SUMA 36
febrero 2001, pp. 101-106

Isoperímetros: Ficha didáctica en geometría. Métodos trigonométricos

Grupo Construir las Matemáticas*

TALLER DE PROBLEMAS

EN LA ENTREGA del n.° 35 nos preguntábamos si la evolución histórica del problema nos podría servir de guía para planificar una actuación en clase, siguiendo el modelo Van Hiele. ¿Cómo describir este modelo en pocas líneas?

1. Se basa en la idea de que cada persona tiene un nivel de pensamiento y conocimientos frente a cualquier actividad matemática, independientemente de su edad y su desarrollo evolutivo.
2. Cada nivel supone una forma de comprensión, un modo de pensamiento particular, de manera que una persona sólo puede razonar sobre conceptos matemáticos adecuados a su nivel de pensamiento en cada momento.
3. Se distinguen cinco *niveles de pensamiento*:

   Nivel 0, predescriptivo, básico o visual.

   Nivel 1, de reconocimiento visual, descriptivo.

   Nivel 2, de análisis, teórico.

   Nivel 3, de clasificación, de relación.

   Nivel 4, de deducción formal.
4. El proceso de la enseñanza debe orientarse a facilitar el progreso de una persona que esté en el nivel n al $n + 1$, para ello la planificación debe estar adecuada a su nivel de razonamiento.
5. ¿Cómo se puede determinar el nivel de cada cual frente a una misma tarea?

   Aquí surgen las *fases* de actuación en el aula:

   1. Consulta o *diagnóstico*, para determinar el nivel de pensamiento. El uso de materiales manipulativos es recomendable en esta fase, puesto que ayudan a los estudiantes a explicitar conocimientos que de otro modo dificilmente pondrían de manifiesto.

---

* Los componentes del Grupo Construir las Matemáticas son Rafael Pérez, Isabel Berenguer, Luis Berenguer, Belén Cobo, M.ª Dolores Daza, Francisco Fernández, Miguel Pasadas y Ana M.ª Payá.

2. *Orientación dirigida*. Actividades muy estructuradas, encaminadas a conducir a los estudiantes a la construcción de nuevos conocimientos (contenidos mínimos) a partir del nivel en el que se encuentran. El trabajo en grupo puede facilitar el avance en esta fase.
3. *Explicitación* , para comunicar los resultados del trabajo. Esto requiere una reflexión individual sobre lo que se sabía y lo que se ha aprendido y la organización de todos los resultados obtenidos.
4. *Orientación libre*. Es el momento de la atención a la diversidad, de actividades menos estructuradas y más abiertas.
5. *Integración*. Organización y presentación formal de los nuevos aprendizajes, por parte del profesorado.

Actividades y objetivos

El objetivo de la actividad que se propone es la introducción del método trigonométrico para resolver problemas.

A lo largo de la ESO, también pueden sacarse a colación, además del entrenamiento en heurísticos, el método de los lugares geométricos, el de las transformaciones y el de las coordenadas.

La actividad que vamos a presentar aquí se encuentra entre los niveles de pensamiento 2 y 3 descritos arriba y está pensada para 3.° o 4.° de ESO.

Observaciones:

1. Tal y como pondremos de manifiesto en la octava entrega, este problema puede tener una primera aproximación en el primer ciclo de la ESO de la mano de la función cuadrática.
2. Con esta entrega, la quinta y la referida antes, pretendemos mostrar cómo se puede abordar *un mismo problema* desde los diferentes bloque de contenidos del currículo de Matemáticas, así como el carácter cíclico del aprendizaje, al presentarse a lo largo de toda la ESO.
3. Para colegas «nerviosos(as)» (sí, aquellos(as) que ya han echado mano del cálculo de derivadas) está prevista la novena entrega, propia de un curso de Bachillerato.

El problema

Dispones de un listón de madera de 3 m de longitud para enmarcar un cuadro. ¿Cuál es la lámina de mayor superficie que puedes enmarcar?

Diagnóstico

Se pregunta a la clase:

¿Qué significa la palabra perímetro?

Se pretende, además de comprobar las ideas previas de cada alumno o alumna, la utilización correcta del lenguaje que vamos a usar en esta actividad.

Sobre un geoplano ortométrico y uno isométrico y una cuerda de longitud dada, formar, al menos, tres poligonales cerradas con área diferente.

Trasladar los resultados sobre papeles pautados y anotar, para cada dibujo, las medidas de los lados, suponiendo que la «cuerda» tuviese 3 metros de longitud.

¿Qué tienen en común todas las figuras?

Respuesta prevista:

Igual perímetro = *iso-perimétricas*. Comentar la etimología de este término y buscar analogías con otros términos que incluyan el prefijo *iso*.

¿Cuál es el perímetro de un rectángulo?

Si conoces el valor de un lado, ¿puedes deducir el del otro?

Mediante estas actividades se deben detectar los niveles de pensamiento del grupo para ajustar el punto de partida del trabajo y tratar de unificar el lenguaje.

Comentario:

1. Observar si funciona el principio de conservación de la cantidad y no la forma.
2. Observar si se detectan variaciones entre las áreas de las figuras.

Actuación (tratamiento de la diversidad):

Si alguien de la clase está en la situación 1, entonces *el problema está lejos de sus posibilidades* y habrá que proponer actividades adecuadas para que supere ese nivel. En este punto se pueden formar grupos de trabajo de integración, formados por personas de los dos niveles, teniendo en cuenta que conviene que haya más del nivel 1 que del 2 en cada grupo.

Si se está en situación 2, seguir avanzando en la propuesta que se presenta.

1ª Orientación dirigida

Organizar la clase en grupos de 4 personas.

Para el paralelogramo, que es un caso más sencillo, vamos a analizar diferentes posibilidades de construcción del marco y calcular la superficie de la lámina que admite en los distintos casos.

El listón de que disponemos mide 3 m, luego todas las láminas deben tener el mismo perímetro y se verifica que: 2·lado mayor + 2·lado menor = 3. Para simplificar, vamos a llamar L a la longitud del lado mayor de rectángulo y l a la del lado menor y así podemos decir que $2L + 2l = 3$.

Haremos una indagación sistemática y para ello, cada grupo va a dar cuatro valores a L y a rellenar la siguiente tabla en la que aparecen láminas de distintas dimensiones.

Lado mayor, L				
Lado menor, l				
Área, $L \times l$				

Observación:

Es aconsejable trabajar con calculadoras, para evitar que se «pierda» el problema que nos interesa entre cálculos engorrosos. El objetivo ahora no es el entrenamiento en cálculo.

Entre todos los rectángulos posibles, parece intuirse que el cuadrado es el que tiene mayor área, pero, *¿cómo validar esta hipótesis*? El ejemplo no demuestra, hay que generalizar.

Si la lámina es cuadrada, el lado será la cuarta parte de este perímetro. Podemos expresar las áreas de cualquier rectángulo y del cuadrado en función de L y l, e intentar averiguar cuál de ellas es mayor.

El área del cuadrado es igual a lado x lado, luego, será:

$$\left(\frac{2L+2l}{4}\right)^2 = \left(\frac{L+l}{2}\right)^2$$

y la de cualquier rectángulo será $L \times l$. ¿Cuál de las dos será mayor?

Debes comparar $\left(\frac{L+l}{2}\right)^2$ con $L \times l$, o lo que es lo mismo $\frac{L+l}{2}$ con $\sqrt{L \cdot l}$, que no son otra cosa que la *media aritmética* y la *media geométrica* de L y l, respectivamente, que en cada caso son números construibles con regla y compás.

¿Cuál de las siguientes desigualdades es cierta:

$$\frac{L+l}{2} < \sqrt{L \cdot l} \quad \text{o} \quad \frac{L+l}{2} > \sqrt{L \cdot l} \text{ ?}$$

Estos resultados, como desigualdades algebraicas, se verán en la quinta entrega.

1.ª Explicitación

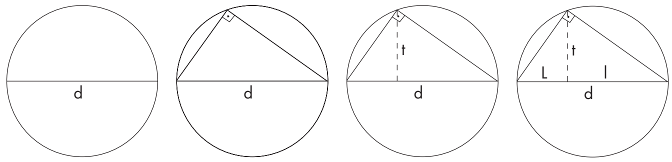
Cada grupo redactará un informe organizando todo el trabajo realizado, en el que se explique claramente los resultados obtenidos. Dicho informe será expuesto por un miembro del grupo a la clase.

En este momento volvemos a la orientación dirigida para avanzar un poco más en el problema. Para hacer la comparación anterior se puede utilizar una estrategia: Hacer una representación gráfica. Organizamos la siguiente actividad en torno a esta idea.

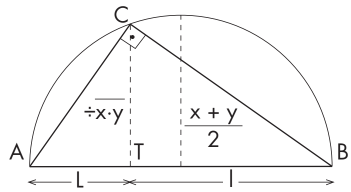
2.ª Orientación dirigida

1. Haz una circunferencia de diámetro cualquiera (represéntalo con la letra *d* de diámetro).
2. Dibuja un triángulo rectáng ulo cuya hipotenusa sea *d*.
3. Traza la altura del triángulo sobre *d* (la representaremos con la letra *t*, de altura)
4. La hipotenusa queda dividida en dos trozos de longitudes desconocidas, represéntalas con las letras *L* e *l*.

Como $L + l = d$, $\frac{L+l}{2}$ será igual al radio. Observa que *t* es menor o igual que el radio, ¿cuánto vale?



En la figura, el segmento CT representa geométricamente a la media geométrica de los segmentos L y l: $\sqrt{L \cdot l}$



La media aritmética de estos segmentos, $\frac{L+l}{2}$. viene representada geométricamente por cualquiera de los radios de la circunferencia en la que está inscrito el triángulo *ABC*; en particular, el paralelo al segmento *CT*.

¿Cuál de las dos medias es mayor? ¿Cuándo serán iguales?

La igualdad se da cuando $L = l$. Es decir cuando el rectángulo es un cuadrado. En este caso, el cuadrado tiene de lado 3/4 m, y su área será de 9/16 m^2 (0.56 m^2).

2ª Explicitación

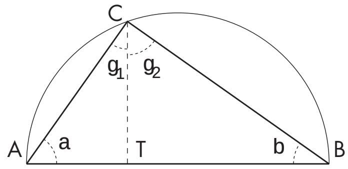
Idem a Explicitación 1.

Orientación libre

Resultado

Entre los cuadriláteros con igual perímetro, el cuadrado es el que tiene área máxima.

Un triángulo en el uno de sus lados sea el diámetro de una circunferencia y el vértice exterior a ese lado sea un punto cualquiera de la circunferencia, es rectángulo y el diámetro es la hipotenusa. Utilizando este resultado, sabemos que el triángulo *ABC* de la figura es un triángulo rectángulo, de modo que los ángulos $\alpha + \beta = 90°$.



Los triángulos *ATC* y *BTC* son también rectángulos, luego se verifica que $\alpha + \gamma_1 = 90°$ y $\beta + \gamma_2 = 90°$, de donde, $\gamma_1 = 90° - \alpha$ y $\gamma_2 = 90° - \beta$.

Como $\alpha + \beta = 90$, se tiene que: $\alpha = 90 - \beta$ y $\beta = 90 - \alpha$. Por tanto, $\alpha = \gamma_1$ y $\beta = \gamma_2$, y los dos triángulos *ATC* y *BTC* son semejantes.

Por tratarse de triángulos semejantes, los lados homólogos serán proporcionales. Entonces:

$$\frac{CT}{AT} = \frac{TB}{CT}$$

de donde $CT^2 = AT \cdot TB$, o bien $CT = \sqrt{AT \cdot TB}$. Dicho de otra manera, la altura de un triángulo rectángulo sobre la hipotenusa es *media proporcional*, o *media geométrica*, entre los segmentos en que ésta queda dividida.

Sobre el triángulo anterior, también se verifica la igualdad:

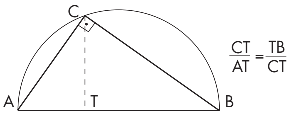
$$\frac{AT}{AC} = \frac{AC}{AB}$$

Dicho de otra manera, en un triángulo rectángulo uno de los catetos es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ésta.

Integración

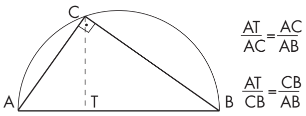
Teorema de la altura

La altura, relativa a la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es media proporcional entre los segmentos en que divide a esta.



Teorema del cateto

Cualquiera de los catetos de un triángulo rectángulo es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección de éste sobre ella.

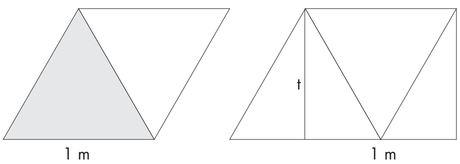


¿Qué ocurrirá si la lámina tiene forma de triángulo equilátero, de pentágono regular, o de cualquier otro polígono regular? ¿Cuál de ellas tendrá área máxima, manteniendo igual el perímetro?

3ª Orientación dirigida

Dibujar, a escala, un triángulo de 3 m de perímetro. Completar el dibujo con otro triángulo igual, hasta obtener un paralelogramo.

Se puede convertir este paralelogramo en un rectángulo, trasladando la mitad de uno de los triángulos al otro extremo del conjunto, como muestra la figura:



El rectángulo tiene 1 m de base. Utilizando el teorema de Pitágoras, y puesto que el triángulo trasladado es rectángulo, se puede calcular la altura, *t*, del rectángulo:

$$1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + t^2, \text{ luego } t^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2, \text{ y } t = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0,87 \text{ m}$$

El área del rectángulo es el producto de la base por la altura; es decir, $1 \cdot 0,87 = 0,87$ m^2. El área del triángulo inicial será la mitad de la del rectángulo, es decir 0.435 m^2.

3ª Explicitación

Idem a Explicitación 1.

Resultado

En general, para calcular el área de un triángulo cualquiera, podemos convertirlo en un paralelogramo uniendo dos iguales, y éste en un rectángulo de igual área multiplicando las medidas de dos de sus lados diferentes. Si a una la llamamos *base* y a la otra *altura*, queda el área del rectágulo como el producto de la base por la altura.

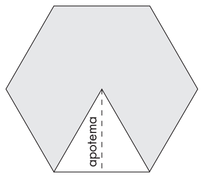
De este modo, *el área de un triángulo cualquiera será la mitad de la base por la altura.*

Se compara el área del triángulo equilátero con la del cuadrado, la de éste es mayor.

Vamos a seguir calculando áreas de otros polígonos regulares, ¿cómo hacerlo? Se puede utilizar una técnica llamada de la *triangulación*. Se organiza la siguiente orientación dirigida con esta idea.

4ª Orientación dirigida

Dibujar un hexágono regular y buscar su centro. Unirlo con los seis vértices del hexágono. ¿Cuántos triángulos se obtienen? ¿Son iguales? Si se conoce el área de uno de ellos, ¿se puede calcular el área del hexágono? ¿Cómo?



Una altura de cualquiera de estos triángulos es la apotema del hexágono y la base correspondiente, el lado. El área del triángulo será:

Área del triángulo = (lado × apotema)/2

Área del hexágono = 6 × Área del triángulo =

= 6·(lado × apotema)/2

El perímetro del hexágono es la suma de los seis lados, con lo que la fórmula anterior quedaría:

Área del hexágono = (perímetro × apotema)/2

¿Cómo se calcularía el área de un octógono regular? ¿Y la de cualquier otro polígono regular?

4ª Explicitación

Idem a Explicitación 1.

¿Qué sucederá con el pentágono regular de 3 m de perímetro?

5ª Orientación dirigida

Observa que para calcular el área de cualquier polígono, se puede descomponer éste en triángulos y sumar las áreas de todos ellos.

Dibuja un pentágono regular de 3 m de perímetro. Busca su centro y únelo con los cinco vértices. Obtienes cinco triángulos isósceles iguales, cuya base mide 3/5 m. Calcula su área.

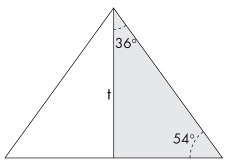
¿Cómo saber el valor de r?

Aparece un nuevo problema: calcular el área de un triángulo del que sólo conocemos un lado.

Una aplicación de la trigonometría es el cálculo del área de un triángulo isósceles del que conocemos la longitud del lado desigual y el ángulo opuesto.

En cada uno de los triángulos que resultaron al descomponer el pentágono regular el lado desigual mide 3/5 m, es decir 0,60 m, o 60 cm y su ángulo central, será de 360°/5 = 72°. El área de este triángulo será el producto de su base, 60 cm, por la altura, que desconocemos.

Dibujar este triángulo, utilizando una escala 1:10. Traza la altura relativa al lado desigual. De este modo obtienes un triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden 36° y 54° y el cateto menor 3 cm.



Utilizando, por ejemplo, el ángulo de 36° podemos escribir tan 36° = $3/t$, siendo t la altura del triángulo. En la calculadora averiguamos el valor de tan 36° = 0,73, y sustituyendo tenemos que 0,73 = $3/t$.

Si despejamos el valor de b, tenemos que t = 3/0,73, t = 4,2 cm, que deshaciendo la escala nos da una altura del triángulo de 42 cm. Ya que conocemos la altura, podemos calcular el área del triángulo:

Área de triángulo = (60 × 42)/2 = 1260 cm² = 0,126 m²

Volvemos al problema inicial de calcular el área de un pentágono regular de 3 m de perímetro, para ello se puede multiplicar el área anterior por cinco triángulos iguales en los que se había descompuesto.

Área del pentágono = 0,63 m².

5ª Explicitación

Idem a Explicitación 1.

Comparar este resultado con las áreas calculadas antes del triángulo equilátero y del cuadrado y ordenarlas de menor a mayor, ¿qué se puede conjeturar acerca del área de estos polígonos regulares del mismo perímetro?

6ª Orientación dirigida

Siguiendo los mismos razonamientos utilizados en el caso del pentágono regular, completar la siguiente tabla.

Polígono	Perímetro	Longitud del lado	número de lados	Área
Triángulo equilátero	3 m	1 m	3	0,435 m²
Cuadrado	3 m	0,75 m	4	0,56 m²
Pentágono regular	3 m	0,60 m	5	0,63 m²
Hexágono regular	3 m	0,50	6	
Heptágono regular	3 m			

A la vista de los resultados de la tabla, ¿qué se puede conjeturar?

6ª Explicitación

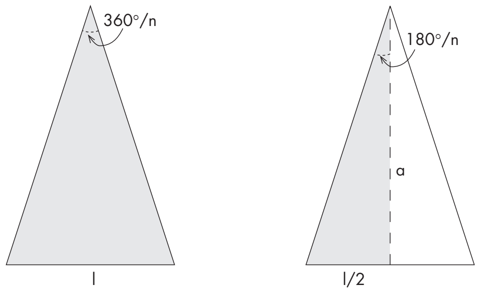
Idem a Explicitación 1.

Para generalizar, ¿cómo calcular el área de un polígono regular de n lados sabiendo que la longitud del lado es l?

7ª Orientación dirigida

Partimos de un polígono regular de n lados, y longitud del lado l.

1. Descomponerlo en n triángulos iguales.
2. Calcular el área de uno de ellos. Considerar como base el lado, l, del polígono y como altura la apotema, a.



Área del triángulo = $(l \times a)/2$

3. Calcular la longitud de la apotema, *a*, utilizando la trigonometría.

$$\tan\frac{180°}{n} = \frac{l/2}{a} \Rightarrow a = \frac{\left(\frac{l}{2}\right)}{\tan\frac{180°}{n}} = \frac{l}{2\cdot\tan\frac{180°}{n}}$$

4. El área del triángulo es:

$$A_{triángulo} = \frac{l\cdot\frac{l}{2\cdot\tan\frac{180°}{n}}}{2} = \frac{l^2}{4\cdot\tan\frac{180°}{n}}$$

5. El área del polígono es *n* veces la del triángulo:

$$A_{polígono\ regular} = n\cdot\frac{l^2}{4\cdot\tan\frac{180°}{n}}$$

6. Ahora bien, lo que realmente permanece constante es el perímetro de cada polígono y no el valor del lado. Por tanto, hay que expresar el área en función del perímetro y del número de lados.

$$A_{polígono\ regular} = n\cdot\frac{(3/n)^2}{4\cdot\tan\frac{180°}{n}} = \frac{9}{4n\cdot\tan\frac{180°}{n}}$$

7. Haciendo uso de una calculadora científica, verificar los valores de las áreas de los polígonos que figuran en la tabla anterior.

8º ¿Cuál es el área para n = 100? ¿Se refuerza la conjetura que se hizo al final de la 6ª orientación dirigida?

Observación para el profesorado:

Si se calcula el límite de la expresión del área cuando n tiende a infinito, resulta 9/4≠ m^2, que coincide con el área del círculo de perímetro igual a 3 m.

7ª Explicitación

Idem a Explicitación 1.

Resultado

Para un perímetro fijo, el polígono regular de mayor área es aquel que tiene mayor número de lados.

Orientación libre

Conjetura

Si el número de lados del polígono regular aumenta indefinidamente, la figura plana de mayor área, con un perímetro fijo será la circunferencia.

Otras posibilidades para orientación libre:

¿Por qué sólo se tratan polígonos regulares?, ¿qué ocurre con los irregulares?

Estos aspectos los retomaremos con «otras» herramientas.

Se puede invertir la cuestión:

Para un área fija, ¿cuál es la figura de menor perímetro?

Quienes diseñaron la forma de las latas para bebidas lo sabían bien. Es decir, se plantearon el problema siguiente:

¿Qué forma ha de tener un recipiente de altura (ancho estándar de una mano) y volumen (33 cl) dados para que se gaste la menor cantidad de aluminio (material para la fabricación de latas