su visión del «arte de la educación» como «proceso natural» siguiendo una «seriación gradual».

Thorndike (1922, 199), desde posiciones conductistas, difícilmente identificables con planteamientos memorísticos, como con frecuencia se sostiene, propone:

Un plan científico para enseñar aritmética debería empezar con un inventario exacto del conocimiento y la habilidad que ya poseen los alumnos.

Recientemente, se ha resaltado por parte de la psicología cognitiva, y especialmente por el constructivismo radical, el «constructo» de *ideas previas*, en contraposición al de conocimientos previos que parece asociarse con una visión tradicional de la educación. La idea de conocimiento responde a una visión filosófica de tipo realista y «objetivista» (con existencia de algún criterio objetivo de «verdad» o correspondencia entre ideas y realidad exterior); el concepto de *ideas previas* prescinde (o, al menos, relaja su dependencia) de la connotación de *corrección* o *error* que enmarca a los *conocimientos*. La influencia del constructivismo radical, con su paradigma epistemológico *interpretativo* y *subjetivista*, no es ajena, probablemente a este deslizamiento desde los *conocimientos previos* hacia las *ideas previas*.

Mediante el análisis de algunos planteamientos constructivistas, y a través del diseño y realización de un diseño «cuasiexperimental», se intenta indagar sobre la existencia de una mitificación del «constructo» de ideas previas en la enseñanza de las Matemáticas. Se llama la atención sobre la relatividad del calificativo de «previas» y, recordando la posición de

Piaget al respecto, se propone la distinción entre *ideas arraigadas* e *ideas superficiales*. Dentro de estas últimas, las *ideas inducidas* son objeto de experimentación, centrada en el empleo, tras distintos tratamientos, de «estrategias aditivas» o de «estrategias multiplicativas» en la resolución de problemas con fracciones. Esta experimentación justifica, parcial y provisionalmente, la crítica de la sobrevaloración y simplismo que frecuentemente acompañan a las instrucciones y recomendaciones sobre las ideas previas.

La distinción anterior, entre ideas previas, desde el punto de vista constructivista, y conocimientos previos, en un sentido realista, sin embargo, se difumina o desaparece en algunos planteamientos que se declaran partícipes de las tendencias constructivistas. La amplia gama de posiciones integradas en la «concepción constructivista» (MEC, 1989, 31) y la premura de algunas adscripciones al constructivismo pueden explicar en parte la confusión que, también en el terreno de la teoría educativa, parece acompañar la reforma realizada a través de la LOGSE. El Ministerio de Educación y Ciencia español (MEC, 1989, 521), bajo el epígrafe «conocer lo que sabe el alumno», que nos remite al conductismo de Thorndike, afirma y recomienda para la Educación Secundaria Obligatoria:

Los esquemas previos que poseen los alumnos no son en muchos casos suficientemente precisos, completos ni tan siquiera ajustados a la realidad. A veces se manifiestan directa o indirectamente en forma de «errores» al efectuar cálculos, resolver problemas o definir conceptos... Suele ser habitual realizar, a veces sólo al principio del curso, una prueba o examen de conocimientos previos. Esta información, que es sin duda muy útil, debe ser recogida con más frecuencia, sobre todo al iniciar o retomar un tema determinado...

En cuanto al enfoque de las «actividades de enseñanza-aprendizaje» el Ministerio de Educación y Ciencia (1989, 98) insiste en el mismo sentido:

En primer lugar, el profesor debe dar gran importancia a los conocimientos previos que posee el alumno. Es por ello necesaria la planificación de actividades variadas encaminadas a conocer cuáles son esas ideas previas, qué grado de elaboración tienen y discutir sobre ellas como punto de partida...

Un enfoque similar, identificable con el conductismo pero adscrito al constructivismo, se puede observar en formulaciones académicas como las expuestas por Pozo y otros (1991, 12):

Si asumimos una actitud constructivista con respecto al aprendizaje de los alumnos, una de nuestras preocupaciones fundamentales —aunque desde luego no la única ni la última— deberá ser por tanto conocer qué es lo que los alumnos ya saben sobre lo que vamos a enseñarles. No es casual que buena parte de la investigación y de la innovación educativa haya estado dedicada estos últimos años a estudiar los conocimientos previos de alumnos de muy diversas edades, así como la forma en que pueden ser tratados y evaluados en el aula.

La referencia, a veces sin distinciones teóricas acerca de su naturaleza (realista o subjetivista), a los conceptos «alternativos» de los alumnos, a sus «micromundos» o sus «dominios experienciales subjetivos» (Haseman, 1988, 149), a «lo que el alumno sabe» (Jiménez Gómez y otros, 1994, 235), a «lo que se conoce como “preconcepciones”, “concepciones alternativas”, “concepciones espontáneas”» (Gil Pérez, 1994, 156)..., son objeto de gran insistencia, frecuentemente con un tono propagandístico y triunfalista que probablemente no es ajeno a la campaña publicitaria de la LOGSE, pero cuyas raíces profundas habría que

*La amplia gama de posiciones integradas en la «concepción constructivista» y la premura de algunas adscripciones al constructivismo pueden explicar en parte la confusión que, también en el terreno de la teoría educativa, parece acompañar la reforma realizada a través de la LOGSE.*

investigar específicamente; esta exaltación de las ideas previas tiene lugar en un contexto científico en el que, como señalan Jiménez Gómez y otros (1994, 236), «...a pesar de la proliferación de trabajos aparecidos en los últimos años acerca de este tema, [...], poco se ha avanzado en clarificar su epistemología y estatus ontogenético, [...], ni tan siquiera en unificar los términos y sus significados a la hora de referirnos a ello».

Las notas críticas anteriores, no deben ser obstáculo, sin embargo, para el reconocimiento, de gran tradición histórica en la enseñanza de las Matemáticas —como tradicional es el principio de que las Matemáticas sean «entendidas» o, en un lenguaje de apariencia novedosa, «significativas»— de la importancia de las ideas previas de los alumnos, en un sentido más amplio que el de los conocimientos previos, al margen del alineamiento o desacuerdo con los supuestos constructivistas. No obstante, la visión de las «pruebas iniciales», como instrumento prodigioso y en cuya elaboración no se advierten problemas especiales, visión que refleja cierto simplismo sobre el mismo concepto de ideas previas, exige un análisis crítico, que podría tener como uno de sus ejes la existencia de un fenómeno de mitificación de las ideas previas.

Las dificultades del modelo constructivista en el trabajo práctico del aula han sido reconocidas por autores defensores del constructivismo, como describe Noddings (1990, 17), para quien existe una disparidad entre la «potencia de los métodos constructivistas en situaciones de uno-a-uno» y la necesidad de «economías instruccionales» en las «condiciones del aula».

De una forma más específica, los problemas para actuar sobre las ideas previas son constatados, desde el mismo enfoque constructivista, por autores como Arcavi y Shoenfeld (1992, 331).

La fetichización de las ideas previas quizás entronque con los indicios de que, tanto el constructivismo psicológico, individual, como el constructivismo social, presentan una mitificación,

cuyas causas y objetivos ideológicos requieren ser investigados, del papel del individuo en su propia conformación cognitiva (y social), haciéndolo único responsable de su propio devenir (en el constructivismo psicológico) o corresponsable, con una corresponsabilidad aceptada y asumida (en el constructivismo social). Tanto el mito del hombre producto de sí mismo, como la sobrevaloración de la negociación consensual, ocultan toda una serie de fenómenos sociales de explotación, opresión, imposición y marginación, a los que se quiere presentar como propias opciones de los individuos. En ocasiones puede parecer negociación y consenso lo que simplemente es resultado de una adaptación a condiciones impuestas, adaptación que puede llegar en el campo de la enseñanza a la adopción por parte de algunos alumnos de «estrategias para el fracaso» escolar (Holt, 1964, citado por Novak y Gowin, 1984, 6). Incluso aspectos tan graves como los estragos de las drogas entre la población (joven y menos joven), quizás puedan analizarse en esa perspectiva autodestructiva vinculada con una «estrategia para el fracaso».

La mitificación del papel del individuo, propia del constructivismo, tendría, en esta perspectiva, su correlato educativo en la mitificación de las ideas previas de los alumnos; estas ideas previas, al ser fundamental o únicamente un producto del propio alumno, si acaso matizadas en un proceso negociador, constituirían la base del «conocimiento», expresarían, globalmente, convicciones arraigadas y resultarían escasamente modelables desde el exterior, al menos por mecanismos no «negociadores».

La controversia acerca de los distintos paradigmas epistemológicos y sus consecuencias educativas constituye un elemento positivo y dinamizador del progreso en la comprensión de los procesos de aprendizaje; las posibilidades de debate parecen verse mermadas por una versión degradada, divulgada por el oficialismo administrativo y por algunos sectores académicos, de oportacio-

*En ocasiones puede parecer negociación y consenso lo que simplemente es resultado de una adaptación a condiciones impuestas, adaptación que puede llegar en el campo de la enseñanza a la adopción por parte de algunos alumnos de «estrategias para el fracaso» escolar...*

nes recientes de la investigación educativa, hasta el punto de que esta versión deformada puede constituirse en el principal obstáculo para la difusión misma de las investigaciones realizadas, para su aprovechamiento en el aula y para el fomento del impulso investigador del profesorado.

## **Experimentación sobre algunas ideas previas sobre fracciones: ideas arraigadas e ideas inducidas**

En este estudio resaltamos el carácter relativo del constructo de *ideas previas*, teniendo en cuenta que el carácter *previo* de las mismas depende del momento en que se sitúen y de la perspectiva sobre las mismas que se adopte; lo que para un observador pueden ser ideas previas, o ideas «anteriores», para otro observador, o desde otro punto de vista, pueden considerarse como «resultantes» o posteriores. Así, en esta indagación consideramos como previas las ideas manifestadas por los sujetos investigados en momentos determinados; con ello, en nuestra opinión de forma saludable, la calificación de previas pierde relevancia y tiende a difuminarse, quedando el centro de nuestra atención en las *ideas* manifestadas por los sujetos en determinados momentos. La insistencia sobre el carácter *previo* parece obedecer al establecimiento de etapas (en algunos casos justificadas) cuyos límites, con gran frecuencia, son meros artificios administrativos o el paso de un día a otro (comienzo de un curso, de un trimestre..., inicio de un tema, introducción de un concepto...). Por otra parte, el énfasis en el carácter *previo* de las ideas manifestadas por los alumnos ante determinada prueba, parece obedecer a cierta sacralización de este constructo, que aparecería como punto de partida de la actividad de aprendizaje, punto inicial que carecería de pasado propiamente dicho. Las dificultades de investigación de cómo se han formado las ideas, que en un momento dado aparecen como previas, no deben ser un motivo para negar la existencia del proceso mismo de formación, de tal manera que lo que, de forma unilateral se presenta como *ideas previas* podrían llamarse *ideas resultantes*. Esta unilateralidad supondría la consideración del pasado de las ideas como una indescifrable «caja negra» de características similares a la, con razón, criticada «caja negra» de los procesos internos de los conductistas; esta *caja negra* vendría a unirse con otra zona vedada al conocimiento por parte del constructivismo radical, la «caja negra del universo», exterior al sujeto (Glaserfeld, 1987, 108).

Dentro de esta relativización del carácter *previo* de las ideas en que vamos a centrarnos en este trabajo, nos parece de interés establecer una distinción entre *ideas (previas) arraigadas* e *ideas (previas) superficiales*. Esta

distinción enlaza con los «cinco tipos de reacciones revelados por examen clínico» establecidos por Piaget (1973, 21-41):

Cuando el niño se desinteresa por la pregunta y no es estimulado a ningún esfuerzo de adaptación, responde al azar con lo que primero viene a su cabeza... Llamaremos a esa reacción *respuesta al azar* (llamada por Binet y Simon «le n'importequisme»). Cuando el niño, sin mayor reflexión contesta inventando una respuesta en la que realmente no cree, o en la que cree meramente por el hecho de decirlo, hablamos de *fabular*, cuando el niño hace un esfuerzo para contestar, pero la pregunta produce sugerencias o el niño trata simplemente de satisfacer al examinador sin procurar pensar por sí mismo, usaremos el término de *convicción sugerida*... Cuando el niño contesta después de reflexionar extrayendo su respuesta de los recursos de su propia mente, sin sugerión, aunque la pregunta sea nueva para él, diremos que hay *convicción liberada*..., hablando estrictamente no es ni espontánea ni sugerida... Finalmente, cuando el niño no tiene necesidad de razonar para contestar a la pregunta, pero puede dar una respuesta sin dilación [...] hay *convicción espontánea*... Hay, por lo tanto, convicción espontánea cuando el problema no es nuevo para el niño y cuando la respuesta es el resultado de reflexión original anterior (21-22).

Nuestra concepción de *ideas arraigadas* se corresponde, aproximadamente, con los dos últimos tipos de reacciones señaladas por Piaget, mientras que las *ideas superficiales* se corresponderían, en parte, con los tres primeros tipos. La complejidad de estos fenómenos no permite clasificaciones exhaustivas ni establecer correspondencias estrictas. Así, el mismo Piaget, después de la clasificación anterior excluye de la misma (Piaget, 1973, 22):

...las respuestas influidas por la enseñanza recibida previamente al examen. Esto implica un problema separado y naturalmente muy complejo, que consiste en distinguir entre las respuestas recibidas aquellas que son propias del niño y aquellas que son consecuencia de su entorno adulto.

Las *ideas previas arraigadas* son, desde nuestro punto de vista, aquellas que presentan una relevancia cognitiva como expresión de ideas propias, originales, del alumno o procedentes de un aprendizaje, pero que, en cualquier caso, han adquirido un cierto grado de coherencia y estabilidad llegando a formar parte de un sistema, acaso incipiente, de ideas interconectadas que el sujeto hace suyas. Llamaremos *ideas superficiales*, a las manifestadas por el sujeto sin convicción interior, sin constituir una opinión que sea asumida realmente por el propio sujeto y que presenta rasgos de improvisación, sin apoyo en una argumentación, vivencia u observación consistente. Este tipo de idea *improvisada* puede tener cierto interés desde el punto de vista de diferentes teorías como el psicoanálisis, incluso desde el punto de vista de la enseñanza y del desarrollo científico, donde ocurrencias en apariencia disparatadas pueden resultar aportaciones de interés; en todo caso, su producción y significado constituyen un segundo nivel, quizás prometedor en un futuro, en la investigación de la formación del conocimiento.

*Las ideas previas arraigadas son aquellas que presentan una relevancia cognitiva como expresión de ideas propias, originales, del alumno o procedentes de un aprendizaje, pero que, en cualquier caso, han adquirido un cierto grado de coherencia y estabilidad... Llamaremos ideas superficiales, a las manifestadas por el sujeto sin convicción interior, sin constituir una opinión que sea asumida realmente por el propio sujeto y que presenta rasgos de improvisación, sin apoyo en una argumentación, vivencia u observación consistente.*

En este trabajo nos centraremos en un aspecto particular de las *ideas superficiales*, relativo a que éstas sean inducidas o no por la práctica escolar, lo que da lugar a un tipo de *ideas superficiales directamente inducidas*.

La distinción entre ideas arraigadas e ideas superficiales está dirigida, en esta indagación, hacia el estudio experimental de algunas ideas previas acerca de fracciones, particularmente el empleo de una *estrategia aditiva* o de una *estrategia multiplicativa* en la resolución de problemas de matemáticas a través de fracciones numéricas.

Un precedente interesante de respuestas a problemas enunciados «matemáticamente» que reflejan una adhesión superficial (desde el punto de vista cognitivo, aunque de raíces sociales que pueden ser interesantes) más que una convicción personal o la expresión de ideas previas de carácter específicamente matemático, lo constituye el «problema de la edad del capitán del barco... o de la maestra», en la experiencia realizada por el IREM de Grenoble, (Douady, 1984, 17), con «problemas absurdos».

### **Objetivo de la experimentación**

El objetivo de esta experimentación es la comprobación de la existencia o no de algún tipo de respaldo práctico a la opinión de que, en gran parte, lo que se llama ideas previas, en un sentido idiosincrásico, sobre fracciones, pueden ser objeto de inducción a través de las prácticas escolares. Esta posible inducción será analizada de forma global en este trabajo, aunque la perspectiva de su desglose en una componente cognitiva y en una componente de sometimiento jerárquico, puede ser interesante para estudios posteriores.

Quedan pendientes también, provisionalmente, para estudios posteriores, aspectos de un indudable interés didáctico, y que pueden ser objeto de atención con los datos de esta experimentación, pero a los que sólo nos referiremos ocasionalmente y con intencionali-

dad de promover nuevos trabajos. Entre estos aspectos, que quedan momentáneamente relegados, y que pueden completarse con la revisión realizada por Pitkethly y Hunting (1996), podemos citar la interrelación entre los conceptos y estrategias de resolución de problemas con números enteros y con fracciones (Watanabe, 1995, y Streefland, 1991), la importancia de los «procesos semánticos», y de distintas conceptualizaciones para la resolución de problemas sobre fracciones (Morris y otros, 1993), la repercusión de enfoques conceptuales y procedimentales, respectivamente, sobre el rendimiento, y, finalmente, aspectos didácticos para la mejora de la enseñanza de fracciones (Streefland, 1991 y 1993).

### Hipótesis de la experimentación

La hipótesis principal de este trabajo plantea la existencia de una repercusión significativa de la práctica sistemática de actividades claramente diferenciadas sobre fracciones, sobre la forma de abordar posteriormente ejercicios y problemas sobre este tema. La práctica sistemática de ejercicios resolubles por adición, en un grupo, y de ejercicios resolubles por multiplicación de fracciones, en otro grupo de alumnos, influiría en una mayor utilización del método aditivo o del método multiplicativo respectivamente (acertada o erróneamente) en que se ha sido entrenado. Lo que para un observador desconocedor de los tratamientos proporcionados a los alumnos (y no olvidemos que el período anterior a la prueba «inicial» pertenece a la «caja oscura» del pasado, para algunas concepciones pedagógicas), aparecerían como *ideas previas construidas* por los propios alumnos, resultarían ser productos inducidos o condicionados por las prácticas seguidas, por lo tanto, sin carácter estrictamente personal.

La hipótesis anterior puede considerarse como hipótesis alternativa a la siguiente hipótesis estadística nula  $H_0$  (Christensen, 1988, 99), que presentaría

*La hipótesis principal de este trabajo plantea la existencia de una repercusión significativa de la práctica sistemática de actividades claramente diferenciadas sobre fracciones, sobre la forma de abordar posteriormente ejercicios y problemas sobre este tema.*

dos formulaciones, correspondiente a los efectos de cada uno de los tratamientos:

$$H_0: f(E. ADIT.)_{GR. ADIT.} = f(E. ADIT.)_{GR. MULT.}$$

$$f(E. MULT.)_{GR. ADIT.} = f(E. MULT.)_{GR. MULT.}$$

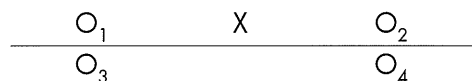
Con  $f$  hemos indicado la frecuencia relativa en la utilización de cada tipo de estrategia en el postest, E. ADIT. designa el empleo de una estrategia aditiva en el postest y E. MULT. de una estrategia multiplicativa; los subíndices GR. ADIT. y GR. MULT. se refieren al grupo «aditivo» y «multiplicativo» respectivamente, según el tratamiento seguido. La hipótesis nula (y la alternativa propuesta) admite también una versión en términos de rendimiento, medible por la media aritmética en la variable correspondiente.

Como nivel de significación para la hipótesis estadística planteada puede establecerse, siguiendo las sugerencias de Box y otros (1978, 109) el nivel 0,05 para quedar «algo convencido» de la realidad de las diferencias entre los dos grupos, y 0,01 para la «plena confianza» en la discrepancia de resultados; dentro del margen de 0,05, especificaremos el grado de significación correspondiente, en vez de limitarnos a «decir que un resultado es o no significativo para algún nivel convencional».

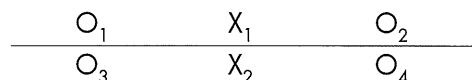
Además de los dos grupos experimentales hemos realizado comparaciones de ambos con un tercer grupo de control, al que no se le ha proporcionado ningún tratamiento específico, grupo que podría quedar incorporado a las fórmulas anteriores de hipótesis estadísticas.

### Tipo de experimentación (diseño)

El diseño experimental emprendido puede considerarse como una variante del tipo de diseño «10» descrito por Campbell y Stanley (1982) de «diseño de grupo de control no equivalente» (p. 93), dentro del grupo de «diseños cuasiexperimentales», caracterizados por la no existencia de una aleatorización formal de los componentes de las muestras estudiadas. Este diseño ha sido esquematizado de la siguiente forma:



La variante introducida en este trabajo consiste en la comparación entre los efectos de dos tratamientos ( $X_1$  y  $X_2$ ), simultáneamente a la comparación de los efectos de los tratamientos con los de ausencia de tratamiento; en este aspecto la idea de grupo de control resulta alterada, por la aparición de dos grupos «experimentales» como se refleja en el siguiente esquema:



El pretest correspondiente ha presentado la deficiencia de estar centrado en la corrección o error de la resolución, más que en las estrategias utilizadas.

La población investigada está formada por los estudiantes de 2.º curso de BUP del IB Tartesos de Camas, Sevilla (turno de «mañana»). La muestra está formada por los tres grupos (GR. ADIT., GR. MULT. y GR. CONTR.) directamente investigados.

La formación de los dos grupos experimentales y del grupo de control no ha sido realizada bajo una aleatorización controlada, sino partiendo de agrupaciones preestablecidas, realizadas de una forma que podríamos llamar informalmente aleatoria.

Cada uno de los tres grupos estudiados está formado por aproximadamente 35 alumnos:

$$n(\text{GR. ADIT.}) = 32$$

$$n(\text{GR. MULT.}) = 33$$

$$n(\text{GR. CONTR.}) = 36$$

### **Variables experimentales**

La variable independiente se identifica con una variable instruccional, cualitativa, que representa los dos tratamientos administrados y la ausencia de tratamiento; adquiere, por tanto, los tres estados diferenciados correspondientes con cada uno de los tres grupos estudiados.

El tratamiento ha consistido en la resolución, durante seis sesiones de clase consecutivas, de un ejercicio por sesión del tipo «de un determinado conjunto, una fracción,  $p$ , tiene la característica  $A$ , y otra fracción,  $q$ , tiene la característica  $B$ , ¿qué fracción de la población tiene las características  $A$  o  $B$ » («grupo aditivo») y del tipo «en un determinado conjunto una fracción,  $p$ , de sus elementos tiene la característica  $A$ , de los cuales la fracción  $q$  tiene la característica  $B$ , ¿qué fracción de la población inicial tiene la característica  $B$ » («grupo multiplicativo»).

El tratamiento se ha producido simultáneamente en los dos grupos experimentales y coincidiendo con el estudio de los elementos básicos de trigonometría, durante el mes de octubre de 1995, estudio en el que es constante el uso de fracciones como valores de las razones trigonométricas.

La variable experimental dependiente, también de tipo cualitativo, con tres estados distintos, representa la adopción de una estrategia aditiva (E. ADIT.), multiplicativa (E. MULT.) u «OTRA E.» al resolver ejercicios del postest (cuadro 1).

Los ejercicios del postest empleados para medir la adopción de una estrategia aditiva o de una multiplicativa, constan de dos prototipos de ejercicios, correspondientes respectivamente a los cuatro primeros ítems y a los dos últimos. Los cuatro primeros ítems presentan para su resolución un mismo tipo de problema, no practicado ante-

*La formación de los dos grupos experimentales y del grupo de control no ha sido realizada bajo una aleatorización controlada, sino partiendo de agrupaciones preestablecidas, realizadas de una forma que podríamos llamar informalmente aleatoria.*

### **POSTEST SOBRE FRACCIONES**

1. En un curso de Bachillerato aprueban la asignatura de Matemáticas los  $\frac{2}{3}$  de los alumnos y en otro curso, que tiene el doble de alumnos que el anteriormente mencionado, aprueban las Matemáticas los  $\frac{5}{8}$ . ¿Qué fracción del total de los alumnos, de los dos cursos conjuntamente, aprueban Matemáticas?
2. En un curso suspenden Matemáticas  $\frac{3}{16}$  de los alumnos y en otro curso con el mismo número de estudiantes suspenden Matemáticas  $\frac{1}{8}$  de los alumnos. ¿Qué fracción del total de los alumnos, de los dos cursos conjuntamente, suspenden Matemáticas?
3. En un curso aprueban la asignatura de Inglés los  $\frac{4}{5}$  de los alumnos y en otro curso distinto también aprueban la asignatura de Inglés los  $\frac{4}{5}$  de los alumnos. ¿Qué fracción del total de los alumnos, de los dos cursos conjuntamente, aprueban Inglés?
4. En un curso de 32 alumnos aprueban las Matemáticas los  $\frac{3}{4}$  de los mismos y en otro curso de 36 alumnos aprueban los  $\frac{4}{9}$ . ¿Qué fracción del total de los alumnos, conjuntamente, aprueban las Matemáticas?
5. En un curso aprueban las Matemáticas los  $\frac{4}{5}$  de los alumnos. De los que aprueban las Matemáticas,  $\frac{5}{8}$  aprueban también Lengua. ¿Qué fracción de los alumnos del curso, en su totalidad, aprueban las dos asignaturas?
6. En un curso tienen una calificación de «insuficiente» en Matemáticas los  $\frac{2}{9}$  de los alumnos y tienen una calificación de «muy deficiente» en Matemáticas  $\frac{1}{6}$  de los alumnos del curso. ¿Qué fracción de los alumnos del curso suspende las Matemáticas (teniendo calificación de «muy deficiente» o de «insuficiente»)?

Cuadro 1

riormente, al menos dentro del proceso de experimentación, en el que es errónea cualquier estrategia simple de mera suma o multiplicación de las fracciones dadas, tipo de problema que se presenta gradualmente de formas más abstractas a menos abstractas, de forma que, progresivamente resulte más fácil para el alumno recurrir a una estrategia conceptual de significado de las fracciones, en cada conjunto dado, y la reconstrucción de la fracción final pedida. En este sentido a través del postest no medimos, al menos inicial y fundamentalmente, lo acertado o erróneo de las soluciones aportadas, sino el empleo o no de determinadas estrategias. Los efectos analizados del tratamiento no se enfocan desde el punto de vista de las mejoras que el mismo pueden suponer, sino que abarca errores producidos por el entrenamiento recibido. El rendimiento, o mejoras en la resolución de ejercicios y problemas, puede considerarse también como variable dependiente de interés, aunque secundaria, en este estudio, respecto al tipo de estrategia utilizado; los valores de la variable rendimiento, medida en el pretest y en el postest, vendrían dados por lo acertado o erróneo del empleo de una u otra estrategia.

Los dos últimos ítems del postest corresponden a cada uno de los modelos integrantes del tratamiento en cada uno de los grupos experimentales respectivamente, de forma que el quinto ítem se limita a ser un ejercicio ya resuelto en varias ocasiones para los alumnos del grupo que han seguido el tratamiento multiplicativo y presenta cierta novedad para el grupo de tratamiento aditivo, mientras que, recíprocamente, el otro sexto ítem presenta alguna novedad para el grupo «multiplicativo», y es repetitivo para el grupo «aditivo».

El que la adopción por parte del alumno de una estrategia «aditiva» o de una estrategia «multiplicativa», pueda considerarse como más o menos inducible por la práctica anterior vendrá determinado por las diferencias mostradas, entre los dos grupos experimentales y

*El rendimiento, o mejoras en la resolución de ejercicios y problemas, puede considerarse también como variable dependiente de interés, aunque secundaria, en este estudio, respecto al tipo de estrategia utilizado...*

el grupo de control, en el más o menos frecuente empleo de las estrategias mencionadas en la prueba del postest, que a falta de nuevos estudios que realicen un mayor control sobre otras variables, parecen atribuibles, en principio, a la distinta actividad realizada.

El resultado de un proceso real de enseñanza es consecuencia de la influencia de un elevado número de variables (Gage, 1978, 32). En la medida en que un experimento intenta detectar la repercusión de una sola variable, o de un pequeño número de ellas, en el aprendizaje, se plantea mantener «a un mínimo la influencia que pudieran ejercer todas o casi todas las posibles variables no pertinentes al problema» (Kerlinger, 1981, 112). Dos vías pueden utilizarse para minimizar la influencia de estas posibles variables «no pertinentes», la aleatorización y el control (Ross, 1988, 527).

La pretensión de optimizar los efectos de las variables experimentales, marginando otros posibles efectos, presenta limitaciones de difícil superación, de tipo práctico y económico, especialmente en las experimentaciones de campo (Kish, 1987, 99; Biddle y Anderson, 1989, 103). Por este motivo, aparte de intentar controlar otras variables influyentes en la variable dependiente, es necesario la repetición de experiencias sobre el mismo tema de investigación, que a través de sus coincidencias y disparidades vayan estabilizando los resultados y sus interpretaciones.

Algunos aspectos experimentales que afectan de forma notable a la validez del experimento han sido objeto de control experimental, como en el caso de las características del profesor que, para evitar diferencias perturbadoras, ha sido la misma persona tanto en el grupo que ha sido entrenado en la estrategia aditiva (G. ADIT.) como en el grupo que ha practicado la estrategia multiplicativa (G. MULT.).

## **Desarrollo de la experimentación. Análisis de los resultados**

El tratamiento de los dos grupos experimentales ha tenido lugar entre los días 16 de octubre de 1995 y el 24 de octubre de 1995, con lo que algunos aspectos madurativos y de historial de los grupos son controlados.

El pretest tiene lugar el primer día de clase del curso. El postest tiene lugar una semana después de terminar el tratamiento experimental (el día 31 de octubre de 1995); el lapso de una semana puede suponer un «enfriamiento» de los efectos del tratamiento, lo que, por un lado, conlleva un amortiguamiento de los efectos que se pretenden detectar y, por otro, supone que los efectos que se manifiesten sean reputados de mayor estabilidad que si el postest se hubiera realizado inmediatamente después del tratamiento.

La experimentación se ha realizado en los dos grupos experimentales (G. ADIT. y G. MULT.) en las clases del mismo profesor; la enseñanza (y la realización de pruebas), en el grupo de control, ha estado a cargo de otra profesora.

La comparación estadística entre los tres grupos estudiados se centra en las frecuencias de utilización de cada una de las estrategias de resolución (aditiva y multiplicativa). Para comparar los distintos resultados utilizamos la *t* de Student, para grupos independientes y, dado el carácter bipolar de las medidas de cada ítem, se utilizarán también comparaciones no paramétricas (Colton, 1979, citado por Gil Cebrián, 1988, 5).

	Grupo Trat. Aditivo			Grupo Trat. Multiplicativo			Grupo sin Tratamiento		
	Estrategia			Estrategia			Estrategia		
	Aditiva	Mult.	Otra	Aditiva	Mult.	Otra	Aditiva	Mult.	Otra
11	26	0	6	8	12	13	6	4	26
12	32	0	0	24	5	4	30	1	5
13	32	0	0	28	2	3	34	1	1
14	18	11	3	12	18	3	8	24	4
15	6	7	19	1	27	5	8	12	16
16	31	0	1	25	3	5	34	1	1
Total	145	18	29	98	67	33	120	43	53

Tabla 1. Frecuencias de cada una de las estrategias de solución en cada ítem por grupos de alumnos

Estrategia cada ítem	Grupo	Kolmogorov-Smirnov		<i>t</i> de Student	
		Z	P	t	P
ADIT 11	ADIT-MULT	1,97	0,001	4,60	0,000
	ADIT-CONTR	2,58	0,000	6,59	0,000
MULT 11	ADIT-MULT	1,70	0,006	-	-
	MULT-CONTR	1,27	0,080	3,05	0,003
ADIT 14	ADIT-CONTR	1,40	0,040	3,03	0,003
MULT 14	ADIT-CONTR	1,33	0,058	-2,77	0,007
ADIT 15	ADIT-MULT	-	-	2,13	0,037
	MULT-CONTR	-	-	-2,54	0,013
MULT 15	ADIT-MULT	2,37	0,000	-5,80	0,000
	MULT-CONTR	1,90	0,001	4,31	0,000
ADIT 16	MULT-CONTR	-	-	-2,25	0,028
ADIT Total	ADIT-MULT	2,12	0,000	6,17	0,000
	ADIT-CONTR	2,25	0,000	5,76	0,000
MULT Total	ADIT-MULT	2,29	0,000	-7,32	0,000
	ADIT-CONTR	1,58	0,013	-3,53	0,001
	MULT-CONTR	1,47	0,027	-3,86	0,000

Tabla 2. Significación, al nivel 0,05, de las diferencias grupales en la utilización de estrategias aditivas y multiplicativas en cada ítem

La tabla 1 recoge las frecuencias de utilización de la estrategia aditiva (E. ADIT.), multiplicativa (E. MULT.) o una estrategia diferente, en cada uno de los grupos examinados, para cada uno de los ítems del postest (cuadro 1), al margen de lo acertado o erróneo de la estrategia.

Esta tabla de frecuencias, a pesar de su escasa elaboración estadística, facilita la «insustituible» «observación de los datos cuidadosamente, inquiriéndolos, críticamente—incluso ingenuamente—» (Leedy, 1985, 182).

En la tabla 1 podemos comprobar que la estrategia multiplicativa de resolución es más empleada, en los seis ítems del postest, en el grupo que recibe tratamiento multiplicativo que en el grupo de tratamiento aditivo. Similar situación se presenta respecto al grupo de control, salvo en el caso del ítem 4, en el que el grupo de tratamiento multiplicativo es superado por el grupo de control. En la comparación entre el grupo de tratamiento aditivo y el de control se observa que la estrategia multiplicativa es más frecuente en el grupo de control, en general de forma ligera, excepto en el caso del ítem 4, en el que la diferencia de frecuencias es más acusada.

Por otra parte, la estrategia aditiva es más utilizada por los alumnos del grupo que ha seguido un tratamiento aditivo que en el grupo que ha tenido un entrenamiento multiplicativo, especialmente en el ítem 1, pero, en general, no es más utilizada en el grupo tratado aditivamente que en el grupo de control (que lo supera ligeramente en tres de los ítems).

Las ideas que la mera observación de la tabla 1 de frecuencias pueda sugerir, reciben una importante matización a través del estudio estadístico del nivel de la significación de las diferencias intergrupales, en el empleo de las estrategias aditiva o multiplicativa, de acuerdo con diferentes criterios de comparación estadística entre grupos «independientes». Los resultados de significación de las diferencias más destacables, próximos o inferiores al grado 0,05, se resumen en la tabla 2.



Para la determinación de la significación de las diferencias entre los grupos estudiados, hemos utilizado el test de Kolmogorov-Smirnov, a pesar de que el número de elementos de las muestras es escaso para este tipo de análisis, y, junto a esta prueba no paramétrica hemos consignado también los resultados de la prueba paramétrica *t* de Student.

La diferencia intergrupar más significativa, en ítems concretos, no agrupados, se produce en el ítem 1, de acuerdo con los dos test de hipótesis empleados, entre el grupo aditivo y el grupo de control en el empleo de la estrategia aditiva, aunque son destacables y significativas otras diferencias en los ítems 4, 5 y 6, y en la consideración global (para el conjunto de los ítems del postest) de las diferencias entre los tres grupos estudiados.

Las diferencias de estrategia en los ítems 5 y 6, de enunciados, cada uno de ellos, del tipo utilizado en los respectivos tratamientos experimentales, se traducen en diferencias en el número de respuestas correctas a dichos ejercicios. Esta dependencia se manifiesta en los niveles de significación recogidos en la tabla 3, referida a la corrección de las respuestas a los ítems 5 y 6, y a la medida global de corrección del postest, así como a la medida de progreso en ejercicios de fracciones (progreso medido por la diferencia entre los resultados del postest y del pretest). Los parámetros resultantes en la tabla 3, sobre corrección de los resultados, son acordes con lo ya señalado respecto a la significación de las diferencias en estrategias empleadas.

Una visión global de los resultados de esta experimentación puede recogerse mediante los diagramas de «caja» correspondientes a las estrategias aditiva y multiplicativa (ESTR. ADIT.; ESTR. MULT.), respectivamente, referidos a los tres grupos estudiados. El empleo de la estrategia aditiva y de la multiplicativa se han contemplado, en los diagramas de caja recogidos en las figuras 1 y 2 de forma global, esto es, referida a todos los ítems del postest.

Solución en ítems	Grupo	Kolmogorov-Smirnov		t de Student	
		Z	P	t	P
1 5	ADIT-MULT	2,43	0,000	-6,27	0,000
	MULT-CONTR			4,13	0,000
1 6	ADIT-MULT	-	-	2,15	0,036
	Postest	-	-	-2,25	0,028
Progreso	ADIT-MULT	-	-	-2,07	0,043

Tabla 3. Diferencias significativas en la corrección de los resultados de los ítems

Los diagramas de las figura 1 y 2 nos permiten la comparación efectiva entre los percentiles escogidos (Cleveland, 1985, 131). Estos percentiles son el 25, 50 (mediana), y 75, indicados, respectivamente, en sentido ascendente, por el lado inferior de la caja rectangular, por el asterisco (mediana) y por el lado superior de la caja. Los segmentos inferior y superior, separan los elementos «extravagantes» y «extremos» (*outliers...*) (Peña, 1992, V. 1, 65).

La figura 1 muestra el efecto de los tratamientos en el empleo de la estrategia aditiva en el postest de los tres grupos; la comparación con el grupo de control nos muestra que la discrepancia con dicho grupo es mayor en el grupo «tratado aditivamente» que en el caso del grupo «tratado multiplicativamente» (el contraste entre los dos grupos tratados experimentalmente es también destacable). Mientras las medianas del grupo de control y del grupo «multiplicativo» alcanzan aproximadamente el

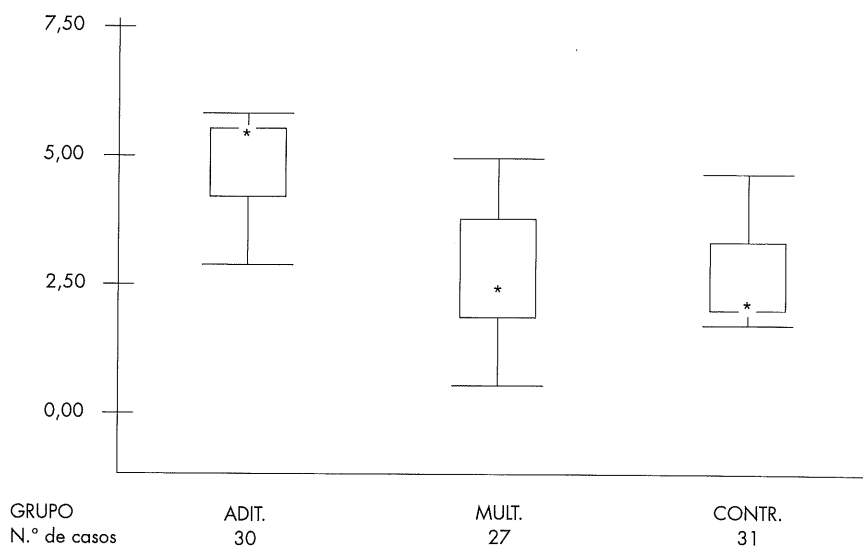


Figura 1. Diagrama de caja de empleo global de la estrategia aditiva en el postest, para los tres grupos estudiados

mismo valor (aunque con una distribución más dispersa en los valores inferiores, en el grupo «multiplicativo»), la mediana del grupo «aditivo» se encuentra a la altura de la línea de separación superior de elementos «extravagantes» (*outliers*) de los otros dos grupos.

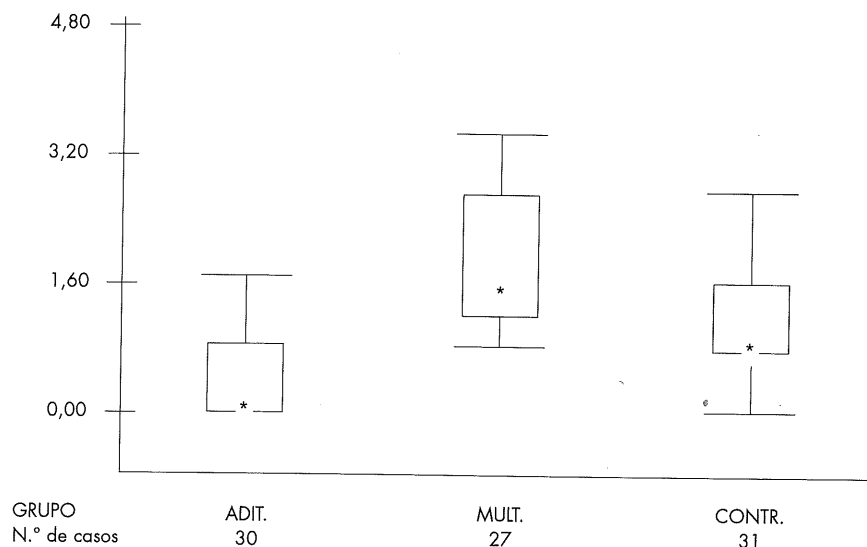


Figura 2. Diagrama de caja de empleo global de la estrategia multiplicativa en el posttest, para los tres grupos estudiados

La figura 2 indica que el grupo que ofrece mayor contraste con el grupo de control lo constituye el grupo «tratado multiplicativamente», que manifiesta también una marcada discrepancia con el grupo «tratado aditivamente». Casi todas las marcas de los percentiles del grupo «multiplicativo» son superiores a las marcas correspondientes de los otros dos grupos comparados.

Las reflexiones anteriores apuntan la posibilidad de que el impacto del tratamiento «multiplicativo» sea mayor que el producido por el tratamiento «aditivo» que intervendría sobre una base anterior de mayor estabilidad que la que correspondería al tratamiento «multiplicativo». Los efectos recogidos en las figuras 1 y 2 no se presentan de forma simétrica por la existencia de «otras» estrategias de resolución, no abordadas en este estudio.

### Conclusiones de la experimentación. Consecuencias y perspectivas de la investigación realizada

El estudio de los resultados obtenidos en la experimentación realizada apoyan parcialmente la hipótesis «alternativa» sustentada en este trabajo, al no confirmar la hipótesis estadística nula objeto de contraste, tanto en su ver-

tiante referida a estrategias utilizadas tras el tratamiento recibido como al rendimiento en la resolución de tareas.

1. La aplicación del tratamiento «multiplicativo», en el grupo GR. MULT., se muestra efectiva como se comprueba a través de los niveles de significación de las diferencias en el ítem 5 (estrategia utilizada y resultado obtenido), un ítem de naturaleza netamente multiplicativa, y en el ítem 1 (estrategia utilizada), así como en otros casos señalados en las tablas comparativas. Las diferencias se constatan entre el grupo «aditivo» (GR. ADIT.) y el grupo «multiplicativo» (GR. MULT.), así como entre este último y el grupo de control.

2. La aplicación del tratamiento aditivo produce resultados parcialmente significativos en la comparación con los grupos no sometidos a ese tratamiento. No se produce, sin embargo, ninguna diferencia significativa referente al rendimiento (corrección de resultados) entre el grupo aditivo y el grupo de control (las diferencias más destacables, y significativas, afectan a las estrategias empleadas en los ítems 1 y 4).

3. El hecho de que la estrategia aditiva, como tratamiento, no haya producido diferencias significativas en el rendimiento, con el grupo de control, sugiere la posibilidad de formular una nueva hipótesis para posteriores estudios, basada en la conjetura de que la estrategia aditiva constituye una *idea previa* más arraigada en los estudiantes que la estrategia multiplicativa.

La errónea estrategia aditiva simple (suma de las dos fracciones), utilizada para hallar la fracción global correspondiente a una situación en que se conocen dos fracciones referidas a distintos subconjuntos del global, podría basarse en una traslación de la acertada estrategia utilizada con números enteros, consistente en la suma de los números enteros correspondientes para hallar el número de elementos de la unión de dos conjuntos, cuando éstos son disjuntos, no ampliable automáticamente a los números racionales.

*El estudio de los resultados obtenidos en la experimentación realizada apoyan parcialmente la hipótesis «alternativa» sustentada en este trabajo, al no confirmar la hipótesis estadística nula objeto de contraste...*

4. Las diferencias en el impacto de los dos tratamientos aplicados y la mayor o menor pervivencia de hábitos o de ideas de resolución apoyan el planteamiento de este trabajo en cuanto a la conveniencia de distinguir entre ideas previas con cierto nivel de arraigo e ideas inducidas, o incluso improvisadas, tendentes a salir de la situación (mediante procedimientos aún oscuros o recurriendo al azar).

5. Los resultados de esta experimentación no contradicen las reticencias mostradas en la justificación de la misma, respecto al paradigma constructivista en educación, o al menos respecto a algunas de las formulaciones, acaso superficiales, triunfantes como caracterización del constructivismo, entre ellas la negación de la posibilidad de transmisión del conocimiento y, por lo tanto, de su enseñanza y la mitificación de las ideas previas, en todas sus manifestaciones, como elementos personales idiosincrásicos.

Podría objetarse que las conclusiones alcanzadas no hacen sino confirmar lo obvio, lo que es innegable desde el mero «sentido común»; aunque esta objeción no es desdeñable, se debe llamar la atención sobre las pretensiones de la «revolución constructivista», de oponerse a una concepción «tradicional» del conocimiento y del aprendizaje que, hasta ahora, se había considerado «obvia» y de «sentido común».

6. En el terreno de la práctica docente, si los resultados obtenidos en este trabajo no fueran refutados por posteriores investigaciones, perderían fuerza las instrucciones y recomendaciones para que al inicio de cada tema se investiguen, con cierta formalidad exterior (pruebas, cuestionarios...) y bajo un enfoque simplista, las ideas previas de los alumnos. La realización de investigaciones sobre las ideas de los alumnos y su relevancia facilitadora u obstaculizadora del aprendizaje, se revela como una tarea compleja, abordable, en nuestra opinión, por los practicantes de la enseñanza, pero sobre la base de un importante esfuerzo y reflexión. Junto a

*En cualquier caso,  
estas conclusiones  
son resultados  
muy limitados  
que necesitan  
de nuevas  
investigaciones,  
sobre el mismo  
fenómeno  
concreto  
estudiado  
y otros distintos,  
que puedan  
enriquecerlas  
y darles  
una mayor  
o menor  
verosimilitud.*

los resultados que este tipo de investigaciones, adquirirían cierta revalorización los métodos de *explicación* apoyados en la utilización del *diálogo* con los alumnos y en favorecer la libre expresión de éstos, diálogo a través del cual pueden manifestarse, de manera informal, pero valiosa, las opiniones, ideas y aportaciones de los alumnos. De hecho, el diálogo es una de las vías fundamentales en la investigación, por parte de autores constructivistas, de las ideas previas de un sujeto o de un número reducido de ellos (estudio de casos, tutoría individual...); aunque las condiciones del aula no permiten extender el método del diálogo con la misma profundidad con que puede realizarse a nivel individual, el principio puede ser mantenido, sin antagonismo con el llamado método «transmisivo».

En cualquier caso, estas conclusiones son resultados muy limitados que necesitan de nuevas investigaciones, sobre el mismo fenómeno concreto estudiado y otros distintos, que puedan enriquecerlas y darles una mayor o menor verosimilitud.

## Referencias bibliográficas

- ARCAVI, A. y A. H. SHOENFELD (1992): «Mathematics Tutoring through a Constructivist Lens: The Challenges of Sense-Making», *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 11, n.º 4, 321-335.
- BIDDLE, B. J. y D. S. ANDERSON (1989): «Teoría, métodos, conocimiento e investigación sobre la enseñanza», en M. C. WITTRICK (ed.), *La investigación de la enseñanza*, Paidós-MEC, Barcelona, 93-148.
- BOX, G. E. P., W. G. HUNTER y J. S. HUNTER (1978): *Statics for Experimenters. An Introduction to Design, Data Analysis, and Model Building*, John Wiley & Sons, New York.
- CAMPBELL, D. T. y J. C. STANLEY (1982): *Diseños experimentales y cuasiexperimentales en la investigación social*, Amorrortu, Buenos Aires.
- CLEVELAND, W. S. (1985): *The elements of graphing data*, Wadsworth, Monterey, California.
- COLTON, Th. (1979): *Estadística en medicina*, Salvat, Barcelona.
- COMENIUS, J. A. (1907): *The great Didactic*, Adam and Charles Black, London.
- COOK, T. D. y D. T. CAMPBELL (1979): *Quasi-Experimentation. Design & Analysis Issues for Field Settings*, Houghton Mifflin Company, Boston.
- CHRISTENSEN, L. B. (1988): *Experimental Methodology*, Allyn and Bacon, Boston & London.
- DOUADY, R. (~1984): «De la didactique des mathématiques a l'heure actuelle», *Cahier de didactique des mathématiques*, n.º 6 (IREM, Université Paris VII).
- GAGE, N. L. (1978): *The scientific basis of the art of teaching*, Rand McNally, Chicago.
- GLASERSFELD, E. von (1987): *Wissen, Sprache und Wirklichkeit. Arbeiten zum radikalen Konstruktivismus*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden.

- GIL CEBRIÁN, J. (1988): *Estadística no paramétrica. Teoría y programas comentados en BASIC para ordenadores personales IBM y PC compatibles*, RA-MA, Madrid.
- GIL PÉREZ, D. (1994): «Diez años de investigación en didáctica de las Ciencias», *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 12 n.º 2, 154-164.
- HASEMAN, K. (1988): «Conceptions «alternatives» des élèves, conflits conceptuels et leur importance pour le processus d'apprentissage des mathématiques», en *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*. Textes réunis et présentés par C. Laborde. La pensée sauvage, Paris, 149-159.
- HOLT, J. (1964, 1969): *How Children Fail*, Penguin Books, Harmondsworth, Middlesex.
- I.R.E.M. de Grenoble (sin fecha): *Quel est l'age du Capitaine?*, Bulletin APMEP, n.º 323.
- JIMÉNEZ, E., I. SOLANO y N. MARÍN (1994): «Problemas de terminología en estudios realizados acerca de "lo que el alumno sabe" sobre Ciencias», *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 12, n.º 2, 235-245.
- KERLINGER, F. N. (1981): *Enfoque conceptual de la investigación del Comportamiento*, Nueva Editorial Interamericana, México.
- KISH, L. (1987): *Statistical Design for Research*, John Wiley & Sons, New York.
- KOLSTAD, R. y otros (1993): «Improving the Teaching of Fractions», *Reading Improvement*, vol. 30, n.º 3, 180-183.
- LEEDY, P. D. (1985): *Practical Research, Planning and Design*, Macmillan P. C., New York.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1989): *Diseño Curricular Base. Educación Secundaria Obligatoria*, 2 vols., MEC, Madrid.
- MORRIS, A. (1995): «Meaningful Instruction in Fractions: Implementing a Theory in a Low-Achieving Mathematics Classroom», *Focus on Learning Problems in Mathematics*, vol. 17, n.º 3, 16-40.
- NODDINGS, N. (1990): «Constructivism in Mathematics Education», en R. B. DAVIS, C. A. MAHER y N. NODDINGS, *Constructivist Views on the Teaching of Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia.
- NOVAK, J. D. y D. B. GOWIN (1984): *Learning how to learn*, Cambridge University Press, Cambridge & London.
- PEÑA SÁNCHEZ DE RIVERA (1992): *Estadística. Modelos y métodos*, 2 vols., Alianza, Madrid.
- PESTALOZZI (1927): *Canto del Cisne*, Ediciones de la «lectura», Madrid.
- PIAGET, J. (1973): *The Child's Conception of the World*, Paladin, St Albans.
- PITKETHLY, A. y R. HUNTING (1996): «A review of recent research in the area of initial fraction concepts», *Educational Studies in Mathematics*, vol. 30, n.º 1, 5-38.
- POZO, J. I. y otros (1991): «Conocimientos previos y aprendizaje escolar», *Cuadernos de Pedagogía*, N.º 188, 12-14.
- ROSS, K. N. (1988): «Scientific Research Procedures», en J. P. KEEVES (ed.), *Educational Research, Methodology, and Measurement: An International Handbook*, Pergamon Press, Oxford, 527-537.
- STREEFLAND, L. (1991): *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- STREEFLAND, L. (1993): «The Design of a Mathematics Course. A Theoretical Reflection», *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 25, n.º 1-2, 109-135.
- THORNDIKE, E. L. (1922): *The Psychology of Arithmetic*, The Macmillan Company, New York.
- WATANABE, T. (1995): «Coordination of Units and Understanding of Simple Fractions: Case Studies», *Mathematics Education Research Journal*, Vol. 7, n.º 2, 160-175.

**Alberto Martínez**  
IES Tartesos  
Camas (Sevilla)



N.º 167. Ocho amigos hacen un viaje de 12 días, y gastan 2.688 ptas. Pasados estos días, 3 de ellos siguen el viaje durante 8 días más. ¿Cuántas pesetas gastan éstos últimos?

$$\frac{2688}{8} \times 3 = 1008$$

$$\frac{1008}{12} \times 8 = 672.$$

R.: Gastarán 672 ptas.