SUMA 36
febrero 2001, pp. 85-92

Acerca del Libro de arena *de Jorge Luis Borges*

Miquel Albertí Palmer

MISCELÁNEA

Muchas veces en clase he trazado de extremo a extremo de la pizarra una línea blanca a la que he puesto por nombre $\mathbb{R}$. Este gesto invita a pensar que $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales, se parece mucho a una fila india de puntos muy apretados. Pero los matemáticos sabemos que no es así, pues hay infinitos de diversa índole.
El infinito del *Libro de arena* borgiano es numerable, el infinito real no. El continuo real no es ni debe imaginarse como una hilera muy tupida de puntos suspensivos, sino más bien como… ya se verá.

EN *EL LIBRO DE ARENA* podemos ver cómo el conocimiento de algunos de los conceptos que se estudian en las Matemáticas no son exclusivos de los matemáticos y que pueden ser expuestos y explicados por autores de otros campos. Considero este relato un excelente ejemplo no del concepto de infinito, sino de su casi indomable carácter y un magnífico contraste con el punto de vista (¿más riguroso?) que de él podemos dar los matemáticos.

En la primera parte, como indica su título, comento el texto de Borges. Bajo una óptica no del todo matemática quiero mostrar qué conjunto de números se amolda al libro borgiano de acuerdo con las referencias explícitas que nos brinda el relato. En la segunda parte me he tomado la libertad (con la única intención de mostrar un ejemplo entretenido) de readaptar el cuento de Borges (caso discreto) al caso continuo. En ella incluyo la que quizá sea la manera más apropiada de imaginarse la recta real.

Comentario al *Libro de arena*

> La línea consta de un número infinito de puntos; el plano, de un número infinito de líneas; el volumen, de un número infinito de planos; el hipervolumen, de un número infinito de volúmenes…[1]

Nada más empezar su relato Borges quiere convencernos de que éste merece el crédito que le otorgará. Para ello se vale de la exposición del *leitmotiv* geométrico con el que se construyen los espacios multidimensionales, o sea, una verdad matemática. Con ella Borges ubica al lector en un ámbito cuyo carácter formal resulta difícil de refutar y pretende asignar a su cuento un valor de verdad muy superior al de otros relatos de tipo fantástico, cosa que después subraya minimizando el grado de veracidad atribuible a éstos diciendo que tal pretensión es inherente a todo relato de este tipo:

1 Esta cita y todas las que siguen proceden de BORGES, J.L. (1996): *El libro de arena*, Alianza Editorial, Madrid.

> Afirmar que es verídico es ahora una convención de todo relato fantástico;

Y se reafirma en ello por dos veces. Al repetir el mismo calificativo (*verídico*) en lugar de una expresión más simple («lo es») y al escribir en cursiva el verbo de su réplica (hecho que por otra parte invita a interrogarse por el significado del mismo):

> el mío, sin embargo, *es* verídico.

A partir de aquí, lo cotidiano del acontecimiento (un vendedor visita al narrador con la intención de venderle un libro) y lo corriente del lugar donde se desarrolla la escena (en casa) también contribuirán a la veracidad del cuento porque un acontecimiento así lo hemos vivido muchos.

Borges habla de un libro que tiene una infinidad de páginas, concepto este que ya fue introducido en la obertura y que constituye la esencia de la historia:

> El número de páginas de este libro es exactamente infinito.

Ahora bien, ¿de qué tipo es este infinito? ¿Se trata de un infinito numerable como el de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Q}$? ¿O tal vez piensa más en un infinito no numerable como el de $\mathbb{R}$?

En el argumento geométrico que inicia el relato se dan cita los dos conceptos que otorgan al infinito su carácter. Por un lado, infinito es sinónimo de cantidad ilimitada, un cardinal mayor que cualquier cardinal finito por enorme que éste sea; y por otro, es sinónimo de potencialidad ilimitada porque partiendo de un objeto primigenio tenemos la posibilidad de generar tantos como queramos con la aplicación reiterada de una operación. En este sentido es la ilimitada posibilidad de reiteración la que da al infinito su talante. Tras los tres puntos suspensivos que siguen la exposición iterativa del comienzo no se albergan únicamente los sucesivos espacios multidimensionales, sino también el argumento mismo que permite su construcción:

> de un número infinito de volúmenes... (sic)

Un lector matemático seguramente tendrá la impresión de haberse topado antes, y muy a menudo, con algún objeto semejante al que protagoniza la historia. Los seres fundamentales de las Matemáticas son los conjuntos de números. Es precisamente al estudiar uno de estos conjuntos ($\mathbb{N}$, el conjunto de los números naturales) donde el matemático se enfrenta por vez primera con la idea de un cardinal infinito.

Los números naturales ($\mathbb{N}$) no son infinitos porque no se acaban nunca, sino porque el procedimiento que permite construirlos y que consiste en sumar una unidad al último natural construido se puede aplicar de nuevo para generar otro, y otro, y otro...: 1, 1+1 = 2, 2+1 = 3, 3+1 = 4, ...

Un lector matemático seguramente tendrá la impresión de haberse topado antes, y muy a menudo, con algún objeto semejante al que protagoniza la historia.

Lo que me interesa es ver qué conjunto numérico se ajusta al ejemplar borgiano.

Las páginas del libro llevan una numeración desordenada, arbitraria:

> Me llamó la atención que la página par llevara el número (digamos) 40.514 y la impar, la siguiente, 999. La volví, el dorso estaba numerado con ocho cifras.
>
> No sé por qué están numeradas de ese modo arbitrario. Acaso para dar a entender que los términos de una serie infinita admiten cualquier número.

y ese desorden las hace comparables a la arena de un desierto:

> Me dijo que su libro se llamaba el Libro de Arena, porque ni el libro ni la arena tienen ni principio ni fin.

Al contar un desierto nosotros determinamos el principio cogiendo un grano de arena (al que llamaremos uno, el primero) de la ingente polvareda. ¿Y el fin? Bueno, el final,… ¿Acaso lo hay? Si nos imaginamos el espacio infinito, ¿dónde estoy? ¿En qué punto del espacio me hallo? ¿En medio? ¿Muy cerca de la orilla? No, cerca de la orilla no puedo estar porque si el espacio es infinito carece de ella. O sea:

> Si el espacio es infinito estamos en cualquier punto del espacio. Si el tiempo es infinito estamos en cualquier punto del tiempo.

Esta ambigüedad induce el desorden con el que se han numerado las páginas del libro. Pero hay más. Lo que me interesa es ver qué conjunto numérico se ajusta al ejemplar borgiano. El comprador aprecia en él una propiedad sorprendente:

> Me pidió que buscara la primera hoja. Todo fue inútil: siempre se interponían varias hojas entre la portada y la mano. Era como si brotaran del libro.

Hojeando el libro uno no puede dar nunca con la primera página, o el primer folio. Esto no sucedería si las páginas del volumen se correspondieran con los números naturales porque aunque infinitas siempre habría una que sería la primera y otra que sería la última. Si tomamos un intervalo de números naturales $[m, n]$, donde m representa la portada del libro y n la contraportada, la primera hoja será $m+1$ y la última, $n-1$.

En cambio en $\mathbb{Q}$, el conjunto de los números racionales, sí que se da esa extraña imposibilidad. En $\mathbb{Q}$ no se puede elegir el primer elemento de un intervalo abierto de números racionales. Si suponemos que x es el primer número racional del intervalo abierto (0, 1) nos encontramos con la sorpresa de que $x/2$ es otro número racional que le precede. Sucede pues igual que en el libro. Si sus hojas están numeradas con números racionales y $[p, q]$ es el intervalo que las representa (p es la portada y q la contraportada) resulta que siempre se interpone alguna hoja entre p y cualquier $p+r$ por pequeño que sea r. De hecho, no sólo una, sino infinitas:

$$p+r/2,\ p+r/4,\ p+r/8,\ \ldots,\ p+r/2^n,\ \ldots$$

Los números reales también poseen esta propiedad, pero si Borges hubiera querido expresar con más claridad que las páginas se correspondían con ellos quizás hubiera dado alguna indicación más explícita, como por ejemplo decir que alguna de las páginas del libro portaba la cifra ≠, e, o $\sqrt{2}$. Lo cierto es que no da pie a pensar en eso ya que todos los números explícitamente mencionados en el texto son naturales.

El rasgo diferencial entre los cardinales de $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{Q}$ es la numerabilidad. $\mathbb{R}$ no es numerable; $\mathbb{Q}$, sí. Que un conjunto sea numerable quiere decir que sus elementos, pese a ser una infinidad, se pueden contar igual que contaríamos los de un conjunto finito: 1, 2, 3, 4, 5, ... Y contar significa establecer una correspondencia 1-1 entre $\mathbb{N}$ y los elementos del conjunto en cuestión. Puesto que $\mathbb{Q}$ es numerable, además de compartir el mismo cardinal infinito, comparte con $\mathbb{N}$ el carácter de su infinidad, una infinidad contable. El infinito de $\mathbb{R}$ es de otro tipo porque no se puede contar.

¿Será que las páginas del libro obedecen entonces a un talante de tipo real? Tampoco. En tal caso el libro no se podría ni abrir porque abrirlo significaría cortarlo: los reales forman el llamado continuo, no hay resquicios entre sus puntos.

$\mathbb{Q}$ es el conjunto que se ajusta al *Libro de arena*.

$\mathbb{Q}$ es el conjunto que se ajusta al Libro de arena.

La infinidad es también responsable de transmutar un hecho corriente y banal, como hojear un libro y fijarnos por un instante en una de sus páginas, en todo un acontecimiento debido a la nula probabilidad de dar con la misma página al abrirlo de nuevo:

> Fue entonces que el desconocido me dijo:
>
> —Mírela bien. Ya no la verá nunca más.
>
> Había una amenaza en la afirmación, pero no en la voz.
>
> Me fijé en el lugar y cerré el volumen. Inmediatamente lo abrí. En vano busqué la figura del ancla, hoja tras hoja.

La primera idea que nos pasa por la cabeza al querer demostrar que los elementos de un conjunto tienen una determinada propiedad es observar si todos, mirándolos uno por uno, la poseen. Trabajo razonablemente aplicable a los conjuntos finitos de cardinal pequeño, pero del todo absurdo en el caso de un conjunto infinito:

> Comprobé que las pequeñas ilustraciones distaban dos mil páginas una de otra. Las fui anotando en una libreta alfabética, que no tardé en llenar. Nunca se repitieron.

Enseguida uno se da cuenta de lo inapropiado del proceso. No tiene fin porque de algo que no sucede en veinte mil casos no podemos inferir que nunca se repetirá. Si un conjunto es infinito y conocemos la ley generadora de sus elementos o la propiedad que los caracteriza es esta ley o propiedad la que hemos de atacar en nuestra demostración. $\mathbb{N}$ es un conjunto generado por una ley inductiva y es mediante demostraciones por inducción como se consiguen muy buenos resultados.

El nuevo dueño, convencido del prodigio, se ve obligado a aceptar la existencia de un objeto que minutos antes hubiera tildado de imposible. La insólita y palpable realidad del libro transmuta en irreal el universo a su alrededor, todo lo que hasta este momento él había tomado inconscientemente por realidad común. Realidad e irrealidad permutadas:

> De nada me sirvió considerar que no menos monstruoso era yo, que lo percibía con ojos y lo palpaba con diez dedos con uñas. Sentí que era un objeto de pesadilla, una cosa obscena que corrompía la realidad.

En la vida que llamamos real a menudo nos cuesta creer cosas y hechos que vemos, sentimos o padecemos. Entonces expresamos nuestra incredulidad diciendo que las cosas no pueden ser así, rechazamos la súbita realidad:

> —Esto no puede ser.
>
> —No puede ser, pero es.

Nos cuesta aceptarla. Y más si somos conscientes de la ambigüedad del término existencia: cuando los matemáticos dicen que algo existe no lo hacen en el mismo sentido que un filósofo o un biólogo, aunque los objetos del primero no sean tan tangibles y palpables como los del segundo[2]. La existencia matemática es potencial como la de los números y el libro de arena constituye un buen ejemplo de ello: ¿qué me resulta más difícil como matemático, aceptar la existencia de semejante libro o la de un punto fijo para toda aplicación continua del intervalo [0, 1] en sí mismo?

Aceptar la nueva realidad supone para el comprador del relato un esfuerzo, una especie de acto de fe, al que no está acostumbrado. Un acto que nadie dudaría en calificar como propio de los campos menos rigurosos de la cultura, impropio de una persona valedora de un juicio sano y objetivo. Pero tengamos presente que a pesar del prestigio del reino del rigor y de la objetividad del que disfrutan, también en el mundo matemático se hacen actos de fe. Sirva como ejemplo el axioma de elección. Si lo aceptas puedes seguir adelante y hacer grandes Matemáticas; de lo contrario, gran parte de las Matemáticas desaparecen o deberían ser revisadas y puedes pasar a engrosar las listas del paro.

> Siento un poco de alivio, pero no quiero ni pasar por la calle México.

En la vida que llamamos real a menudo nos cuesta creer cosas y hechos que vemos, sentimos o padecemos. Entonces expresamos nuestra incredulidad diciendo que las cosas no pueden ser así, rechazamos la súbita realidad…

El cabello de plata

> Me dijo que su libro se llamaba el *Libro de Arena* porque ni el libro ni la arena tienen ni principio ni fin. (J. L. Borges)

La línea consta de un número infinito de puntos; el plano, de un número infinito de líneas; el volumen de un número infinito de planos; el hipervolumen, de un número infinito de volúmenes… Si antes al menos lo creía así, ahora lo dudo. Pero no es ésta la mejor manera de iniciar mi relato. Asegurar que es verídico sería caer en la tradición de cualquier relato fantástico; el mío, sin embargo, lo *es*.

Yo no vivo solo, pero lo estaba cuando una tarde, hace unos meses, sonó el timbre de casa. Abrí y entró un desconocido. Era un hombre alto, de rasgos imprecisos. No soy miope, por tanto no fue culpa de la miopía que yo los viera así. Todo su aspecto era de pobreza decente. Iba de gris y traía una valija gris en la mano. Enseguida sentí que era extranjero. Al principio lo creí joven; después advertí que me había engañado su pelo aviejado, como rubio. En el curso de nuestra conversación, que no duraría una hora, supe que procedía de las Órcadas. Mientras hablábamos no podía quitarme de la cabeza la idea de que ya nos habíamos visto antes en algún otro lugar.

Le señalé el sofá. El hombre tardó un rato en hablar. Exhalaba melancolía, como yo ahora.

—Ya no vendo biblias –me dijo.

No sin pedantería le contesté:

—En esta casa no hallará ninguna, así que como puede ver ha venido al lugar apropiado.

Al cabo de un silencio me contestó.

—No vendo biblias, pero puedo mostrarle algo que tal vez le interese. Lo adquirí en los confines de Amritsar.

—¿En Amritsar? Hace algunos años estuve allí. Quizás fue ese el lugar donde le vi por primera vez.

—No sé. Para serle sincero también usted me recuerda a alguien, aunque a alguien más viejo, cosa extraña y del todo imposible. Pero no me haga caso, tal vez rememore en usted a un antiguo cliente. De un tiempo a esta parte soy incapaz de afinar bien mis recuerdos.

Abrió la valija y la dejó sobre la mesa. Era un estuche largo y delgado, forrado de cuero y tela. Sin duda había pasado por muchas manos.

—¿Se trata de un taco de billar o de un florete? Mucho me temo que tiene que

2 ¿Debería decir tal vez: más irreales que los del segundo?

ser difícil encontrar algo así en la ciudad de la que me habla –le dije.

Lo abrí. En efecto se trataba del estuche de un taco, pero no era un bastón lo que se alojaba en el surco de terciopelo. Un hilo brillante y rectilíneo colmaba toda su longitud. Pensé que al cogerlo conservaría la tensión, pero cuando lo pellizqué para sacarlo del hueco me sorprendieron su docilidad, casi líquida, y su extrema finura que lo hacía apenas visible. Colgado de mi índice gravitó lacio como lo haría una cadena de incontables y diminutos eslabones, pero al recorrerlo de punta a punta las yemas de mis dedos no percibieron en él ningún enlace. Nunca habría podido imaginar que algo tan liviano y sutil pudiera comportarse así. Me preguntaba qué podía ser. Para decir alguna cosa a punto estuve de manifestar que era una cuerda de guitarra, pero en el último instante me acordé de su origen y me corregí:

Un hilo brillante y rectilíneo colmaba toda su longitud.

—¿Una cuerda de sitar?

—Podría decirse así.

—Bueno, si no lo es no sé qué otra cosa puede ser.

—Un cabello. Fíjese en el material.

Me acerqué el hilo hasta que los ojos desenfocaron la mirada. Era tan poco tangible que no podía decidir si era de crin, de tripa o de acero. Perplejo, se lo pregunté:

—Lo llaman el cabello de plata aunque nadie sepa con exactitud si lo es.

—Lo llaman el cabello de plata aunque nadie sepa con exactitud si lo es.

—Tal vez mirándolo por un microscopio.

Sonrió y bajó la mirada como quien ha de repetir una historia por enésima vez:

—Ya lo examinaron en Delhi.

—¿Y qué vieron?

—Lo mismo. Se supone que las lentes tenían que aumentar su grosor mas el cabello permaneció igual.

¿Me estaba tomando el pelo? En cualquier caso conviene andarse con ojo con todo lo procedente del subcontinente.

—¿Me permite afinarlo?

Me respondió con un gesto y una sonrisa burlona que en aquel momento no supe interpretar.

Sustituí la prima de mi guitarra por aquel cabello nunca visto y giré la clavija para afinarlo. De reojo le veía que me observaba y tuve la impresión de que yo no era el primero en vivir aquella escena. Su cara reflejaba la paciencia y resignación propias del conocedor del desenlace. Cuando me pareció que la cuerda estaba un poco más tirante me decidí a pulsarla. La nota que emitió fue grave, lánguida, un lamento claro y limpio. Fue entonces que el desconocido me dijo:

—Escúchela bien. Ya no la oirá nunca más.

Había una amenaza en la afirmación, pero no en la voz.

Al pulsarla de nuevo sonó más grave aún, efecto habitual en las cuerdas nuevas o en desuso. Tenía que afinarla enseguida si no quería olvidarme de la primera. Fue en balde. Cuanto más creía que me aproximaba al sonido anterior notaba o bien que el color no era el mismo o bien que no había acertado con precisión suficiente el grado de tensión. El error cometido era muy pequeño, menor que un octavo de tono, pero a pesar de oírlo me resultaba del todo imposible corregirlo. Entre tanto, el sonido primigenio empezaba a evaporarse de mi mente. Enfadado, giré y giré la clavija sin parar. Sólo me detuve minutos después, cuando un nido enorme se había formado en el clavijero. Mientras tanto la cuerda apenas mostraba signos de haberse tensado. Para ocultar mi desconcierto, le dije:

—¿Se trata de una cuerda mágica?

—No, simplemente es así. Por mucho que la estire no logrará romperla.

—¿Y si la corto?

—No importa. Entonces cada pieza heredará la misma virtud. Puede hacer seis cuerdas de este cabello para vestir su guitarra. ¡Qué digo seis, tantas como quiera!. Aunque lo corte en pelillos de un milímetro estos poseerán la infinita elasticidad del cabello entero.

Luego bajó el tono de voz como para confiarme un secreto:

—Lo adquirí en un pueblo de las montañas, a cambio de unas rupias y de la última de mis biblias, la de Wiclif en letra gótica. Su poseedor no sabía tocar. Supongo que en el cabello vio una reliquia. Me contó que perteneció a un gurú sij que había alcanzado la iluminación. Lo llamaba el cabello de plata, porque los sijs llaman *the silver cord* a la conexión más delicada y sutil que une el cuerpo físico con los planos superiores del espíritu. Sólo cuando morimos se rompe. Por lo tanto su vida es tan breve o larga como la de nuestro cuerpo. Algunos maestros indios son capaces de abandonar temporalmente su cuerpo y adoptar otros estados de consciencia. Es el cordón de plata el que los mantiene ligados al mundo, gracias a él pueden ir y venir una y otra vez sin que importe la distancia a la que se halle el plano espiritual que visitan porque el hilo puede estirarse a voluntad y sin límite.

—Esto no puede ser.

—No puede ser, pero es. Si quiere puede quedarse aquí sentado en su sofá con un extremo del cabello entre los dedos. Yo me iré con el otro extremo hasta donde quiera. Podría dar la vuelta al planeta y encontrarme de nuevo aquí con usted sin que el cabello apenas hubiera aumentado su tensión.

—Usted es religioso, sin duda.

—Sí, soy presbiteriano. Mi conciencia está clara. Estoy seguro de no haber estafado al nativo cuando le di la palabra del señor a trueque de su pelo diabólico.

Le aseguré que no tenía nada que decir al respecto y le pregunté si estaba de paso por estas tierras. Me respondió que en unos días pensaba volver a su patria. Fue entonces cuando supe que era escocés, de las islas Órcadas. Le confesé que a Escocia yo ni la conocía ni le tenía especial estima.

Mientras hablábamos mis dedos seguían explorando y jugando con el cabello elástico. Con falsa indiferencia le pregunté:

—¿Usted se propone ofrecer este curioso ejemplar a un museo?

—No. Se lo ofrezco a usted –replicó, y fijó una suma elevada.

—¿Por qué a mí?

—La naturaleza del objeto así lo requiere: usted es músico y matemático. Por eso he venido.

—¿No será usted de los que opinan que ambas disciplinas están estrechamente ligadas, verdad?

—Perdone que le corrija. Yo diría *íntimamente* ligadas.

—Tanto da. Yo no lo creo así.

—Entonces vive usted, perdóneme el atrevimiento, en un absurdo.

—Posiblemente, pero ello me concede el privilegio de opinar con lo que se llamaba antes conocimiento de causa. Reconozco que las bases de la música se cimientan en un tipo de estructura susceptible de ser estudiado desde un punto de vista abstracto o matemático. No es nada del otro mundo pues ocurre con la mayoría de las cosas. Incluso admito que partiendo de estas bases estructurales pueden componerse obras maestras. Pero al hacerlo así el compositor trabaja los sonidos como un herrero en su fragua, como un científico en su laboratorio y no me negará que es otra la esencia de la música.

—Acaba de explicarse a sí mismo el motivo de mi visita.

Le contesté, con toda sinceridad, que agradecía su consideración, pero que la cantidad exigida era inaccesible para mí y me quedé pensando. En pocos minutos había urdido mi plan.

—Le propongo un canje –le dije–. Usted obtuvo ese ejemplar por unas rupias y por su última biblia; yo le ofrezco el monto de mi sueldo, que acabo de cobrar, y dos libros: la *Astronomía* de José Comas Solá del año 57, el libro que me incitó a iniciarme en el estudio de la matemática, y el *Liber Embadorum* de Abraham bar Hiyya Ha-Nasi, la primera álgebra escrita en Europa por el matemático y astrónomo barcelonés del siglo XI. No puedo ofrecerle ejemplares más apreciados.

—El mejor regalo es el que más nos duele hacer –murmuró.

Fui a buscarle el dinero y los libros.

—Trato hecho, pero guárdese el dinero –me dijo.

Me asombró que no regateara y que se arrepintiera de haberme pedido dinero. Más tarde comprendí que había entrado en casa con el ánimo de desprenderse del cabello.

Charlamos de la India, del encanto de Oriente y de los cambios económicos y sociales que allí se avecinan. Era ya de noche cuando se marchó. No lo he vuelto a ver ni sé su nombre, pero estoy seguro de haberlo visto o leído antes en algún lugar. Al despedirse tuve la certeza de que él también lo sabía.

Me acosté y no pude pegar ojo. A las tres o las cuatro de la madrugada encendí la luz y examiné otra vez el cabello. Había en él algo que me resultaba conocido, familiar. Estuve dándole vueltas al coco durante un buen rato hasta que al fin cayó: el *continuo*. Un escalofrío me subió por el espinazo. ¿Era posible que aquel cabello casi imperceptible fuera un pedazo de recta real? ¿Quién había bautizado como reales los números menos tangibles? ¿Quizás fue alguien que conocía la existencia de objetos como el que yo acababa de obtener? Sin duda soñaba. Tenía que estar soñando. Me mordí el labio inferior hasta sangrar. Me acordé de *El Libro de Arena*. ¿Quién sabe si Borges mintió y ni el vendedor ni el libro existieron nunca

¿Era posible que aquel cabello casi imperceptible fuera un pedazo de recta real? ¿Quién había bautizado como reales los números menos tangibles? ¿Quizás fue alguien que conocía la existencia de objetos como el que yo acababa de obtener?

fuera de su imaginación? Igual que los objetos matemáticos siempre habían existido en las mentes de sus pensadores. *Pienso, luego existo*, dijo el filósofo. Y lo que pienso, ¿también existe? Si es cierto, entonces puedo ser un pensamiento y existir en la mente de alguien. ¿Cómo distinguirme de ese otro yo pensado? *Círculos ruinosos* que encierran y cobijan la locura. ¿Seguro que no estaba soñando? ¿Estaba convencido de que la sangre que manaba de mi labio no era soñada? Pero alguien me había visitado y vendido el cabello. De esto no cabía duda porque poseía una prueba por muy extraña que fuera. Al fin y al cabo no debería sorprenderme de ver cosas como aquella acostumbrado como estaba a convivir a diario con *espacios de Banach, grupos de Lie, geometrías de Lobachevsky, conjuntos de Mandelbrot* y otros monstruos. Al revés, debería estar contento de toparme al fin con un ejemplar vivo de aquellas abstracciones. Pasé en vela el resto de la noche, pensando:

Se acostumbra a representar $\mathbb{R}$ como una recta, un segmento para ser precisos, de puntos que se suponen ínfimos y bien enganchados los unos con los otros, sin resquicios:

$\mathbb{R}$

¿Es ésta una imagen adecuada de $\mathbb{R}$? Al mirar este segmento, ¿de qué manera pensamos en él? Cuando vemos un segmento nos lo imaginamos como una hilera de puntos bien dispuestos. Tan minúsculos y pegados que si hacemos una ampliación de algún trozo de dicho segmento tendremos exactamente la misma visión:

$\mathbb{R}$

[0, 1]

¿De verdad podemos imaginar que por grande que sea la ampliación el segmento no cambiará de aspecto? Para dibujar segmentos el lápiz, bolígrafo, tiza, pincel, lo que sea, recorre una longitud de un extremo al otro de la hoja, mesa, pizarra o cualquier superficie. Al trazar el segmento la punta del instrumento pasa por muchos puntos de los infinitos que también forman el área dónde se escribe, y los señala de manera ordenada, uno tras otro. Si hemos de ser sinceros hemos de reconocer que representando $\mathbb{R}$ de esta manera nos hacemos la idea de que ¡dibujamos $\mathbb{N}$ de forma que no quede ningún espacio entre los números que lo forman! Prueba de esto es la sorpresa que tenemos al efectuar las ampliaciones mencionadas. Si hago un gráfico de $\mathbb{N}$, por muy juntos que coloque sus puntos, al ampliar una parte, ésta mostrará espacios entre ellos:

[1, 100]

No así en $\mathbb{R}$. Una imagen más apropiada para él sería la de una cinta elástica. Un elástico puede aumentar o disminuir su longitud sin perder ni adquirir punto alguno. Aún así el elástico Real es un poco especial: puede estirarse a voluntad hasta el infinito sin perder grosor (porque no lo tiene) ni romperse. Difícil imaginárselo, pero fácil de probar porque mediante la función

$$\begin{array}{rcl} f:(-1,1) & \rightarrow & R \\ x & \rightarrow & f(x)=\dfrac{x}{1-x^2} \end{array}$$

el intervalo (-1,1), un pedacito del continuo, se estira indefinidamente:

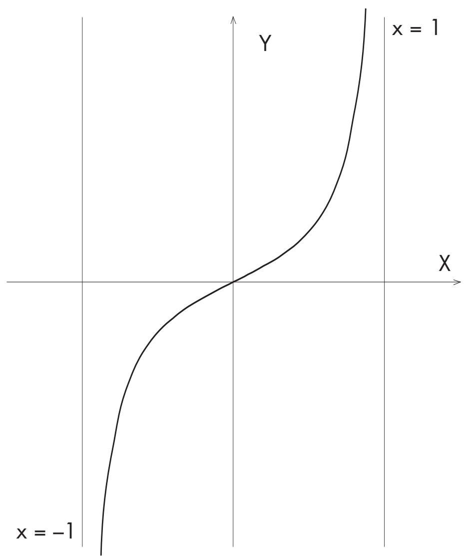

Figura 1

> *Y lo que pienso, ¿también existe? Si es cierto, entonces puedo ser un pensamiento y existir en la mente de alguien. ¿Cómo distinguirme de ese otro yo pensado?*

> *…debería estar contento de toparme al fin con un ejemplar vivo de aquellas abstracciones.*

Cualquier parte de $\mathbb{N}$ posee un primer elemento, entre dos números naturales consecutivos (he aquí el quid de la cuestión) no hay otro. Así el número natural más pequeño del intervalo (1, 100), el menor de todos ellos es el 2. No ocurre lo mismo ni tan siquiera con los racionales. ¿Cuál es el menor número racional del intervalo (0, 1)? No lo podemos ni nombrar porque si le llamamos A resulta que A/2 aún es un racional más pequeño: tenemos una contradicción que proviene de suponer su existencia. Pensemos en una cinta elástica sostenida entre dos puntos: tampoco tiene primer elemento dado que siempre puede estirarse un poquito más y aquel que antes parecía ser el primero se ha alejado ahora del extremo. Por desgracia las cintas elásticas llegan a romperse si se las tensa demasiado, en cambio $\mathbb{R}$, como el cabello de plata, no. En el gráfico anterior se ve de hecho cómo mediante la función f se ha deformado el segmento-intervalo (-1, 1) hasta transformarse en la curva.

Otra dificultad a la hora de visualizar los conjuntos de números como $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, etc. es que éstos representan la esencia espacial en el mundo de las matemáticas y estamos acostumbrados a ver el espacio siempre colmado de materia. Al pensar en un cubo muy probablemente nos haremos la idea de una caja vacía, de paredes finísimas y transparentes, ¿pero está realmente vacía?, ¿no contiene nada?, ¿ni aire siquiera? Todo lo que vemos en el mundo es visible por la materia que contiene, es ésta la que le da forma. Como visualización del espacio serviría un cubo cuya ilimitada docilidad le permitiera ser deformado en cualquier dirección, como el segmento que representaba $\mathbb{R}$, y hueco por completo, lleno de nada: una bolsa que cuando se vacía no ocupa lugar alguno, pero en la que cabe todo el Universo gracias a su ilimitada elasticidad.

No hemos de imaginarnos $\mathbb{R}$ como una hilera tupida de puntos suspensivos. No lo es.

…y después el recelo de que el cabello no fuera infinitamente elástico.

No mostré a nadie mi tesoro. Al goce de poseerlo se agregó el temor de que lo robaran, y después el recelo de que el cabello no fuera infinitamente elástico. De noche, durante los breves intervalos que me concedía el insomnio, soñaba con él. Soñaba que ataba un extremo a una pata de la mesa del comedor, salía de casa con el otro en la mano y corría calle abajo hasta quedar sin resuello. El cabello no mostraba indicios de tensión. ¿Era que se había desatado del otro lado? Volvía atrás y habiendo comprobado que no era el caso me despertaba empapado de sudor.

No quería ser la víctima de mis inquietudes ni sentirme ligado a aquella cuerda de afinación imposible. Recordé haber leído que el mejor sitio para ocultar una hoja es un bosque. Aproveché uno de los lapsos de insomnio para perderlo en la frondosa cabellera de mi amada. No encendí la luz ni traté de escudriñar entre las sombras qué jirones lo habían alojado. Por la mañana coincidimos en el baño. Ella se quejó:

—¡Vaya! Me ha salido otra cana.

Sin mirarla, le dije:

—Ya lo sé. Es preciosa.

Miquel Albertí
IES Pau Vila
Sabadell (Barcelona)