SUMA 28
junio 1998, pp. 37-52

Sesgos en el razonamiento probabilístico y efectos de la instrucción estadística elemental

César Sáenz Castro

ARTÍCULOS

En este artículo presentamos una investigación sobre el razonamiento probabilístico de estudiantes recién ingresados en la universidad. El trabajo se enmarca teóricamente en el paradigma de heurísticos y sesgos (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982) de tradición muy fecunda en el campo del pensamiento probabilístico. Además estudiamos los efectos de la enseñanza estadística que recibieron estos estudiantes en la enseñanza secundaria. Consideramos que de los resultados de la investigación se derivan ideas muy útiles para establecer un nuevo modelo de enseñanza de las probabilidades en la educación secundaria.

CONSIDERA, querido lector, la letra R. ¿Es más probable que aparezca en la primera o en la tercera posición de una palabra que la contenga?

La respuesta estadística a esta pregunta, que se basa en un recuento de palabras y en la comparación de dos frecuencias, es que la tercera posición es la más probable. Sin embargo, la gran mayoría de personas a las que se les propuso esta cuestión, respondieron que la posición más probable era la primera. ¿A qué se debe esta discrepancia?

Utilizando tareas y cuestiones como la anterior, Kahneman, Slovic y Tversky (1982) reunieron una amplia evidencia acerca del hecho de que las personas, enfrentadas a ciertas situaciones que exigen juicios y decisiones de tipo probabilístico, no emplean los conceptos y leyes matemáticas de la probabilidad y la estadística como, por ejemplo, la ley de los grandes números, el principio de regresión a la media o el concepto de tamaño muestral.

Estos autores defienden que las personas, en este tipo de situaciones, usan diversas estrategias de razonamiento no estadísticas. Estas estrategias, o heurísticos, que se adquieren a través de las experiencias de la vida cotidiana, tienen un valor funcional y práctico que las hace persistentes y sistemáticas. El problema es que, en ciertas circunstancias, pueden impedir o sesgar la aplicación de los conceptos y leyes matemáticas del azar.

Por ejemplo, las personas enfrentadas a la cuestión anterior emplean, según Tversky y Kahneman (1973), el heurístico de accesibilidad: estiman la frecuencia o probabilidad de un suceso por la facilidad de recuerdo o memorización de ejemplos de dicho suceso. Estiman que son más frecuentes las palabras que empiezan con la letra R porque son más fáciles de generar o traer a la memoria que las palabras que tienen una R en la tercera posición. Se ha desarrollado una abundante investigación sobre estos heurísticos. Kahneman y Tversky (1972) y Shaughnessy (1992), entre otros, han trabajado sobre el heurístico de representatividad: la gente tiende a estimar la probabilidad de un suceso de acuerdo con lo representativo que resulta de algún aspecto de su población de partida. Por ejemplo, ante la cuestión: «Jugando en la lotería primitiva, Luis ha escogido los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 y Pedro los números 36, 2, 17, 33, 8, 26. ¿Quién tiene más posibilidades de ganar?», una mayoría de personas piensan que Pedro porque su secuencia es más representativa de lo que es una secuencia aleatoria que la de Luis.

Tversky y Kahneman (1981) definen el heurístico de aversión al riesgo para explicar por qué la gente no utiliza el principio estadístico de utilidad esperada en situaciones como la siguiente: «¿Qué prefieres ganar 10.000 pts. seguras o participar en un juego de cara y cruz donde si sale cara ganas 21.000 pts. y si sale cruz no ganas nada?». Según el principio de maximización de la utilidad esperada se debería jugar, pero la mayoría de personas dicen preferir las 10.000 pts. seguras. Más vale pájaro en mano que ciento volando.

Hogarth (1987) presta mucha atención al heurístico determinista o causal que tiene su origen en la primacía del pensamiento causal sobre el pensamiento probabilista. Este heurístico explicaría, por ejemplo, la dificultad que tienen las personas, incluso instruidas en estadística, para distinguir la correlación entre dos variables (concepto estadístico) de una relación de causa-efecto (concepto lógico-mecánico).

La investigación que se describe a continuación se enmarca dentro de la teoría de Kahneman y Tversky (conocida como el paradigma de heurísticos y sesgos) y tiene tres objetivos fundamentales:

- Analizar la presencia en sujetos universitarios de los sesgos estadísticos fundamentales documentados en la literatura que acabamos de citar.
- Estudiar el uso de las reglas y leyes de la teoría de probabilidades, en versiones formales o intuitivas de las mismas, por parte de los mismos sujetos. Se quiere analizar la coexistencia de estos heurísticos estadísticos con los heurísticos no estadísticos y en qué circunstancias aparecen unos u otros. Dicho con otras palabras, queremos analizar la influencia del contenido de la tarea en la estrategia de solución adoptada.
- Investigar la influencia que sobre el razonamiento estadístico tiene la instrucción probabilística inicial que se imparte a los estudiantes españoles en la secundaria. Es de esperar que esta instrucción proporcione al alumno técnicas elementales de cálculo probabilístico que le permitan disminuir el recurso a los heurísticos no estadísticos, pero no se espera la solución correcta de los problemas que tienen una mayor demanda cognitiva.

La investigación que se describe a continuación se enmarca dentro de la teoría de Kahneman y Tversky (conocida como el paradigma de heurísticos y sesgos) y tiene tres objetivos fundamentales...

En cuanto a la metodología de investigación, se han introducido diversas modificaciones en relación a la que usualmente se sigue en el paradigma de heurísticos y sesgos. En cada problema, los sujetos tienen que elegir una respuesta de tres que se le proporcionan y deben explicar o hacer los cálculos que justifican su elección. De las tres posibles respuestas que se proporcionan para cada problema, una de ellas refleja directamente un sesgo del razonamiento probabilístico, otra refleja la contestación correcta desde el punto de vista de la teoría de probabilidades y la tercera sirve para cerrar el abanico de todas las respuestas posibles o en algunos casos refleja un sesgo alternativo al principal.

En línea con el enfoque de Fong, Krantz y Nisbett (1986) y de Shaughnessy (1992), realizamos una caracterización de las concepciones estocásticas de los sujetos que consideramos útil para describir los resultados de la investigación. En concreto, para calificar cada problema se desarrolló un sistema de codificación de 3 puntos:

- *Una calificación de 1*, significa que la respuesta elegida junto con la explicación dada por el sujeto, se clasifica en la *categoría de respuesta no estadística* o respuesta enteramente sesgada. El sujeto refleja el uso del heurístico no estadístico definido *a priori*, no sólo en la elección que hace de la respuesta sino también en su explicación, donde no aparece ningún concepto o principio estadístico y sí manifestaciones del sesgo. Para dar esta calificación a una respuesta se utilizan los siguientes indicadores: prevalencia de un modelo determinístico, causalidad abusiva, presencia de la estrategia conocida como el enfoque del resultado, uso de heurísticos no estadísticos de juicio, respuestas basadas fundamentalmente en la experiencia concreta del sujeto y antinormativas.
- *Una calificación de 2*, significa que la respuesta y justificación dadas se

clasifica en la *categoría de respuesta pobremente estadística.* El sujeto en su respuesta, o bien hace alguna mención de conceptos o leyes estadísticas aunque de manera incompleta o incorrecta, o bien usa a la vez heurísticos estadísticos y no estadísticos. Como indicadores se utilizan: manifestaciones que muestran cierta comprensión del azar y de los sucesos aleatorios, intento de aplicación de modelos normativos a tareas simples distinguiéndolos de las creencias intuitivas, rastros de lenguaje formal del azar, intento de utilizar el concepto de probabilidad como proporción y las leyes elementales de cálculo probabilístico.

- *Una calificación de 3,* significa que la respuesta y su justificación se clasifica en la *categoría de buena respuesta estadística.* El sujeto en su respuesta hace un uso apropiado de los conceptos y leyes estadísticas y realiza cálculos probabilísticos correctos. Como indicadores se utilizan: comprensión en profundidad de algunos modelos de azar matemáticos (clásico y frecuencial, en concreto), habilidad para comparar y contrastar varios modelos de azar, uso adecuado del lenguaje, habilidad para seleccionar y aplicar el concepto y/o el cálculo normativo apropiado.

En el cuadro1 se presenta este sistema de codificación aplicado a cada uno de los diez problemas. Para que un sujeto sea calificado en un problema determinado no sólo tiene que escoger una de las opciones sino que debe explicar, mediante cálculo o razonamiento verbal, su elección. Las razones de exigir al sujeto una explicación de la selección de respuesta que hace en cada problema y de establecer un sistema de codificación como el descrito, son las siguientes:

Los heurísticos son constructos teóricos mediante los cuales el investigador explica el razonamiento probabilístico del sujeto; si éste elige la respuesta que encierra un determinado sesgo frente a la respuesta que es correcta desde el punto de vista formal, el investigador determina que el sujeto razona según el heurístico que genera ese sesgo o error de juicio. Nos parece interesante detectar en las justificaciones de los sujetos pruebas o indicios de la existencia de tales constructos teóricos. Por otra parte, y partiendo de la hipótesis de que en el razonamiento de las personas coexisten procedimientos estadísticos y no estadísticos y que unos u otros se elicitan en función de diferencias intelectuales de los individuos pero también en función de las características de la tarea, no se puede establecer una dicotomía entre pensamiento sesgado y pensamiento correcto porque presenta un escenario demasiado simple y esquemático del pensamiento estadístico. El sistema de codificación propuesto es más flexible y permite categorizar respuestas que muestran la coexistencia de elementos formales e intuitivos en el razonamiento probabilístico.

> *Se eligieron cuatro tipos de sesgos dentro del amplio catálogo que ofrece la investigación en este campo: representatividad, accesibilidad, determinismo y aversión al riesgo.*

En cuanto a la estructura de la prueba, seleccionamos los problemas no sólo en función de que su contenido provoque algún tipo de sesgo (tal como se hace en la mayoría de las investigaciones reseñadas en la literatura) sino también en función del contenido probabilístico formal que subyace en ellos; es decir se tuvieron en cuenta dos variables para seleccionar los problemas:

a) Tipo de sesgo que elicitan. Se eligieron cuatro tipos de sesgos dentro del amplio catálogo que ofrece la investigación en este campo: *representatividad, accesibilidad, determinismo* y *aversión al riesgo.* Los dos primeros por la importancia que tienen en el razonamiento probabilístico, en concreto, por el papel que desempeñan en el procesamiento selectivo de la información, que según Evans (1982) es la causa fundamental de sesgos en el razonamiento.

Por su parte, el sesgo determinista tiene una gran importancia en la enseñanza. El sistema educativo entrena el pensamiento causal, introduciendo desde los primeros años de escolarización el método de la física newtoniana como paradigma de la metodología científica. El alumno va construyendo una concepción del mundo determinista y causal que si bien es superior al conocimiento vulgar de las experiencias cotidianas, puede impedir el desarrollo del pensamiento sobre el azar y la incertidumbre, sobre todo si la ciencia estadística se enseña tardía y escasamente.

Por último, la aversión al riesgo es un sesgo muy estudiado en la teoría de la decisión conductual (Tversky y Kahneman, 1981) pero en la presente investigación lo analizamos en relación al sesgo que puede introducir en la aplicación de conceptos básicos estadísticos, como el de esperanza matemática de una distribución.

b) Tipo de contenido estadístico. En relación a esta variable los problemas se pueden agrupar en dos clases: La

SISTEMA DE CODIFICACIÓN SEGUIDO PARA CATEGORIZAR LAS RESPUESTAS A CADA PROBLEMA DEL EXPERIMENTO 1 EN TRES CATEGORÍAS

Categoría 1: respuestas no estadísticas; respuestas sesgadas.

Categoría 2: respuestas pobremente estadísticas.

Categoría 3: respuestas estadísticas formalmente correctas.

En cada problema esta categorización se concreta del siguiente modo:

Problema 1

Categoría 1: respuestas a) o b) en cuya explicación hay una percepción selectiva de la situación; se basan en las formas de los cuadros y en el procesamiento de la información se refleja el sesgo de accesibilidad en cuanto que «da la sensación» de que en el cuadro A hay más caminos que en el B.

Categoría 2: respuestas a), b) o c) que se basan en un cálculo combinatorio incompleto o incorrecto.

Categoría 3: respuestas c) que realizan explícitamente el cálculo correcto.

Problema 2

Categoría 1: respuestas a) o c) que se basan en explicaciones causales y no hay ninguna referencia a la regularidad estadística que refleja el enunciado.

Categoría 2: respuestas b) que se eligen por exclusión de las otras. Respuestas a), b) o c) que muestran la coexistencia de un pensamiento fuertemente causal con el reconocimiento de una regularidad estadística en la situación.

Categoría 3: respuestas b) que usan explícita y correctamente el principio de regresión a la media aunque no mencionen este término.

Problema 3

Categoría 1: respuestas a) que se justifican en base al heurístico de la representatividad: la secuencia b) es muy poco probable porque es muy rara, nada representativa del fenómeno «lanzar una moneda al aire», obtener tantas caras seguidas

Categoría 2: respuestas c) que añaden explicaciones incorrectas o incompletas a formulaciones intuitivas de la ley de los grandes números y del concepto de independencia estadística. Por ejemplo, hay una utilización abusiva del principio de equiprobabilidad y así se escoge c) porque «en toda situación regida por el azar, los sucesos son siempre equiprobables, siempre tienen la misma probabilidad».

Categoría 3: respuestas c) que hacen uso explícito y correcto de las leyes formales implicadas (la ley de los grandes números y el principio de independencia); respuestas c) con el cálculo probabilístico correcto: $p(a)=p(b)-=(1/2)^6=1/64$

Problema 4

Categoría 1: respuestas a) que reflejan un razonamiento basado en lo llamativo del dato específico del 80% de identificaciones correctas de la víctima y sin ninguna utilización de las probabilidades previas; respuestas c) que reflejan un razonamiento determinista basado en la creencia sin fisuras en la declaración de la victima.

Categoría 2: respuestas a), b) o c) que se basan en un cálculo incorrecto pero que utilizan las probabilidades previas además del dato del 80%.

Categoría 3: respuestas b) que realizan los cálculos probabilísticos correctos, correspondientes a la Regla de Bayes aunque no mencionen este nombre.

Problemas 5 y 8

Categoría 1: respuestas b) que se justifican por lo raro e improbables que son esos sucesos y que no incluyen ningún tipo de cálculo probabilístico.

Categoría 2: respuestas a), b) o c) con cálculos incompletos.

Categoría 3: respuestas c) que añaden los cálculos probabilísticos correctos.

Problema 6

Categoría 1: respuestas a) que se justifican por la aversión al riesgo que supone la segunda salida: respuestas b) que se justifican por la preferencia por el riesgo de esta salida; respuestas c) que se eligen por indiferencia ante lo poco atractivas que resultan las dos salidas propuestas.

Cuadro 1

Categoría 2: respuestas a), b) o c) que reflejan un cálculo incorrecto de la utilidad esperada.

Categoría 3: respuestas c) que suponen un cálculo correcto de la utilidad esperada, aunque no utilicen este término.

Problema 7

Categoría 1: respuestas b) que reflejan el uso del heurístico de representatividad, en su forma de «ley de los pequeños números»: cualquier muestra, por pequeña que sea, ha de tener los mismos parámetros que la población de la que procede.

Categoría 2: respuestas b) o c) que reflejan una mala aplicación de la Ley de Laplace o un cálculo incorrecto, del tipo (1/2)(1/2)(1/2).

Categoría 3: respuestas a) que realizan correctamente los cálculos correspondientes a la Distribución Binomial, aunque no se mencione este nombre.

Problema 9

Categoría 1: respuestas a) que muestran un sesgo de accesibilidad en el recuento selectivo de todas las posibilidades del experimento aleatorio compuesto; reducen el espacio muestral del experimento a dos sucesos equiprobables: «extracción de la carta (roja, roja)» y «extracción de la carta (roja, negra)».

Categoría 2: respuestas a) o c) que hacen un recuento más completo de las posibilidades pero todavía incompleto.

Categoría 3: respuestas b) en donde se realiza un diagrama completo de todas las posibilidades de la situación.

Problema 10

Categoría 1: respuestas c) que reflejan el sesgo de representatividad, en su forma de «ley de los pequeños números»; las dos muestras son igualmente representativas de la población de personas nacidas en el mundo.

Categoría 2: respuestas c) que reflejan la coexistencia del sesgo de representatividad con una cierta consideración del tamaño de las muestras; respuestas a) que reflejan una mala aplicación del concepto de tamaño muestral.

Categoría 3: respuestas b) que reflejan una correcta aplicación del concepto de tamaño muestral.

Cuadro 1 (cont.)

primera clase está compuesta por los problemas cuya solución supone la *comprensión y aplicación* de un *concepto o ley probabilística básica*, como la ley de los grandes números, el principio de regresión o el concepto de tamaño muestral. La segunda clase está compuesta por los problemas cuya solución supone el *dominio* de las técnicas elementales del *cálculo probabilístico*, como las leyes de la multiplicación y suma de probabilidades, la regla de Bayes o la ley binomial. Hemos introducido un problema de cálculo combinatorio porque la combinatoria proporciona recursos y herramientas esenciales en la resolución de problemas probabilísticos.

Nos ha parecido interesante cruzar las dos variables, sobre todo estudiar la influencia de los heurísticos en el cálculo probabilístico. De la revisión de las investigaciones en el campo se desprende que se ha prestado poca atención a esta cuestión; sin embargo, y si el sistema computacional humano es limitado, es necesario conocer el influjo de estrategias intuitivas de razonamiento (en definitiva, «atajos computacionales») en la realización de cálculos probabilísticos elementales.

La prueba consistió en contestar a un cuestionario de 10 problemas, seleccionados con los criterios ya señalados y cuyos enunciados figuran en la discusión de los resultados.

Método

Sujetos: La prueba se aplicó de forma individual a 93 estudiantes de la Universidad Autónoma de Madrid: 66 alumnos de 1.° de Ciencias Matemáticas, 17 de 1.° de Ciencias Biológicas y 10 de Geografía e Historia. 46 de esos estudiantes habían estudiado la teoría elemental de probabilidades y otros 47 no.

Procedimiento: La prueba consistió en contestar a un cuestionario de 10 problemas, seleccionados con los criterios ya señalados y cuyos enunciados figuran en la discusión de los resultados. En las instrucciones se les indicó a los sujetos que se trataba de una prueba de contenido probabilístico pero que no se pretendía conocer cuánto sabían de teoría de probabilidades sino conocer la dificultad de aplicación de ciertos conceptos y leyes matemáticas. En la tabla 1 se pueden observar los 10 problemas clasificados en relación a las dos variables:

	Comprensión leyes estadísticas	Cálculo probabilístico
Determinismo	2	4
Representatividad	3, 10	5, 7, 8
Accesibilidad	9	1
Aversión al riesgo		6

Tabla 1

Resultados y discusión

Vamos a analizar los resultados en relación a los tres objetivos de la investigación:

En relación a los dos primeros objetivos

En la tabla 2 se reflejan los resultados obtenidos en cuanto a los porcentajes de calificaciones 1, 2 y 3. Como hemos dicho anteriormente, se califica con un 1 la respuesta no estadística, con un 2 la respuesta pobremente estadística y con un 3 la respuesta correcta según las leyes de la teoría de probabilidades

	Porcentaje categoría 1	Porcentaje categoría 2	Porcentaje categoría 3
TOTAL	**62,06**	**31,24**	**6,70**
Problema 1	61,0	25,6	13,4
Problema 2	91,2	8,8	0,0
Problema 3	28,44	61,4	10,2
Problema 4	69,1	29,4	1,5
Problema 5	49,4	34,2	16,5
Problema 6	65,8	31,6	2,6
Problema 7	79,0	19,8	1,2
Problema 8	28,2	56,5	15,3
Problema 9	95,0	5,0	0,0
Problema 10	69,0	21,1	9,9

Tabla 2

Como puede observarse, aproximadamente el 62% de las respuestas dadas fueron clasificadas en la categoría de respuestas no estadísticas, el 31% en la categoría de respuestas pobremente estadísticas y sólo el 7% en la categoría de buenas respuestas estadísticas. Estos datos confirman de forma global la fuerte presencia de sesgos y errores de razonamiento y cálculo probabilístico en la muestra de universitarios españoles y la notable ausencia de principios normativos consolidados; nuestros estudiantes recién ingresados en la universidad exhiben tanto concepciones no-estadísticas como concepciones estadísticas ingenuas. Pasemos ahora a un estudio por bloques de tareas atendiendo a la clasificación de la tabla 1.

...aproximadamente el 62% de las respuestas dadas fueron clasificadas en la categoría de respuestas no estadísticas, el 31% en la categoría de respuestas pobremente estadísticas y sólo el 7% en la categoría de buenas respuestas estadísticas.

a) Analizando los problemas 2, 3, 9 y 10 que no exigen cálculos sino la comprensión e interpretación de leyes probabilísticas fundamentales, se puede observar la interacción que existe entre esas leyes y los heurísticos no estadísticos que parecen estar presentes:

Problema 2

En un curso de formación de pilotos se siguió la siguiente estrategia: se premiaba al piloto que hacía un buen aterrizaje y se castigaba al que lo hacía mal. Los instructores de vuelo observaron que los pilotos premiados solían hacerlo peor en el siguiente vuelo y los castigados solían hacerlo mejor ¿Podrías explicar este fenómeno?

a) Es una casualidad: podría haber sucedido lo contrario.

b) Es un fenómeno que se puede explicar por las leyes estadísticas. (*)

c) Es una cuestión de motivación: el castigo es más eficaz que el premio.

(Se marca con un asterisco la respuesta que se considera correcta).

	Problema 2
Categoría 1 (%)	91,2
Categoría 2 (%)	8,8
Categoría 3 (%)	0,0

El 91% de las respuestas mostraron un pensamiento absolutamente determinista y causal sin ningún tipo de factor estadístico. Las respuestas reflejan un esquema causa-efecto, en donde la motivación es la causa del fenómeno observado; incluso, ante el rechazo afectivo que supone valorar más el castigo que el premio como refuerzo a una conducta, algunos sujetos prefieren atribuir a la pura casualidad lo sucedido, sin ninguna mención a la regularidad estadística que se desprende del enunciado.

Sólo un 9% de las respuestas recogen esta regularidad estadística y seleccionan la respuesta: «es un fenómeno que se puede explicar por las leyes estadísticas», aunque sus explicaciones no hacen referencia explícita al principio de regresión a la media; son explicaciones del tipo «parece que hay una regularidad estadística pero puede ser casualidad».

Problema 3

Estamos tirando una moneda al aire muchas veces. ¿Qué secuencia tiene más probabilidad de obtenerse?:

a) *CXXCXC*

b) *CCCCXC*

c) *Tienen la misma probabilidad de ocurrir. (*)*

	Problema 3
Categoría 1 (%)	28,44
Categoría 2 (%)	61,4
Categoría 3 (%)	10,2

Este problema es el que arroja una proporción de categoría 1 más baja. Sólo el 28% de las respuestas escogen la opción a), justificando su elección con una explicación que refleja claramente el sesgo de representatividad: la secuencia CCCCXC es menos probable porque no es normal que en el lanzamiento de una moneda al aire salgan tantas caras seguidas.

La mayoría de los sujetos, el 72% restante, escogen la opción c) pero sólo un 10% dan una explicación correcta en términos de la ley de los grandes números y del concepto de independencia estadística; incluso algunos de estos últimos sujetos hacen el cálculo correcto de la probabilidad de ocurrencia de las secuencias:

$$p(a) = p(b) = (1/2)^6 = 1/64.$$

Un 61% de las respuestas reflejan la coexistencia de reglas formales y sesgos y aunque escogen la opción c) reconocen que la secuencia CXXCXC es más «normal», es más «creíble» que la CCCCXC. Algunos sujetos resuelven el dilema mediante la falacia de admitir que «en el fondo, todos los sucesos aleatorios tienen igual probabilidad». Frente a los fenómenos determinísticos que se pueden predecir, los fenómenos aleatorios son impredecibles y no se puede establecer ningún orden o jerarquía entre ellos. En este sentido parecen considerar que las explicaciones en términos probabilísticos son de rango científico inferior a las explicaciones causales.

Algunos sujetos resuelven el dilema [problema 3] mediante la falacia de admitir que «en el fondo, todos los sucesos aleatorios tienen igual probabilidad».

Problema 9

Se dispone de tres cartas: una de ellas es negra por ambas caras, otra roja por ambas caras y la tercera tiene una cara roja y la otra negra. Se meten las cartas en un sombrero y una mano inocente extrae una de ellas de la que se puede ver sólo una de las caras. Supongamos que es roja.

Un jugador te ofrece apostar cierta suma de dinero contra la misma cantidad de su parte, apostando él a favor de la carta roja-roja ¿Te parece una apuesta equitativa y limpia, donde los dos tengáis las mismas posibilidades de ganar?

a) *Sí.*

b) *No. (*)*

c) *No tengo datos para opinar.*

	Problema 9
Categoría 1 (%)	95,0
Categoría 2 (%)	5,0
Categoría 3 (%)	0,0

Este problema es el que recibe más calificaciones 1. El 95% de los sujetos contestan que la apuesta es equitativa en función de que establecen un inventario de posibilidades incompleto. Para ellos sólo existen dos posibilidades: carta (roja, roja) o carta (roja, negra). No es fácil para el sistema computacional humano acceder al árbol completo de todas las posibilidades y tomar en consideración que, en la situación planteada, no sólo hay un experimento aleatorio que consiste en extraer del sombrero una de las tres cartas, sino que hay un segundo experimento aleatorio que consiste en hacer visible el anverso o el reverso de la carta extraída. En efecto, el suceso condicionante no es la carta, es la cara de la carta:

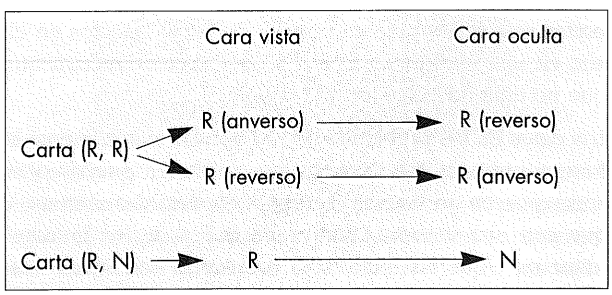

Gráfico 1

Por tanto, la probabilidad de que la carta sea la (R, R) es 2/3 y la probabilidad de que sea la (R, N) es 1/3.

Hay un 5% de sujetos que intentan hacer un diagrama que recoja todas las posibilidades pero ninguno llega a hacerlo completo. Por ejemplo, un sujeto llega a la conclusión de que la probabilidad de (R, R) es el doble de la probabilidad de (R, N) y entonces asigna 1/2 a la probabilidad de (R, R) y 1/4 a la probabilidad de (R, N).

Problema 10

En una cierta ciudad hay dos maternidades. En la mayor nacen aproximadamente 45 bebés por día y en la menor 15. Como sabes, más o menos el 50% de los recién nacidos son niños aunque el porcentaje exacto de niños varía de un día a otro. Durante un año entero cada maternidad registró los días en los que más del 60% de los recién nacidos fueron niños. ¿Qué maternidad registró más días de éstos?:

a) La mayor.

b) La menor. (*)

c) Las dos maternidades registraron aproximadamente el mismo número de días.

	Problema 10
Categoría 1 (%)	69,0
Categoría 2 (%)	21,1
Categoría 3 (%)	9,9

El 69% de las respuestas reflejan una completa insensibilidad al tamaño de las muestras y al escoger la opción c) reconocen, de modo explícito, que las dos muestras son iguales a efectos de predecir la proporción niños/niñas que nacen en ellos. Un 21% de las respuestas tienen en cuenta el tamaño de las muestras pero lo hacen de modo incorrecto, sobre todo por incomprensión o mala interpretación del enunciado. Sólo el 10% de los sujetos hacen correcto uso del concepto de tamaño muestral.

Hay que subrayar la dificultad de comprensión del enunciado de este problema que es un clásico en la investigación realizada en el marco del paradigma de heurísticos y sesgos (Kahneman y otros, 1982). Algunos alumnos interpretan que se les pide el número de bebés nacidos en el año en una y otra maternidad y otros dicen directamente que no entienden lo que se les pide.

Los datos de los problemas 3 y 10 apoyan parcialmente a Fong y otros (1986). Estos autores sostienen que las personas poseen un sistema de reglas inferenciales abstractas que son una versión intuitiva de la ley de los grandes números y que las utilizan en problemas cotidianos. Las respuestas al problema 3 reflejan la existencia de un procedimiento estadístico, de una intuición de la la ley de los grandes números que impide que los sujetos caigan en el sesgo de representatividad a pesar de las tentaciones que suministra el enunciado. Sin embargo, esa misma versión intuitiva de la ley de los grandes números no aparece en el problema 10 y los sujetos caen, en una gran mayoría, en el sesgo de representatividad.

Los datos de los problemas 3 y 10 apoyan parcialmente a Fong y otros (1986). Estos autores sostienen que las personas poseen un sistema de reglas inferenciales abstractas que son una versión intuitiva de la ley de los grandes números y que las utilizan en problemas cotidianos.

Los problemas 2 y 9 son muy difíciles. Presentan situaciones muy engañosas que impiden la emergencia de posibles reglas estadísticas. Las respuestas al problema 2 no reflejan la existencia de una versión intuitiva del principio de regresión a la media. En el problema 9 aparece con fuerza la falacia de que la información dada sobre el color de una cara de la carta extraída no cambia la equiprobabilidad de las cartas salvo que la probabilidad se debe aplicar al espacio muestral reducido de las dos cartas posibles.

b) En relación a los problemas que exigen cálculo probabilístico, hay datos que conviene analizar:

Problema 5

¿Qué probabilidad es menor:

A) la probabilidad de que una persona elegida aleatoriamente cumpla años un día determinado (por ejemplo el 25 de agosto) o

B) la probabilidad de que dos personas elegidas aleatoriamente cumplan años el mismo día?

a) Es menor A.

b) Es menor B.

c) Son iguales. (*)

Problema 8

¿Qué probabilidad es menor:

A) la probabilidad de conseguir un seis al lanzar un dado

B) la probabilidad de conseguir dobletes (el mismo número en los dos dados) al lanzar dos dados?

a) La A.

b) La B.

c) Son iguales. (*)

	Problema 5
Categoría 1 (%)	49,4
Categoría 2 (%)	34,2
Categoría 3 (%)	16,5

	Problema 8
Categoría 1 (%)	28,2
Categoría 2 (%)	56,5
Categoría 3 (%)	15,3

Estos dos problemas son, desde el punto de vista de su estructura matemática, isomorfos; se pueden resolver, entre otros métodos, aplicando las leyes de la suma y multiplicación de probabilidades exactamente de la misma manera en los dos problemas. Sin embargo, son muy distintos si se hace un análisis superficial de los mismos; en el problema 5 aparece un suceso «raro», un suceso que las personas consideran muy improbable, como es el de que dos individuos, elegidos al azar, cumplan años el mismo día; en el problema 8 se plantea una situación más familiar para el sujeto, como es el juego con dados.

Pues bien, así como en el problema 5 la mitad de los sujetos se dejan llevar por el sesgo de representatividad y juzgan como menos probable el suceso «raro» porque es representativo de suceso muy improbable, en el problema 8 sólo el 28% de los sujetos explican que es menos probable el suceso de conseguir dobletes que el de conseguir «un seis» porque es muy raro conseguir dobletes («casi nunca sale un doble seis al tirar dos dados»). Se manifiesta el carácter contingente de los juicios probabilísticos: el contenido de la tarea influye en la estrategia de solución adoptada.

Sin embargo, la proporción de respuestas totalmente correctas es similar en ambos problemas, alrededor de un 16%; esto se explica en función de que, aunque el problema 5 elicita más fuertemente el sesgo, sin embargo a la hora de resolverlo correctamente es necesario aplicar los mismos cálculos a uno y a otro:

Estos dos problemas [5 y 8] son, desde el punto de vista de su estructura matemática, isomorfos; se pueden resolver, entre otros métodos, aplicando las leyes de la suma y multiplicación de probabilidades exactamente de la misma manera en los dos problemas.

Problema 5:

$$p(a) = 1/365$$

$$p(b) = (1/365)(1/365) + \ldots + (1/365)(1/365) = 1/365$$

Problema 8 :

$$p(a) = 1/6$$

$$p(b) = (1/6)(1/6) + \ldots + (1/6).(1/6) = 1/6$$

En cuanto a las respuestas clasificadas como pobremente estadísticas son las de aquellos sujetos que emplean bien la ley de la multiplicación pero sistemáticamente se olvidan de sumar en las opciones b, tanto del problema 5 como, lo que es más sorprendente, del problema 8. En efecto, en el 8, el árbol de posibilidades parece más accesible, parece intuitivo que hay 6 casos favorables de 36 posibles; sin embargo más de la mitad de los sujetos resuelven el problema 8 así:

$$\text{Probabilidad b} = (1/6)(1/6) < 1/6 = \text{Probabilidad a}$$

Es bastante llamativo que muy pocos alumnos intentaran utilizar la regla de Laplace para resolver el problema 8 (en el problema 5 no la utilizó ninguno). Parece fácil razonar que hay 36 casos posibles al lanzar dos dados {(1, 1), (1, 2), ... (6, 5), (6, 6)} y sólo 6 casos favorables para conseguir dobletes {(1, 1), (2, 2), ... ,(6, 6)}; por tanto la probabilidad de b) es 6/36. Sin embargo, los alumnos que intentan hacer cálculos normativos (que coinciden con los que estudiaron algo de teoría de probabilidades en el bachillerato) utilizan la suma y la multiplicación de probabilidades. Este hecho puede deberse a que en la instrucción elemental en probabilidades suele insistirse más en ejercicios sencillos de suma y multiplicación de probabilidades y menos en la determinación de los correspondientes espacios muestrales.

Problema 7

¿Cuál es la probabilidad de que entre 6 nacimientos 3 sean mujeres:

a) 20/64 (*)

b) 3/6

c) 1/8

	Problema 7
Categoría 1 (%)	79,0
Categoría 2 (%)	19,8
Categoría 3 (%)	1,2

El problema 7 presenta unas pautas de solución extraordinariamente similares a los problemas 5 y 8: en primer lugar, el sesgo de representatividad también se muestra con mucha fuerza en este problema; el 79% de los sujetos responden que 3/6 es la probabilidad de que nazcan 3 niñas en 6 nacimientos porque en la población nacen tantas niñas como niños; es la «ley de los pequeños números» por la cual una muestra aunque sea pequeña siempre representa las características de la población. Algunos llegan a hacer una interpretación «representativa» de la ley de Laplace:

casos favorables/casos posibles= 3/6.

En segundo lugar, hay un 20% de los sujetos que no se dejan llevar por la representatividad de la situación y hacen un cálculo probabilístico del mismo tipo que el que realizan en los problemas 5 y 8: (1/2)(1/2)(1/2) = 1/8. Realmente éste es el cálculo de la probabilidad de que las 3 personas nacidas en 3 nacimientos sean niñas. Sólo un 1% hace los cálculos correctos, correspondientes a la ley binomial que se muestra como una regla estadística de difícil adquisición, y llega a la solución 20/64.

Problema 4

En una determinada ciudad donde el 90% de los ciudadanos son blancos y un 10% son negros se comete un delito: un hombre es atracado en el centro de la ciudad y afirma que el atracador es negro. Sin embargo, cuando un juzgado que investiga el caso reconstruye varias veces la escena, bajo unas condiciones de iluminación parecidas, la víctima identifica correctamente la raza del asaltante el 80% de las veces. ¿Cuál es la probabilidad de que el asaltante fuera efectivamente negro?

a) 0,80

b) 0,31 (*)

c) 1

	Problema 4
Categoría 1 (%)	69,1
Categoría 2 (%)	29,4
Categoría 3 (%)	1,5

Otra ley estadística que presenta muchos problemas de aplicación es la Regla de Bayes. En el problema 4 se presenta una situación que desde un enfoque estadístico se resuelve como una mera aplicación del teorema de Bayes pero que, en la práctica, no es fácilmente interpretable en términos formales. En muchos trabajos (Kahneman y Tversky, 1972; Shaughnessy, 1983) se explican los errores cometidos en su solución por el sesgo de representatividad que se manifiesta, entre otras formas, como una insensibilidad a las probabilidades previas. En el presente trabajo y siguiendo una propuesta de Hogarth (1987), atribuimos el error sistemático que cometen los sujetos a la prevalencia del pensamiento causal sobre el pensamiento probabilista, sesgo que hemos dado en llamar determinismo: los sujetos sólo admiten como dato esencial para estimar la probabilidad el 80% de aciertos en las identificaciones; es la capacidad de la víctima para hacer identificaciones correctas el único factor que influye en la estimación de la probabilidad.

Otra ley estadística que presenta muchos problemas de aplicación es la Regla de Bayes. En el problema 4 se presenta una situación que desde un enfoque estadístico se resuelve como una mera aplicación del teorema de Bayes pero que, en la práctica, no es fácilmente interpretable en términos formales.

Las explicaciones de los sujetos son congruentes con esta hipótesis: el 69% de las respuestas se han codificado como calificaciones 1 y ahí se recogen todos los sujetos que escogen la solución c) y casi todos de los que eligen la solución a); las justificaciones de todos estos sujetos tienen en común la manifestación de expresiones muy deterministas, que siempre giran alrededor del dato específico de la capacidad de reconocimiento de la victima. Los que escogen la opción c) todavía van más allá en su determinismo: «la probabilidad de que el asaltante sea negro es 1 porque así lo ha dicho la víctima y no tiene por qué engañar», es el tipo de explicación común en ellos.

El 29% de las respuestas se han calificado con un 2 y corresponden a sujetos que han tratado de utilizar las probabilidades previas además del dato del 80%. El cálculo que realizan es 0,8x0,1, es decir multiplican la probabilidad de identificación correcta de ser negro por la probabilidad de encontrarse aleatoriamente con un negro en esa población. Diríamos que están calculando el numerador de la fórmula de Bayes pero les falta el denominador; en todo caso, es una cuestión de «espacio del problema» al desarrollar el diagrama en árbol.

Es interesante la estrategia de «anclaje y ajuste» que realizan a continuación para elegir una solución: se anclan en 0,08 que es el resultado de la anterior operación y a continuación ajustan, unos a 0,8 que es la solución a) y que tiene parecido visual con 0,08 y otros a 0,31 que es el número más bajo de las soluciones propuestas. Esta estrategia recuerda al conflicto reflexión-decisión definido por Borovcnik y Bentz (1991): la reflexión (el cálculo) produce un dato, 0,08, que no corresponde a ninguna de las soluciones ofrecidas y entonces el alumno ha de realizar una nueva operación cognitiva para tomar la decisión.

Además, estos datos pueden arrojar nueva luz sobre el conservadurismo (sesgo establecido por Edwards (1968) al estudiar la cuestión de cómo las personas usan la información que surge de los datos para actualizar una probabilidad *a priori*): si la limitación computacional de las personas les lleva a un cálculo restringido al numerador, la estimación de la probabilidad *a posteriori* siempre será más baja que la que proporcione la Regla de Bayes donde hay un denominador positivo que al ser menor que 1 hace aumentar el cociente.

Problema 6

Imagínate que eres un general rodeado por una fuerza enemiga abrumadora que aniquilará tu ejército de 600 hombres a menos que te decidas por tomar una de las dos posibles vías de escape. Tus espías te dicen que si tomas la primera salida salvarás a 200 soldados, mientras que si te decides por la segunda hay una probabilidad de 1/3 de que los 600 consigan salvarse y una probabilidad de 2/3 de que no lo consiga ninguno. ¿Qué camino eliges?

a) *1ª salida.*

b) *2ª salida.*

c) *cualquiera. (*)*

	Problema 6
Categoría 1 (%)	65,8
Categoría 2 (%)	31,6
Categoría 3 (%)	2,6

Este problema presenta una situación que se puede abordar con el concepto de esperanza matemática desde un enfoque estadístico normativo, o con el concepto de utilidad esperada si lo tratamos como un problema del campo de la teoría matemática de la decisión. Sin embargo, Tversky y Kahneman (1981) han estudiado las soluciones que se dan, de manera sistemática, a problemas semejantes a éste y han establecido que los sujetos estructuran este tipo de situaciones de toma de decisión en base al factor de aversión al riesgo cuando se trata de ganancias y de proclividad al riesgo cuando se trata de pérdidas.

Los datos de la presente investigación no rechazan las anteriores aseveraciones pero con algunos matices importantes. Un 66% de las respuestas han sido calificadas con un 1 porque escogen la primera o segunda salida en base a consideraciones de aversión (la gran mayoría) o de atracción por el riesgo (una minoría). Incluso algunos sujetos escogen la tercera opción de respuesta por el poco atractivo que le comportan las dos primeras; se manifiestan de nuevo explicaciones en términos causales: «depende de la calidad del ejército que se salga con bien de una emboscada». En todo caso, todas estas respuestas tienen en común la ausencia de cualquier regla estadística formal para abordar el problema.

Este problema [6] presenta una situación que se puede abordar con el concepto de esperanza matemática desde un enfoque estadístico normativo, o con el concepto de utilidad esperada si lo tratamos como un problema del campo de la teoría matemática de la decisión.

Un 32% de las respuestas reflejan el intento de cálculos estadísticos pero sin llegar a comprender el concepto de esperanza matemática o de utilidad esperada. Por ejemplo, algunos sujetos hacen la operación (1/3)600 y concluyen que la segunda salida supone la salvación de 200 soldados con probabilidad 1/3 y por tanto es peor que la primera donde se salvan seguros 200 soldados. Está claro que estas personas no sesgan su razonamiento por aversión al riesgo, lo que parece deducirse de la opción que eligen, sino por una mala comprensión del concepto de esperanza matemática o utilidad esperada.

Problema 1

Considera los cuadros A y B

A	B
xxxxxxxx	xx
xxxxxxxx	xx
xxxxxxxx	xx
	xx
	xx
	xx
	xx
	xx
	xx

¿En cuál de los cuadros hay más formas posibles para pasar de la primera fila a la última, sabiendo que desde una x cualquiera de una fila puedes saltar a cualquier x de la fila inmediatamente inferior?

a) *En A.*

b) *En B.*

c) *El mismo número. (*)*

	Problema 1
Categoría 1 (%)	61,0
Categoría 2 (%)	25,6
Categoría 3 (%)	13,4

En este problema, el cálculo combinatorio que proporciona la solución es inmediato ($8^3 = 2^9$) pero sólo lo realizan el 13% de los sujetos. El 61% se deja llevar por la mayor disponibilidad o accesibilidad perceptiva de paso de una x a otra x inferior en la figura de la izquierda respecto a la de la derecha, y juzga que el número total de caminos es mayor en la figura de la izquierda que en la de la derecha. En definitiva, calculan el número total de caminos por la facilidad que tienen de imaginarse caminos concretos en una y otra figura.

El 26% de los sujetos no se dejan llevar por la forma de los cuadros y realizan un cálculo combinatorio que sin embargo es incorrecto. Aparecen algunos errores de cálculo, típicos en la enseñanza no universitaria pero incomprensibles en alumnos universitarios, como el de sumar en vez de multiplicar: 8 + 8 + 8 frente a 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2. Aquí se puede ver una vez más la utilidad de pedir a los sujetos que expliquen la elección de su respuesta. Los que eligen la opción a) pueden guiarse por una ilusión perceptiva o por una estrategia de cálculo equivocada pero las dos vías de razonamiento llevan a la misma respuesta.

Los problemas 1 y 9 muestran que el sesgo de accesibilidad está muy relacionado con el procesamiento selectivo de la información que hacen las personas cuando tienen que resolver un problema; a su vez este procesamiento selectivo tiene que ver no sólo con la facilidad de recuperar o recordar ejemplos (como sucede en las tareas que Tversky y Kahneman proponen para estudiar dicho sesgo) sino también con la facilidad de imaginar todas las posibilidades de una situación.

Para resolver correctamente estos dos problemas, más que realizar cálculos probabilísticos complejos, es necesario utilizar bien el esquema combinatorio, el cual permite establecer el árbol de todas las posibilidades que presenta una determinada situación. Piaget e Inhelder (1951) sostienen que sólo los sujetos que están en el estadio evolutivo de las operaciones formales pueden resolver problemas probabilísticos en cuanto que los esquemas proporcional y combinatorio, esenciales para abordar este tipo de problemas, forman parte de las operaciones formales. Se compartan o no las tesis de los autores ginebrinos, parece claro que el dominio de las técnicas combinatorias es fundamental para resolver muchos problemas del azar. Una de estas técnicas es la de diagramas de árbol que facilita la realización del inventario completo de todos los sucesos asociados a una situación. Sin embargo, esta técnica no es de fácil adquisición y sobre todo, de fácil aplicación en todas las situaciones.

En relación al tercer objetivo

Para evaluarlo es necesario comparar los resultados obtenidos por los sujetos que estudiaron la teoría de probabilidades a un nivel elemental frente a sujetos que no recibieron ningún tipo de instrucción formal en dicha disciplina.

En la tabla 3 se pueden observar las frecuencias (n1, n2, n3) y proporciones (pr1, pr2, pr3) de calificaciones 1, 2 y 3 en cada uno de los dos grupos:

	n1	pr1	n2	pr2	n3	pr3
Total	439	0,62	221	0,31	49	0,07
Con estudios	200	0,55	128	0,35	35	0,10
Sin estudios	239	0,69	93	0,27	14	0,04

Tabla 3

Los sujetos con estudios elementales de teoría de probabilidades, en relación a los sujetos sin ninguna instrucción en dicha teoría, tienen una proporción significativamente menor de calificaciones 1 ($z = -3{,}83 < z_{0{,}005}$) y una proporción significativamente superior de calificaciones 3 ($z = 3{,}14 > z_{0{,}995}$).

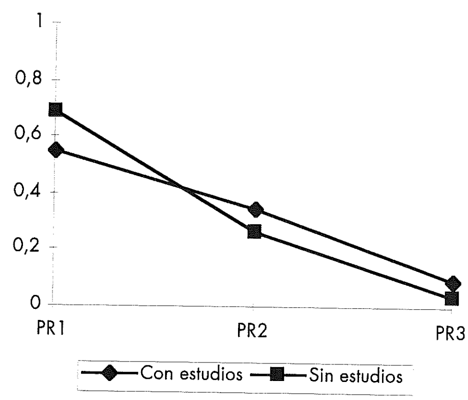

Gráfico 2

Llama, con todo, la atención que el 55% de sus respuestas no muestren ninguna idea, razonamiento o cálculo estadístico y estén gobernadas por procedimientos no estadísticos; y sigue llamando la atención que sólo el 10% de sus respuestas se puedan calificar como totalmente correctas según las reglas formales. Parece deducirse de estos datos que la escasa instrucción en probabilidades que suele darse en el bachillerato, disminuye la necesidad de recurrir a estrategias intuitivas que surgen de la experiencia cotidiana, pero no evita completamente los sesgos y errores a los que pueden conducir estos heurísticos que parecen formar parte de la dotación de recursos cognitivos que todas las personas tienen.

Conviene señalar que el cuestionario se pasó en un contexto académico y que se dijo en las instrucciones que se trataba de una prueba de contenido probabilístico, con lo que se estaba invitando tácitamente a activar los recursos estadísticos de los sujetos que los tuviesen. Sería interesante pasar la prueba en un contexto cotidiano, no académico y tratar de disminuir la terminología probabilística, a fin de comprobar si siguen existiendo diferencias significativas entre los dos grupos, en los sesgos del razonamiento probabilístico.

Lo que no garantiza la instrucción elemental, al menos tal como se imparte actualmente, es un dominio suficiente de las reglas y procedimientos formales; el porcentaje de respuestas correctas en ambos grupos es muy bajo. Más de la tercera parte de las respuestas (35%) de los sujetos instruidos suponen la utilización incorrecta de un concepto o un cálculo estadístico que conocen o la confusión entre leyes probabilísticas formales y estrategias de razonamiento no estadísticas.

Un dato complementario del anterior es que, aunque la gran mayoría de las respuestas de los sujetos no instruidos (69%) suponen un pensamiento sobre el azar regido por estrategias no estadísticas (lo que confirma de nuevo la profunda imbricación de las mismas en la estructura cognitiva de las personas) hay un 27% de respuestas que muestran la existencia de versiones intuitivas de reglas o procedimientos formales en sujetos que nunca estudiaron teoría de probabilidades.

Los datos anteriores parecen apuntar la hipótesis de que en el razonamiento probabilístico de los sujetos (instruidos y no instruidos) coexisten heurísticos no estadísticos y procedimientos formales, al menos versiones intuitivas de los mismos, tal como sostienen Fong y otros (1986); son las características de la tarea las que activan un tipo u otro de recursos.

Se ha realizado el test de la Chi^2 para estudiar en cada uno de los problemas si había relación entre la calificación y la existencia de estudios estadísticos: las únicas diferencias significativas corresponden al problema 2 ($\chi^2_2 = 3{,}96$, $p < 0{,}04$), problema 5 ($\chi^2_2 = 6{,}83$, $p < 0{,}04$) y problema 8 ($\chi^2_2 = 6{,}18$, $p < 0{,}04$).

En la tabla 4 se pueden ver los datos correspondientes a los tres problemas:

	Categoría 1		Categoría 2		Categoría 3	
	No estudios	Sí estudios	No estudios	Sí estudios	No estudios	Sí estudios
Problema 2 (%)	100,0	83,3	0,0	16,7	0,0	0,0
Problema 5 (%)	64,1	35,0	25,6	42,5	10,3	22,5
Problema 8 (%)	40,5	16,3	47,6	65,1	11,9	18,6

Tabla 4

Lo que no garantiza la instrucción elemental, al menos tal como se imparte actualmente, es un dominio suficiente de las reglas y procedimientos formales; el porcentaje de respuestas correctas en ambos grupos es muy bajo.

Los problemas 5 y 8 son matemáticamente equivalentes y requieren las técnicas de cálculo probabilístico más sencillas, como son la suma y la multiplicación de probabilidades; la enseñanza de las probabilidades, aunque sea escasa, proporciona estas técnicas que no son triviales para un novato.

En cuanto al problema 2 conviene observar que no hay ningún estudiante (con instrucción o sin instrucción en probabilidades) que lo resuelva utilizando el principio de regresión a la media, que sería la estrategia adecuada desde una perspectiva estadística. La diferencia entre los sujetos con instrucción y sin instrucción en el problema 2, por tanto, parece radicar en que los sujetos con cultura estadística elemental tienen una representación del mundo menos determinística que los sujetos no instruidos, admiten una intervención del azar en el fenómeno enunciado sin saber muy bien en qué consiste dicha intervención. Las explicaciones de los sujetos que admiten que el fenómeno es de tipo estadístico son tan ambiguas que no se puede descartar que los sujetos escogen la opción estadística porque saben que se trata de un cuestionario probabilístico. Además, esa diferencia no aparece en el problema 4 en donde el pensamiento determinista está presente tanto en sujetos instruidos como no instruidos. Sería necesaria una investigación, centrada en el sesgo causal, para dilucidar la cuestión y desde luego, la utilización de tareas menos engañosas que el ítem 2.

Conclusiones

Tratemos de sistematizar y sintetizar los resultados encontrados en esta investigación. En relación a los tres objetivos que nos marcamos y que hemos descrito en la introducción, queremos subrayar tres características del razonamiento probabilístico de los sujetos que consideramos claves para explicar tanto la existencia de sesgos y errores en su comprensión de los fenómenos aleatorios como el carácter contingente de sus juicios.

En primer lugar, la *prevalencia abusiva del pensamiento causal sobre el pensamiento probabilístico.* Cuando la ciencia reconoce que el mundo no se explica sólo en términos de necesidad sino que hay que incluir también el azar (ahí está, por ejemplo, la teoría de la evolución de Darwin), la concepción puramente determinista de los fenómenos forma parte fundamental del sistema de creencias de nuestros universitarios (por lo menos los recién ingresados) y como tal dificulta el florecimiento del pensamiento aleatorio.

Esta concepción determinista se manifiesta, tal como se había previsto, en los problemas 2 y 4. Ha quedado claro un procesamiento selectivo de la información que desprecia datos importantes que hay en las situaciones planteadas, como las probabilidades previas (problema 4) o una regularidad estadística (problema 2). En ambos casos las explicaciones de los sujetos reflejan una representación de los problemas en términos de causa-efecto, o bien porque la cadena causal está presente (problema 2: el premio y el castigo modifican la conducta de los pilotos) o bien porque la cadena causal está ausente (problema 4: no hay relación entre las proporciones de ciudadanos blancos y negros en la ciudad y la probabilidad del suceso de que el atracador sea negro porque la relación se establece entre ese suceso y la capacidad de identificación de la víctima; cuanta mayor sea la capacidad de identificación, mayor será la probabilidad pedida independientemente de las probabilidades previas). Conviene advertir que se trata de dos problemas que encierran conceptos probabilísticos sofisticados (regresión a la media y teorema de Bayes) en un contexto muy engañoso. Por tanto, tenemos que ser prudentes en las conclusiones extraídas a partir de ellos acerca de la preeminencia del pensamiento determinístico-causal.

Sin embargo, el hallazgo más sorprendentes es haber encontrado manifestaciones de este pensamiento en explicaciones de tipo global: por ejemplo, la idea de que toda situación aleatoria se puede convertir en determinística mediante la destreza o pericia (la destreza del general y su ejército en el problema 6) o la idea de que el azar es caótico y al no poder hablar de causas y efectos no hay posible jerarquización de los sucesos aleatorios (el enunciado de que «todos los sucesos son igualmente probables» en el problema 3).

En primer lugar, la prevalencia abusiva del pensamiento causal sobre el pensamiento probabilístico. [...] En segundo lugar, una habilidad computacional limitada...

En segundo lugar, una *habilidad computacional limitada* que se concreta en los cuatro hallazgos siguientes:

a) Incapacidad de los sujetos para hacer el inventario completo de todas las posibilidades asociadas a una situación. En los problemas 1, 7 y 9 se muestra claramente esta incapacidad, los sujetos tienen dificultades para hacer el diagrama en árbol completo de la tarea correspondiente. Se podría argumentar que el problema 9 («las tres cartas») presenta una situación muy engañosa que confunde a los sujetos y les impide construir una representación del problema que tenga en cuenta la naturaleza compuesta del juego. Sin embargo, el problema 7 y, sobre todo, el problema 1 presentan escenarios menos engañosos y también se manifiestan con fuerza las dificultades combinatorias de los alumnos. Estos resultados son congruentes con la tesis de Piaget e Inhelder (1951) de que la capacidad combinatoria es una destreza de alto nivel en el desarrollo intelectual de la persona.

b) Dificultad de los sujetos para establecer el espacio muestral de ciertos experimentos aleatorios lo cual les lleva a errores de aplicación de la ley de Laplace que es una regla aparentemente sencilla de comprender y utilizar. Así, en los problemas 5 y 8 los sujetos prefieren utilizar las leyes de la suma y la multiplicación de probabilidades en lugar de establecer el espacio muestral correspondiente. En el problema 7, los sujetos se lanzan a aplicar la regla casos favorables/casos posibles, utilizando un espacio muestral equivocado.

c) La ley multiplicativa de las probabilidades parece de más fácil adquisición que la ley aditiva, según los resultados de los problemas 5 y 8. Esto puede estar relacionado con lo dicho en el punto 1), en cuanto que lo difícil para los alumnos es darse cuenta de que en ambos problemas además de una intersección de sucesos (multiplicación de probabilidades) hay también una unión de sucesos (suma de probabilidades). Por ejemplo en el problema 5, el cumpleaños de una persona y el cumpleaños de la otra han de coincidir pero eso puede ser el 1 de Enero o el 2 de Enero o...o el 31 de Diciembre.

d) Los heurísticos de representatividad, accesibilidad y aversión al riesgo, parecen actuar de sustitutos o complementos de las limitadas destrezas de cálculo de los sujetos. Emergen como «atajos computacionales» que reducen el esfuerzo cognitivo en la adquisición y procesamiento de la información. En el problema 7, por ejemplo, la dificultad combinatoria para explicitar el espacio muestral {(VVVVVV) ,......, (VVMMVM), ...(MMMMMM)} y seleccionar los casos favorables (VVVMMM) ,..., (VVMMMV), ..., se compagina con una percepción selectiva de la situación basada en los datos de 6 nacimientos y 3 mujeres que es representativa de la realidad donde aproximadamente el 50% de los nacimientos son mujeres. Incluso los sujetos que «se resisten» a este influjo de la representatividad o similitud de la muestra con la población realizan un cálculo incompleto: $(1/2)(1/2)(1/2)=1/8$ que corresponde a una terna concreta de nacimientos.

En tercer lugar, se manifiesta una *clara dependencia de las características de la tarea*, lo que apoya la hipótesis de la naturaleza contingente de los juicios probabilísticos (Payne, Bettman y Johnson, 1993): el sistema cognitivo humano es adaptativo en su necesidad de comprender, controlar y dominar el entorno. En otras palabras, los sujetos hacen mayor o menor uso de leyes estadísticas con respecto a heurísticos no estadísticos, dependiendo del contexto o contenido del problema.

Este fenómeno se observa muy bien en los problemas 5 y 8. Son dos problemas que tienen una estructura profunda, matemática, equivalente pero tienen una estructura superficial, perceptiva, diferente. En efecto, como hemos tenido ocasión de comprobar al analizar los resultados, los cálculos que hay que realizar para comparar las probabilidades pedidas en ambos problemas son idénticos. Sin embargo, el problema 5 presenta un escenario de clave no probabilística, de reunión de fiesta de cumpleaños, mientras que el problema 8 es un típico ejercicio de teoría de probabilidades además de un juego aleatorio. Pues bien, mientras la mitad de los sujetos razonan en clave no probabilística en el problema 5 sólo la cuarta parte razonan en clave no probabilística en el problema 8. Es un claro ejemplo de razonamiento dependiente del contenido de la tarea.

En tercer lugar, se manifiesta una clara dependencia de las características de la tarea, lo que apoya la hipótesis de la naturaleza contingente de los juicios probabilísticos...

La naturaleza contingente y constructiva del razonamiento probabilístico también se observa en los problemas 3 y 10, en donde hay que aplicar la ley de los grandes números y el concepto de independencia estadística en dos contextos diferentes. En el problema 3 los sujetos utilizan la ley formal (a veces en una formulación primaria e incorrecta) con mayor frecuencia que el heurístico de representatividad, aun tratándose de alumnos no instruidos en probabilidades. Por contra, en el problema 10, el concepto normativo de tamaño muestral no se tiene en cuenta y es el heurístico de representatividad quien domina la solución del problema. Con todo, hemos de subrayar las dificultades de comprensión de este problema que hace que muchos alumnos no entiendan lo que se les está pidiendo. Este es un ejemplo claro de tarea donde la comunicación entre el investigador y el sujeto se hace difícil y, por tanto, las conclusiones han de ser prudentes. En otras investigaciones nuestras (Sáenz, 1995) planteamos este mismo problema con un enunciado más inteligible.

Los tres factores que acabamos de enunciar y que parecen estar en el origen de los sesgos en razonamiento probabilístico, no se modifican sustancialmente con la instrucción, al menos con el tipo y cantidad de enseñanza estadística que se imparte en los niveles anteriores a la universidad de nuestro sistema educativo. Aunque esta instrucción dota al estudiante de algunas herramientas elementales de cálculo estadístico que le permiten recurrir menos a los heurísticos no estadísticos, no impide que el pensamiento del sujeto siga gobernado por un pensamiento causal abusivo, que siga cometiendo errores sistemáticos de cálculo y que su razonamiento se vea afectado por las características de la tarea.

A nuestro juicio, hay varios niveles definitorios de la enseñanza tradicional que fomentan estos sesgos.

La enseñanza tradicional de la ciencia, tratando de comunicar el conocimiento científico que supera el conocimiento vulgar de los alumnos, entroniza el pensamiento newtoniano y explica el mundo en forma de leyes de «obligado cumplimiento», donde el orden causal es el único posible. No puede florecer así la flor delicada del pensamiento estadístico que ofrece un tipo distinto de orden para modelizar la realidad: la regresión, la correlación, la ley de los grandes números introducen orden en el mundo (que ya no es newtoniano sino einsteniano y cuántico) pero no es un orden determinista sino estadístico.

La enseñanza tradicional de la matemática entrena en técnicas de cálculo útiles pero muy insuficientes. Se produce así un anumerismo o analfabetismo matemático que tiene nefastas consecuencias para la capacidad computacional de las personas. Se presta poca atención a estrategias educativas tales como familiarizar a los alumnos con números muy grandes y con números muy pequeños, entrenarlos en técnicas de cálculo combinatorio, y sin embargo, estas estrategias son pre-requisitos básicos para el trabajo con probabilidades.

La enseñanza tradicional de la teoría de probabilidades es lineal en el desarrollo del currículo. El contenido de la disciplina se despliega siguiendo la estructura lógica de la matemática: a partir de los axiomas de Kolmogorov se deducen los diversos teoremas y se realizan ejercicios de aplicación para apuntalar los nuevos conocimientos. No hay conciencia de la naturaleza contingente del razonamiento y por tanto no se consideran distintos enfoques probabilísticos de un mismo problema ni distintos problemas con diferente contenido pero con la misma estructura normativa. Tampoco hay conciencia de diferencias individuales en la comprensión probabilística y todos los alumnos se someten al mismo régimen de enseñanza.

Hemos señalado tres notas definitorias de la enseñanza tradicional que repercuten negativamente en la conducta probabilística de los sujetos y que nos han servido como punto de referencia para la propuesta de un nuevo modelo de enseñanza-aprendizaje. En Sáenz (en prensa) presentamos el diseño y evaluación de dicho modelo que trata de modificar significativamente los sesgos detectados en el pensamiento probabilístico, varios de los cuales hemos mostrado en este trabajo.

La enseñanza tradicional de la matemática entrena en técnicas de cálculo útiles pero muy insuficientes. Se produce así un anumerismo o analfabetismo matemático que tiene nefastas consecuencias para la capacidad computacional de las personas.

César Sáenz
Instituto de Ciencias de la Educación
Universidad Autónoma
Madrid

Referencias

BOROVCNIK, M. y H. J. BENTZ (1991): «Empirical research in understanding probability», en R. KAPADIA y M. BOROVNIK (Eds.), *Chance encounters: Probability in education*, Kluwer, Amsterdam, 73-105.

EDWARDS, W. (1968): «Conservatism in human information procesing», en B. KLEINMUTZ (Ed.), *Formal representation of human judgement*, Wiley, New York, 17-52.

EVANS, J. St. B. T. (1982): «On statistical intuitions and inferential rules. A discusion of Kahneman and Tversky», *Cognition*, 12, 323-326.

FONG, G., D. H. KRANZ y R. NISBETT (1986): «The effects of statistical training in thinking about everyday problems», *Cognitive Psychology*, 18, 253-292.

HOGARTH, R. M. (1987): *Judgement and choice: the psychology of decision*, Wiley, Chichester.

KAHNEMAN, D., P. SLOVIC y A. TVERSKY (Eds.) (1982): *Judgment under uncertainty: heuristics and biases*, Cambridge University Press, Nueva York.

KAHNEMAN, D. y A. TVERSKY (1972): «Subjective probability: a judgement on representativeness», *Cognitive Psychology*, 3, 430-454.

PAYNE, J. W., J. R. BETTMAN, J. R. y E. J. JOHNSON (1993): *The adaptive decision maker*, Cambridge University Press, New York.

PIAGET, J. e B. INHELDER (1951): *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant*, PUF, Paris.

SÁENZ, C. (1995): *Intuición y matemática en el razonamiento y aprendizaje probabilístico*, Ediciones de la Universidad Autónoma, Madrid (tesis doctoral en microficha).

SÁENZ, C. (en prensa): «Teaching probability for conceptual change», *Educational Studies in Mathematics*.

SHAUGHNESSY, J. M. (1983): «Misconceptions of probability: systematic and otherwise: Teaching probability and statistics so as to overcome some misconceptions», en D. R. GREY y otros (Eds.), *Proceedings of the first international conference on teaching statistics*, Teaching Statistics Trust, Sheffield, UK, 784-801.

SHAUGHNESSY, J. M. (1992): «Research in probability and statistics: reflections and directions», en D. A. GROUWS (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, McMillan Publishing, New York, 465-494.

TVERSKY, A. y D. KAHNEMAN, D. (1973): «Availability: a heuristic for judging frequency and probability», *Cognitive Psychology*, 5, 207-232.

TVERSKY, A. y D. KAHNEMAN (1981): «The framing of decisions and the psychology of choice», *Science*, 211, 453-458.