SUMA 28
junio 1998, pp. 31-36

Las curvas mecánicas en la geometría griega. La cuadratriz de Dinóstrato

Víctor Arenzana Hernández

ARTÍCULOS

En la historia de las matemáticas no todas las curvas han sido consideradas dignas de figurar en el reino de la geometría. En la matemática griega había serios recelos con las llamadas curvas mecánicas, generadas por composición de movimientos. En el presente trabajo se expone un ejemplo de curva mecánica: la cuadratriz de Dinóstrato, se muestran las objeciones que el matemático griego Sporos de Nicea aducía por las que la cuadratriz no debía ser considerada curva en sentido geométrico y se traducen a lenguaje analítico esas objeciones, que no son otras que las que genera la noción de límite y la poca eficacia del método geométrico para clasificar distintos tipos de curvas. Prueba de esto es que cuando se adoptaron los métodos analíticos en geometría se pasó de la escasa docena de curvas identificadas por los griegos (contando cónicas, cuadratrices, concoide, etc.) a infinitas aunque sólo sea con las llamadas parábolas de Fermat del tipo $y= x^n$.

LA NOCIÓN de curva en la geometría griega no era igual que la que tenemos actualmente; algunas curvas, de las que hoy en día nadie cuestiona su naturaleza geométrica, despertaban serios recelos a sesudos geómetras. Una de estas curvas fue la cuadratriz de Dinóstrato.

La geometría griega se había planteado una serie de problemas y los había resuelto con el uso de los utensilios permitidos para las construcciones geométricas, la regla y el compás. Con estos instrumentos se podían hacer, geométricamente, la suma, la resta, la multiplicación y la división de magnitudes, así como raíces cuadradas. Las construcciones geométricas griegas podríamos resumirlas en lenguaje actual diciendo que, a partir de una unidad *u* se podían construir números de la forma $a + b\sqrt{n}$, donde *a*, *b* y *n* eran números racionales.

No todos las cuestiones que se planteó la matemática griega se pudieron resolver con las operaciones que permitían realizar la regla y el compás, de hecho, hacia el siglo V a.C. aparecieron una serie de problemas que se resistieron a la resolución con los instrumentos citados; estos problemas, conocidos como los tres problemas clásicos griegos, eran la trisección del ángulo, la duplicación del cubo y la cuadratura del círculo. Más tarde se demostraría que no era posible resolverlos con el uso exclusivo de la regla y el compás. El proceso de demostración de la imposibilidad de la resolución de estos problemas con las condiciones exigidas acabó en 1882 cuando F. Lindemann demostró que π era un número transcendente y que, por consiguiente, no era posible construir, con regla y compás, un cuadrado de la misma área que un círculo y, como consecuencia, el problema de la cuadratura del círculo era irresoluble en los términos planteados por la matemática griega.

No obstante, los tres problemas fueron resueltos por los griegos –como es natural no en la forma exigida–, de diferentes maneras. La duplicación del cubo la solventaron demostrando que su resolución equivalía a intercalar dos medios proporcionales entre *a* y *2a* del modo siguiente:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

que equivale a hallar la abscisa del punto de intersección de las parábolas:

$$x^2 = ay \qquad y^2 = 2ax$$

Para resolver los otros dos problemas clásicos griegos se inventaron algunas curvas, como las anteriores, pero que no se generaban de modo tan sencillo como las cónicas, las cuales eran la intersección de un plano con una superficie cónica. Estas curvas no se podían construir con regla y compás, su generación se producía por combinación de movimientos en el plano. Los griegos las llamaron *curvas mecánicas* entre las que figuraba la llamada *trisectriz o cuadratriz de Dinóstrato* que analizaremos a continuación.

Descartes y las curvas mecánicas

La matemática griega estaba dominada por la geometría y sus métodos. Las operaciones elementales se hacían mediante construcciones geométricas y estas construcciones estaban en la base de sus razonamientos. Para los griegos el hecho de hacer una multiplicación *más aproximada* carecía de sentido y consistiría, en todo caso, en esmerarse al máximo en el dibujo, en la construcción geométrica con la que se realizaba la operación. Con todo, siempre existiría el convencimiento de que la perfección era inalcanzable, pero que el dibujo realizado para resolver un problema nos evocaría la construcción perfecta. En este sentido, es perfectamente aplicable la representación platónica de las ideas mediante el mito de la caverna, según el cual el mundo real con todos sus seres y objetos sería reflejo de otros entes más perfectos que serían las ideas.

Los griegos habían distinguido en la geometría tres tipos de problemas: lineales, planos y sólidos. Los primeros podían resolverse trazando líneas rectas (ecuaciones de primer grado), los problemas planos precisaban para su resolución el uso de alguna cónica (ecuaciones de segundo grado) y los problemas sólidos que necesitaban para su resolución alguna curva especial (combinación de curvas de segundo grado, tercer grado o mayor e incluso curvas transcendentes).

Descartes, al comienzo del libro II de su *Geometría*, al tratar la naturaleza de las líneas curvas, se extrañaba de que los griegos denominaran a unas curvas *geométricas* y a otras *mecánicas*. A las primeras las aceptaban dentro de la geometría, pero las segundas fueron excluidas de ella.

La matemática griega estaba dominada por la geometría y sus métodos. Las operaciones elementales se hacían mediante construcciones geométricas y estas construcciones estaban en la base de sus razonamientos.

La razón de la exclusión de la geometría de las curvas mecánicas no sería porque, al ser líneas más complejas, fuera necesaria mayor precisión de trazado o aparatos más sofisticados que no alcanzaran a dar la exactitud requerida, puesto que la verdadera perfección de la geometría griega se lograba en el pensamiento, esto es, en la claridad del método para llevar a cabo las construcciones.

Tampoco se puede decir que los griegos admitieran únicamente curvas que pudieran construirse con regla y compás, que eran los aparatos que figuran implícitamente en los postulados primero y tercero de los *Elementos* de Euclides [Postulado 1: Desde cada punto a cualquier otro se puede trazar una línea recta. Postulado 2: En cualquier centro se puede trazar una circunferencia de radio arbitrario], ya que admitieron las secciones cónicas que se generaban por la intersección de una superficie cónica con un plano.

Descartes opinaba que si se entendía por geométrico lo que era exacto y por mecánico lo que no lo era, y si la geometría era la ciencia que estudiaba y enseñaba a conocer la medida de todos los cuerpos, no había razón para excluir de la geometría el estudio de curvas más complejas con tal de que se pudieran imaginar generadas por un movimiento o por composición de varios. Este modo de pensar cartesiano supuso un avance en la configuración del concepto de curva en geometría y amplió la noción de curva de los matemáticos griegos.

La cuadratriz de Dinóstrato

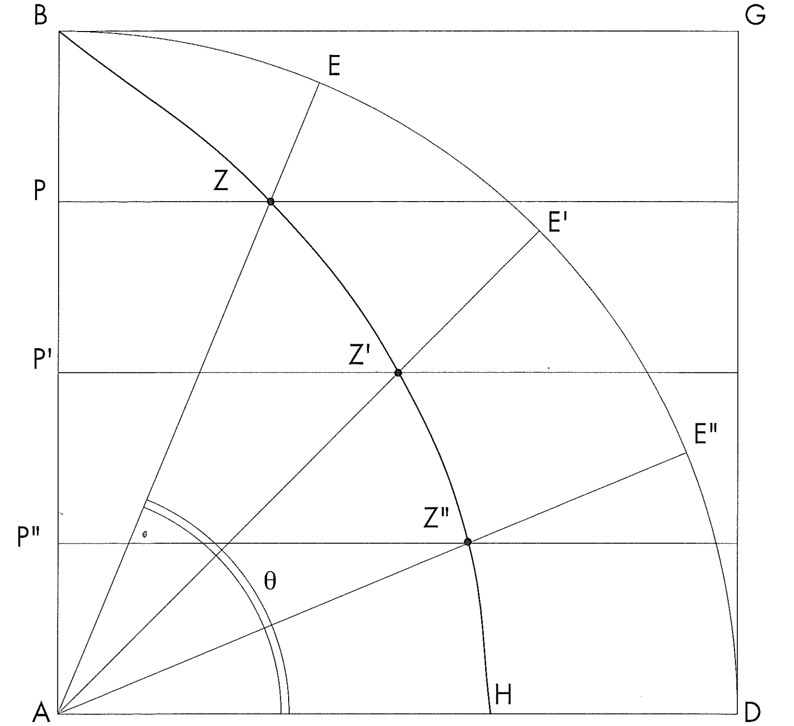
La geometría griega no admitió en su seno una curva mecánica llamada trisectriz o cuadratriz de Dinóstrato. La historia de la invención de esta curva es algo dudosa. Algunos historiadores dicen que la imaginó Dinóstrato, hermano de Menecmo, hacia el año 390 a. C. para resolver el problema de la división del ángulo en cualquier número de partes y para solucionar la cuadratura del círculo. Pero Proclo (412-485) en sus *Comentarios a los Elementos de Euclides*, Libro II, Cap. IV, atribuyó a Hippias la invención de esta curva. El matemático griego Pappus, hacia el 300 de nuestra era, estudió en el libro IV de sus *Colecciones Matemáticas* las propiedades de la cuadratriz, que llamó de Dinóstrato, sin entrar en la discusión de quien fue su descubridor. La crítica actual duda sobre la autoría de los dos matemáticos griegos y se piensa que fuera invención de algún matemático griego anterior.

La trisectriz o cuadratriz de Dinóstrato la describe Pappus de la siguiente forma:

Dado un cuadrado ABGD describamos con centro A el arco BED. La recta BG, manteniéndose constantemente paralela a la AD arrastre al punto B en su recorrido sobre AB, además de que esta gire con velocidad uniforme en el ángulo que forman AB y AD, es decir el punto B recorrerá el arco BED en el mismo tiempo que la recta BG se traslada a lo largo de BA. Es evidente que las rectas AB y BG coincidirán simultáneamente con la AD y, como consecuencia dichas rectas AB y BG coincidirán en un punto constantemente transportado por ellas, el cual describirá un línea cóncava en la misma dirección, tal como la BZH, en el espacio comprendido entre las rectas AB y AD y el arco BED.

Siguiendo la misma nomenclatura de las figuras que Pappus podemos decir que dado el cuadrado ABGD se llama cuadratriz al lugar geométrico de los puntos de intersección de las recta BG que se desplaza con movimiento uniforme hasta AD con las rectas AE que giran en torno a A desde AB a AD, también con movimiento uniforme cuando AB y BG comienzan a la vez el movimiento y emplean el mismo tiempo en el recorrido.

La gráfica es:



El dibujo de la gráfica se hace determinando una serie de puntos. A modo de ejemplo determinemos dos de ellos:

a) Cuando BG ha recorrido la cuarta parte del camino el punto B habrá llegado a P, a su vez, AB habrá recorrido la cuarta parte y B habrá llegado E. La intersección de las rectas PQ y AE es un punto Z de la cuadratriz.

b) Cuando BG ha recorrido la mitad del camino el punto B habrá llegado a P', a su vez, AB habrá recorrido la mitad y B habrá llegado E'. La intersección de las rectas P'Q' y AE' es un punto Z' de la cuadratriz.

Sucesivamente se van determinando otros puntos que nos proporcionan la forma de la curva.

Para hallar la ecuación de esta curva tomaremos como eje de abscisas positivo AD y a AB como eje de coordenadas con origen en A. Los móviles P y E recorren en tiempos iguales fracciones de espacio iguales, por lo tanto:

$$\frac{DE}{BD} = \frac{AP}{AB} \quad \Rightarrow \quad \frac{AB\,\theta}{AB\,\frac{\pi}{2}} = \frac{AP}{AB}$$

haciendo AB = 1 se tiene:

$$AP = \frac{2\theta}{\pi}$$

Ecuación en coordenadas polares

Para hallar la ecuación en polares $z(\rho, \theta)$ observemos que se verifica

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{AP}{\rho}$$

de donde:

$$\rho = \frac{2\theta}{\pi}\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

que es la ecuación buscada.

Ecuación en paramétricas

Teniendo en cuenta, que

$$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\operatorname{sen}\theta$$

se tiene:

$$x = \frac{2\theta}{\pi}\operatorname{ctg}\theta$$

$$y = \frac{2\theta}{\pi}$$

Ecuación cartesiana

Partiendo de

$$\rho = \frac{2\theta}{\pi}\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

y teniendo en cuenta que

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad y \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

se obtiene:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2}{\pi}\operatorname{arcsen}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}$$

de donde:

$$\frac{\pi y}{2} = \operatorname{arcsen}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad o \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \operatorname{sen}\frac{\pi y}{2}$$

Se pueden hacer una serie de observaciones sobre la construcción de la cuadratriz de Dinóstrato. En primer lugar hacer notar que, para dibujar la curva, los griegos no disponían de un aparato trazador que la describiera con un movimiento continuo. Pappus recogió en *Colecciones Matemáticas* la crítica que Sporos, geómetra de finales del siglo II de nuestra era, hizo de esta curva. Una de las críticas de Sporos se basaba en que en la definición de esa curva aparecía como hipótesis lo que lo que se quería demostrar. La base de la crítica de Sporos se puede resumir así:

Si dos puntos empiezan a moverse a partir de la posición B ¿Cómo puede determinarse la velocidad constante que ha de llevar cada móvil para llegar al mismo tiempo, uno a A siguiendo la recta AB y el otro a D siguiendo el arco BED, si no se conoce previamente la razón entre el segmento AB y el arco BED, que es, precisamente lo que se quiere conocer?

En realidad para generar esa curva por el movimiento de dos puntos es preciso imprimir a los mismos unas velocidades determinadas previamente. Para que los móviles lleguen simultáneamente es necesario que la razón de las velocidades de los movimientos que generan la curva sea igual a la razón entre las longitudes del segmento AB la del arco BED y como esta razón es desconocida, opina Sporos de Nicea que sólo se podría hacer que llegaran simultáneamente de casualidad y la curva no se puede trazar exactamente, tal y como lo exige el rigor geométrico.

...los griegos no disponían de un aparato trazador que la describiera con un movimiento continuo.

Otra pega que pone el geómetra de Nicea a esta curva para que esté bien definida en todos sus puntos es que:

El punto extremo de la curva, esto es, el punto en que la curva corta a la recta AB, que algunos lo empleaban para cuadrar el círculo, no está bien determinado geométricamente.

La razón es que, en el límite, la intersección de la recta BG, al desplazarse paralelamente hasta AD, con la recta AB, al girar un recto en torno a A, es todo el segmento AD y el punto de intersección no está definido en esa posición límite. Con esta crítica lo que Sporos ponía de manifiesto era un problema de cálculo de límites. Para determinar el punto de intersección de la curva con AD se debe calcular el límite cuando θ tiende a 0

$$x = \lim_{\theta\to 0}\frac{2}{\pi}\frac{\theta}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{2}{\pi}$$

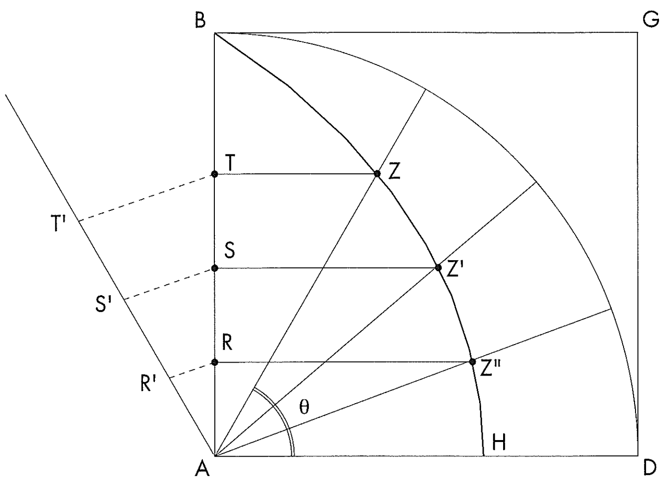
$$y = \lim_{\theta\to 0}\frac{2\theta}{\pi} = 0$$

con lo que admitían que el punto extremo H era el $(2/\pi, 0)$. A partir de su abscisa se podía calcular π y utilizarlo para cuadrar el círculo. Pero los griegos, con sus métodos geométricos, no tenían una operación que justificara ese paso lógicamente.

Utilización de la curva para trisecar ángulos y cuadrar el círculo

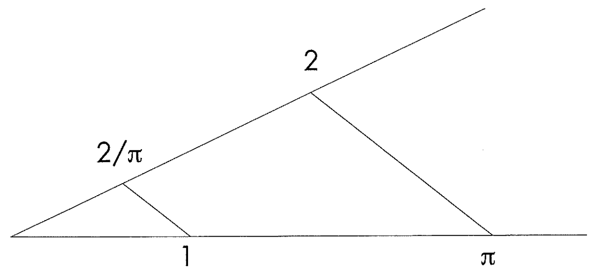
La primera utilidad de la curva de Dinóstrato es la de emplearla para la trisección un ángulo agudo e incluso para dividir un ángulo en cualquier número de partes.

A continuación se expone cómo debe procederse.



Sea el ángulo agudo ZAD, levantemos una perpendicular, AB, al lado AD por el punto A. Si suponemos trazada la curva de Dinóstrato BZH y, como en los apartados anteriores AB=1, trazando por Z una paralela a AD que corte a AB en T. Dividiendo el segmento AT en tres partes iguales se obtienen los puntos R y S. Trazando por esos puntos paralelas a AD se obtienen los puntos Z y Z', puntos de intersección de las mencionadas rectas con la curva de Dinóstrato. Los ángulos Z''AH, Z'AZ'' y ZAZ' son las tres terceras partes del ángulo ZAD.

La segunda utilidad de la curva de Dinóstrato procede del valor límite del punto H, esto es de la abscisa del punto $(2/\pi, 0)$, a partir del cual se puede determinar por el teorema de Thales, según la construcción siguiente:

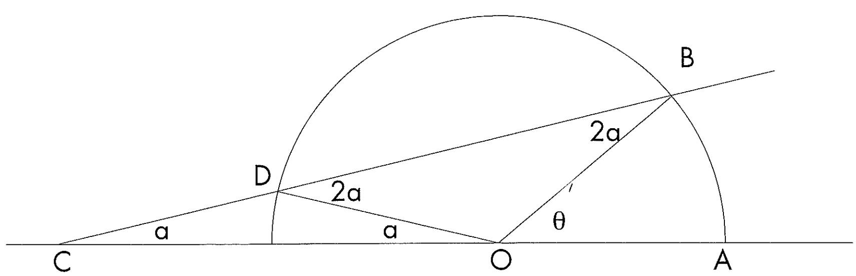


Consideraciones finales

La curva de Dinóstrato no fue admitida en el seno de la geometría griega por varias razones, entre otras por las que apuntaba Sporos de Nicea. En primer lugar era una curva que se trazaba determinándola punto a punto y se trazaba de manera aproximada, debido a que los movimientos que la generaban eran independientes y no guardaban entre ellos ninguna relación que pudiera ser medida exactamente. En realidad las magnitudes que caracterizaban los movimientos eran inconmensurables, cuestión que seguramente sospecharían los geómetras griegos.

No convenció a los griegos ni siquiera que Arquímedes diera un método sencillo para trisecar el ángulo AOB, que denotaremos con θ. Para trisecar ese ángulo se traza un semicircunferencia con centro en O, sobre una regla marcamos la longitud CD = r, manteniendo D sobre la semicircunferencia, haciendo que C se apoye en la prolongación de OA y haciendo que la regla pase por B, se tiene que el ángulo ACB es la tercera parte de AOB, ya que

$$a + 2a = \theta$$



Pappus expuso una gradación en las dificultades que presentaban los problemas geométricos sólidos diciendo que dentro de ellos había unos de complejidad superior, llamados problemas *grámicos:* aquellos en cuya resolución haría falta curvas que provenían bien de la intersección de superficies o bien de la composición de varios movimientos. Las superficies que generaban estas curvas no eran tan simples como las que engendraban las cónicas (cono y plano), sino de otras más irregulares. Curvas de este tipo se encontraban, según testimonio de Pappus, en obras, actualmente desaparecidas tales como *Lugares superficiales* de Euclides o *Consideraciones sobre las curvas* de Demetrio de Alejandría (Siglo I a.C.). Por las palabras de Pappus parece que llegaron a distinguir curvas transcendentes.

Aunque es opinión generalizada que hasta el siglo XVII se conocían unas doce curvas clasificadas en cónicas, cuadratrices, concoides o cisoides, entre otras, las obras desaparecidas mencionadas anteriormente nos hacen pensar la existencia de algunas curvas más, aunque no entraron en el cuerpo de la geometría griega. Probablemente el estudio de los problemas grámicos constituiría una línea de investigación de algunos geómetras griegos.

El número de las curvas creció con la implantación de la geometría analítica, cuando con sólo las llamadas *parábolas de Fermat*, del tipo $y = ax^n$, surgieron infinitas curvas.

No cabe duda que desde la geometría griega hasta el siglo XVII se produjo una maduración y una extensión del concepto de curva, una manera diferente de definirlas, así como una aplicación diferente de las mismas a la resolución de problemas matemáticos.

Victor Arenzana
IES Félix de Azara
Zaragoza
Sociedad Aragonesa
de Profesores de Matemáticas
Pedro S. Ciruelo

Bibliografía

DESCARTES, R. (1981): «La Geometría», en R. DESCARTES: *Discurso del Método*, Alfaguara, Madrid.

GOMES TEIXEIRA, F. (1905): *Tratado de las curvas especiales*, Memoria de la Academia de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, Imprenta de la Gaceta de Madrid, Madrid.

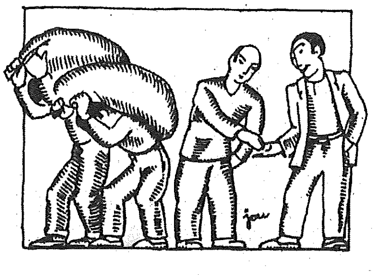
VERA, F. (1970): *Científicos Griegos*, Aguilar, Madrid.

N.º 154. Con 450 Kgs. de pan se han alimentado 25 personas durante un mes. ¿Cuántas personas se habrían alimentado durante el mismo tiempo con 252 Kgs. de pan?

$450 : 25 = 18$

$\frac{252}{18} = 14$

R.: Se habrían mantenido 14 personas.



N.º 155. Se han comprado dos sacos de trigo de 120 Kgs. cada uno por 133'50 ptas. ¿Cuántos Kgs. de trigo podrían comprarse con 600'75 ptas.?

$120 \times 2 = 240$

$\frac{133'50}{240} = 0'556$

$\frac{600'75}{0'556} = 1080'48$

R.: Podrían comprarse 1080'48 Kg.