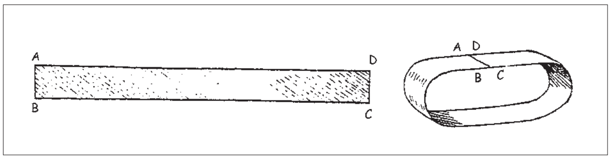
SUMA 36
febrero 2001, pp. 5-15

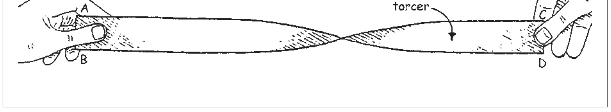
La magia de las matemáticas*

Brian Bolt

EXISTEN MUCHAS FORMAS de estimular el interés de los niños hacia las matemáticas. A una edad temprana éstos son, por naturaleza, curiosos y continuamente formulan la pregunta ¿por qué? Nuestra enseñanza a menudo mata su interés y su pregunta se transforma en ¿para qué tenemos que hacer esto? Durante el tiempo que voy a estar con vosotros compartiremos algunas ideas que estimulan el pensamiento matemático y que, sin duda, crean interés. Alguno de vosotros puede que ya las conozca, pero espero que la mayoría de estas ideas sean nuevas y las podáis añadir a vuestro repertorio.



¿Cuál fue la última vez que contásteis a vuestros alumnos las propiedades mágicas de una cinta de Möbius? Cuando una tira de papel larga y delgada se une por sus extremos como una correa, ésta tiene claramente dos aristas y dos caras distintas. Si usamos unas tijeras para cortarla longitudinalmente, se formarán dos cintas como la original. Ahora observemos la cinta que se forma cuando torcemos 180° un extremo de la tira de papel antes de unir sus extremos.



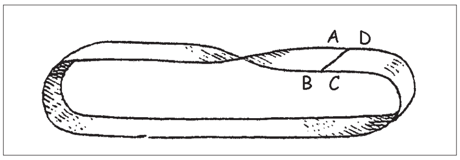
Curiosamente, esta nueva cinta tiene una sola arista. Si una mosca decidiera caminar por la arista de la tira de

* Conferencia leída con motivo del proyecto TIEM98 patrocinado por el Centr de Recerca Matemàtica del Institut d'Estudis Catalans.

Traducción: Nùria Planas

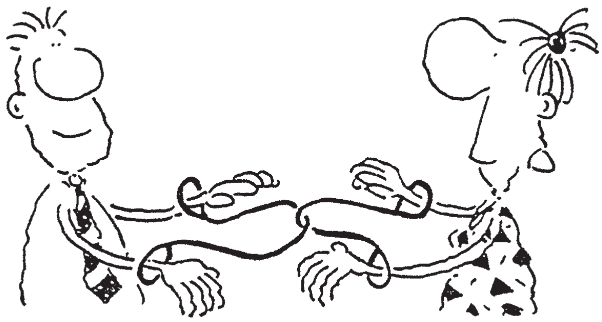
ARTÍCULOS

papel, llegaría al punto de partida después de darle la vuelta dos veces siguiendo la única arista. Si empiezo a colorear la superficie y espero encontrar una parte interior y una parte exterior, me llevaré una gran sorpresa puesto que la cinta tiene una sola cara continua. ¿Qué sucederá si la corto longitudinalmente por la mitad?



¿Os ha sorprendido? ¡Hemos obtenido una única cinta dos veces más larga que la original! Ahora vayamos a por otra sorpresa. Esta vez cortaremos la cinta de Möbius longitudinalmente a un tercio de su arista, por lo que sólo volveremos al punto de partida después de dos circuitos. ¡Magia! Tenemos dos eslabones de una cadena, uno de los cuales es dos veces más largo que el otro. ¿Habríamos sido capaces de predecir el resultado? Bien, el lazo más largo de la cinta está formado por las dos aristas de la cinta de Möbius original y el lazo corto es la cinta Möbius mucho más estrecha.

Otro divertido truco de matemáticos consiste en atar juntas a dos personas mediante dos trozos de cuerda (como puede verse en la figura adjunta) y proponerles que traten de separarse sin desanudar ninguno de los nudos.



Es muy posible que los participantes acaben hechos un verdadero lío, pero con suerte podré demostraros lo fácil que resulta separarlos. Supongamos que las dos personas que aparecen en la figura son Jordi y Nuria. Nuria debe tomar su cuerda por la mitad y pasarla bajo el lazo de cuerda que rodea la muñeca derecha de Jordi, por la parte inferior de la muñeca y en la dirección que va del codo a la mano. A continuación, debe pasar un lazo de la cuerda sobre la mano de Jordi hacia la parte superior de la muñeca. ¡Ahora debe ser capaz de irse, separada por fin de Jordi! Sus propias muñecas estarán aún atadas pero ya no estará unida al otro. Nótese sin embargo, que si Nuria hubiese intentado pasar su cuerda a través del lazo que rodea la muñeca izquierda de Jordi, terminaría con su cuerda más enredada con la de éste que antes.

De hecho, hacer matemáticas está relacionado con la formulación de preguntas.

$$\begin{array}{r} 621 \\ -\ 126 \\ \hline 495 \\ +\ 594 \\ \hline 1089 \end{array}$$

Experimentos como los anteriores deberían plantear una pregunta importante: «¿Qué sucede si…?». De hecho, hacer matemáticas está relacionado con la formulación de preguntas.

Ahora vayamos a por un truco numérico que supongo que todos conocéis, pero que siempre es fascinante para alguien que lo ve por primera vez. Tomemos cualquier número de tres dígitos, *abc*, y luego formemos otro número de tres dígitos cambiando el orden de los dígitos del primer número, *cba*. Restemos el número menor del mayor para encontrar la diferencia, que es otro número de tres dígitos, *pqr*. Sumemos *pqr* y *rpq* y el resultado es siempre 1089. Bueno, no siempre, ya que si al principio $a = c$, $pqr = 000$ y el truco no funciona.

¿Por qué funciona en la mayoría de los casos? ¡Probadlo con otro ejemplo! La solución puede explicarse fácilmente a través del álgebra pero el siguiente razonamiento nos proporciona una nueva visión:

$$621 - 126 = 601 - 106 =$$

$$= (6 \times 99 + 6 + 1) - (1 \times 99) + 1 + 6 =$$
$$5 \times 99 = 495$$

En este paso el dígito de las decenas es siempre 9 y los dos dígitos exteriores suman 9, por tanto, el número que se forme intercambiando la posición de los dígitos tiene la misma propiedad y es también un múltiplo de 99. Si pensamos veremos que la suma final siempre será

$$11 \times 99 = 1089.$$

Intentar extender este patrón a números de cuatro dígitos no es tan fácil ya que existen distintos resultados posibles, siendo, curiosamente, 10890 uno de ellos.

Si tuviera que dar una definición de Matemáticas diría algo parecido a esto:

Las Matemáticas son el reconocimiento, el análisis y el uso de patrones.

Quizás ya conocéis mis «Cartas de Lectura Mental», pero dejadme mostraros cómo funcionan. Pensad en un número del 1 al 31. Las cinco cartas que tengo aquí contienen estos números, pero cada carta sólo contiene la mitad de ellos. Cuando os muestre una carta tendréis que decir «SÍ» si contiene vuestro número y «NO» si no lo contiene. Seré capaz de deciros inmediatamente el número que habéis pensado. ¿Cómo funciona? Aquí tenéis las cartas:

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

2	3	6	7
9	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

Imaginad que tenéis una balanza pero sólo 5 pesas de: 1, 2, 4, 8 y 16 kg. Todos los pesos entre 1 kg y 31 kg pueden pesarse gracias a una única combinación de estas pesas. Tomemos 29 kg como ejemplo:

29 kg = 16 kg + 8 kg + 4 kg + 1 kg

ninguna otra combinación de pesas dará 29 kg.

Cada una de mis cinco cartas corresponde a una pesa, y los números que hay en ellas me dicen cuándo debo usar una pesa para una cantidad concreta. Por ejemplo, para 29 kg encontraréis que el 29 está en la carta que empieza por 16, en la que empieza por 8, en la que empieza por 4, en la que empieza por 1, pero no en la que empieza por 2.

Cuando vosotros decís «SÍ» a una carta, yo añado ese peso. Cuando decís «NO», ignoro ese peso. Para decidir qué números deben ir en cada carta sólo se debe hacer una tabla como la siguiente… y observad cuan interesante es el patrón de marcas que os ayudará a completarla rápidamente:

	16	**8**	**4**	**2**	**1**
1					℘
2				℘	
3				℘	℘
4			℘		
5			℘		℘
6			℘	℘	
7			℘	℘	℘
8		℘			
9		℘			℘
10		℘		℘	
11		℘		℘	℘
12		℘	℘		
13		℘	℘		℘
14		℘	℘	℘	
15		℘	℘	℘	℘
16	℘				
17	℘				℘

856413
374938
143586
530227
+ 469772
2374936

A continuación vamos a ver un truco de sumas. Tomemos dos números de 6 cifras. Parece justo que yo también añada uno. Ahora quiero que me deis otro número de 6 cifras y yo también añadiré uno e inmediatamente os daré el resultado de la suma de los cinco números. ¿Quiere alguien comprobar mi suma? ¿Cómo he podido hacer un cálculo tan rápido?

Ahora pensad en lo que conocía cuando escribí mi número. Había escrito dos de vuestros números. Escribí el mío fijándome en uno de vuestros números y relacionándolo con él. Si os digo que el mío está relacionado con vuestro primer número, ¿podéis ver la conexión? Bien, para formar mi número le resté a 9 cada uno de los dígitos de vuestro primer número; por lo tanto, 856413 + 143586 = 999999 = 1000000 – 1. De igual modo, escribí mi segundo número restando 530227 de 999999, por lo que 530227 + 469772 = 999999 = 1000000 – 1.

Con todo esto, cuatro de los cinco números que deben sumarse dan 2000000 – 2, por lo tanto la respuesta es 2 millones más el número no utilizado menos 2. Las parejas de números que se añaden para formar una secuencia de nueves se llaman *complementos a nueve*, y pueden usarse ingeniosamente para realizar una resta.

Supongamos que quiero restar 38769 de 72134. Sustituyo el segundo número por su complemento a nueve y hago una suma. Luego tacho el 1 que está al principio de la respuesta y lo añado a la cifra de las unidades. El número resultante es la respuesta que se requería. Para entender el porqué, debéis ver que lo que he hecho es equivalente a 72134 + (99999–38769) – 100000 + 1. Este método funciona para cualquier resta y se conoce como la *resta a partir de la realización de una suma complementaria*.

72134	72134
– 38769 →	+ 61230
	(1)33364
	+ 1
	33365

Ahora voy a contaros otro truco numérico. ¿Me dará alguien un número de seis cifras?

Voy a sumarlos por parejas pero sólo anotaré la cifra de las unidades, y lo haré línea a línea hasta obtener un solo dígito. Pero antes de empezar voy a predecir el número que va a quedar al final. A partir del número que me habéis dado espero terminar en el 9. Probémoslo de nuevo con otro número de seis cifras. ¿Alguien quiere darme un número? ¿Cómo lo hago?

5		7		4		2		8		9
	2		1		6		0		7	
		3		7		6		7		
			0		3		3			
				3		6				
					9					

Bien, los dos números del centro no contribuyen para nada en la obtención del número final, por tanto, podemos ignorarlos. Si los dos números siguientes, a derecha o izquierda respectivamente, son ambos impares o pares también podemos ignorarlos y la respuesta final es la suma de los dos números exteriores. No obstante, si los dos dígitos son uno par y el otro impar, entonces debemos sumarle 5 a los dígitos exteriores para obtener la respuesta final.

a		b		c		d		e		f
	a+b		b+c		c+d		d+e		e+f	
		...		...		...		...		
			...		...		...			
				...		...				
					a+f+5(b+e)+10(c+d)					

Esto queda claro cuando analizamos el truco algebraicamente y aparece el modelo del triángulo de Pascal mostrando cómo, de hecho, los dígitos del centro se multiplican por 10 y los que están a su lado por 5.

Esta idea la recogí en Barcelona en noviembre de 1995 cuando estaba dando una conferencia en el Museo de la Ciencia.

Los dos patrones numéricos bidimensionales siguientes pueden analizarse de muchas maneras. He tapado algunos números y la tarea consiste en decidir cuáles son.

92	15	37	59	81	4	26	48	70
11	33	55	77	99	22	44	66	88
29	51	73	95	18	40	62	84	7
47	69	91	•	36	58	80	3	25
65	87	10	32	54	76	98	21	43
83	6	28	50	72	94	17	39	61
2	24	46	68	90	13	•	57	79
20	42	64	86	9	31	53	75	97
38	60	82	5	27	49	71	93	16
56	•	1	23	45	67	89	12	34
74	96	19	41	63	85	8	30	52

26	59	15	48	4	37	70
5	38	71	27	60	16	49
61	17	50	6	•	72	28
40	73	29	62	18	51	7
19	52	8	41	74	30	63
75	31	64	20	53	9	42
54	10	43	76	32	65	21
33	66	22	55	•	44	77
12	45	1	34	67	23	56
68	24	57	13	46	2	35
47	•	36	69	25	58	14

Esta idea la recogí en Barcelona en noviembre de 1995 cuando estaba dando una conferencia en el Museo de la Ciencia. Siempre que la he presentado ante una audiencia, parece que encuentran los números que faltan de forma distinta. Tomemos, por ejemplo, el número que está en en la cuarta fila y la cuarta columna. ¿Descubrísteis que se trata del 14? Si observáis las diferencias entre los números, restando de izquierda a derecha, veréis que siempre es 22, pero luego, cualquier número que sobrepase el 99 debe reducirse, restándole 99, como si fuera una esfera de reloj con los números del 1 hasta el 99.

Si observamos los números de arriba a abajo en las columnas veremos que se incrementan en 18, mientras que en las diagonales, de izquierda a derecha, se incrementan en 40. No obstante, el patrón más fácil se encuentra en las diagonales superiores de izquierda a derecha, donde los números se incrementan en 4. Así fue como contruí el patrón y también la forma más rápida de encontrar los números que están ocultos.

a	a + 22

a
a + 18

a	
	a + 40

	a + 4
a	

Vosotros mismos podéis construir un patrón similar, empezando con el número 1 donde queráis y recorriendo la diagonal NE. Cuando lleguéis al extremo se considerará que es continua en el extremo opuesto. El segundo patrón, que incluye los números del 1 al 77, se contruyó de forma pareciada, pero aquí saltando cada vez dos cuadros antes de sumar 8.

Voy a presentaros un juego muy simple. En primer lugar querría que dos de vosotros salierais aquí delante a jugar. ¡Os prometo que no será difícil! El juego se llama, *tres cartas total 18*.

En mi mano tengo las cartas 2, 3, 4, 5,… hasta el 10 de diamantes. No se necesitan las cartas para jugar, se puede simplemente escribir los números del 2 al 10 en un trozo de papel. Dos jugadores tomarán por turnos una de las cartas. La primera persona que tenga tres cartas que sumen 18 es la ganadora. Coger un 10 o un 8 no es una buena jugada, puesto que se deben tener tres cartas que sumen 18, aunque es posible haber cogido más de tres cartas antes de tener tres cuya suma sea 18.

9	**2**	**7**
4	**6**	**8**
5	**10**	**3**

Anotaré las cartas que escogéis para que podáis ver como funciona el juego. Cuando lo realizo con audiencias británicas, los hombres tienden a escoger los números más altos para empezar, mientras que las mujeres empiezan con los números más bajos. Pero, ¿cuáles son los mejores números, si es que los hay, para empezar el juego? ¿Cómo lo podemos descubrir?

Después de haber comprendido el juego estoy seguro de que muchos de vosotros querréis probarlo. Me gustaría hacerlo pero no tenemos demasiado tiempo y quiero compartir muchas más ideas con vosotros. Para analizar este juego parece claro que, en primer lugar, debéis buscar todas las combinaciones de tres cartas que sumen 18. Los niños encuentran esto bastante difícil, ya que no tienen ninguna estrategia para saber cuándo las han encontrado todas.

Mi estrategia es la siguiente: empiezo con el 10, el número más alto y busco cuál es el número más alto que le puedo añadir para sumar 18. Dado que el número más pequeño es 2, 6 debe ser el número más alto. Después reduzco 6 a 5 e incremento 2 en 3, y sigo teniendo un total de 18. No puedo repetir este proceso, luego escojo el 9 y le sumo el número más alto posible, que es 7. Luego procedo como antes, es decir, le resto 1 al segundo número y le sumo 1 al tercero, hasta que no puedo más. Después hago lo mismo con el 8.

10 + 6 + 2
10 + 5 + 3
9 + 7 + 2
9 + 6 + 3
9 + 5 + 4
8 + 7 + 3
8 + 6 + 4
7 + 6 + 5

De este modo encuentro que sólo hay 8 posibles combinaciones ganadoras. Si las analizamos con más detalle veremos que puede ser útil observar con qué frecuencia aparecen los números del 2 al 10 en una combinación ganadora. Los números 2 y 10 y también 4 y 8 sólo aparecen en dos de las ocho combinaciones ganadoras, pero el 6 aparece en 4, es decir, en la mitad de combinaciones ganadoras. Por tanto, el jugador que escoja el número 6 controla automáticamente la mitad de las posibilidades ganadoras.

Si esto no os resulta suficiente para ganar, fijaros en el cuadrado mágico de la izquierda.

Estoy seguro de que ya os habíais encontrado con los cuadrados mágicos anteriormente. Éste contiene los nueve números del 2 al 10 y la suma de los tres números en cada fila, cada columna y cada diagonal es 18. Por lo tanto, las combinaciones ganadoras del juego de cartas corresponden a las filas, las columnas y las diagonales del cuadrado. Cada vez que escogéis un número estáis utilizando una de las casillas del cuadrado y para ganar necesitáis tener tres en raya. Por lo tanto, lo que estáis haciendo es jugar al *tres en raya*.

Si sabéis cómo fabricar cuadrados mágicos 3 × 3 podéis hacer tantos conjuntos de cartas como queráis para jugar con vuestros alumnos. Si deseáis, podéis poner fracciones o números negativos y hacer que el cuadrado, y por consiguiente el juego, sean tan difíciles como queráis.

Veamos lo sencillo que es construir un cuadrado mágico 3 × 3. El secreto es saber que el total mágico debe ser tres veces el número que pongamos en el centro. Supongamos que escribimos 8 en el centro, entonces el total mágico debe ser 24. A continuación escojo otros dos números y los sitúo en las dos esquinas superiores. Supongamos que he elegido el 2 y el 9, entonces el resto del cuadrado debe llenarse teniendo en cuenta que todas las líneas deben sumar 24. Por tanto, ahora el juego se jugaría usando los números 1, 2, 3, 7, 8, 9, 13, 14 y 15 y el objetivo sería conseguir tres cartas que sumaran 24.

2		**9**
	8	

T = 24 →

2	**13**	**9**
15	**8**	**1**
7	**3**	**14**

Una propiedad interesante que comparten todos los cuadrados mágicos 3 **x** 3 es el hecho de que la suma de los cuadrados de números que se hallan en las columnas exteriores y los de las filas exteriores da el mismo resultado. En el caso anterior, por ejemplo:

$$2^2 + 13^2 + 9^2 = 4 + 169 + 81 = 254$$

$$7^2 + 3^2 + 14^2 = 49 + 9 + 196 = 254$$

y

$$2^2 + 15^2 + 7^2 = 4 + 225 + 49 = 278$$

$$9^2 + 1^2 + 14^2 = 81 + 1 + 196 = 278$$

No puedo acabar esta parte sin mostraros una prueba del hecho de que el total mágico de un cuadrado 3 × 3 es tres veces el número central. Si los números del cuadrado son *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h* y *i*, y el total mágico es *T*.

a	**b**	**c**
d	**e**	**f**
g	**h**	**i**

●		●
	/	
/		

Reconocer patrones semejantes en situaciones aparentemente distintas es una actividad crucial en matemáticas.

Entonces, tomamos las sumas de la fila central, y las dos diagonales:

$$a + e + i = d + e + f = g + e + c = T$$

y hacemos la suma:

$$(a + d + g) + 3e + (i + f + c) = 3T$$

$$T + 3e + T = 3T,$$

por lo tanto, $3e = T$.

Voy a mostraros ahora otros juegos, que a primera vista parecen ser bastante distintos, pero que si los analizamos en detalle veremos que tienen exactamente la misma estructura subyacente. Para un matemático son equivalentes al tres en raya, siguen el mismo modelo, por lo que se denominan *isomorfos*. Reconocer patrones semejantes en situaciones aparentemente distintas es una actividad crucial en matemáticas.

Diseñé el primero de estos juegos para un Taller de Matemáticas que se celebró durante unas Navidades. Dos jugadores tenían 9 cartas con palabras para escoger:

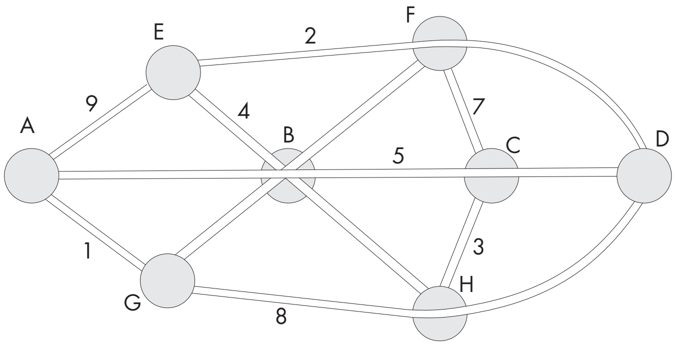
RUM	SOCK	BABY
HOLLY	XMAS	CRIB
CANDLE	TURKEYS	HOME

Por turnos debían escoger cartas, de una en una, con el objetivo de tener tres palabras con una letra en común. Por ejemplo, RUM, XMAS y HOME todas tienen una M. Este juego exige una mayor concentración que el juego numérico basado en un cuadrado mágico, aunque escogí las palabras minuciosamente para que formaran una cuadro de 3 × 3, en la que las palabras de cada fila, columna y diagonal tuvieran, tal y como muestro, una letra en común. Es importante que ninguna de las letras comunes aparezca en otras palabras, o que tres palabras que no estén en una misma fila puedan tener una letra en común.

S				E
M	**XMAS**	**RUM**	**HOME**	
Y	**BABY**	**TURKEYS**	**HOLLY**	
C	**CANDLE**	**CRIB**	**SOCKS**	
	A	R	O	

Este juego es, como el anterior, isomorfo al tres en raya. Si se tienen las palabras adecuadas, descubrir las ocho combinaciones de grupos de tres palabras con una letra común y luego ver qué palabras son más importantes es un ejercicio interesante. Estoy convencido de que podréis hacer vuestro propio juego con palabras en español.

El siguiente juego tiene una apariencia muy distinta. El mapa adjunto pretende representar ocho ciudades que están entrelazadas por nueve autopistas.



Dos jugadores sobre el mismo mapa y, por turnos, usan colores para quedarse con una de las autopistas. El primer jugador que tiene tres autopistas que conducen a una misma ciudad es el que gana. Matemáticamente puede considerarse como dual de los juegos anteriores, sólo que aquí buscamos tres líneas que lleven a un punto en lugar de tres puntos de una línea. Debemos observar que hay tres autopistas que llegan a cada una de las ciudades, que corresponderían a tres números o a tres palabras en una línea dentro de un cuadro 3×3. La autopista central que cruza cuatro de las ciudades *A*, *B*, *C* y *D*, desempeña el mismo papel que el número central de un cuadrado 3×3 ya que utiliza en una sola jugada la mitad de las ocho ciudades. Por otro lado, una autopista que une sólo dos ciudades corresponde a los números que están en el centro de los lados de un cuadrado 3×3, ya que sólo están presentes en dos líneas.

Los cuadrados mágicos me fascinan y, probablemente, han fascinado a otros muchos antes que a mí.

Los cuadrados mágicos me fascinan y, probablemente, han fascinado a otros muchos antes que a mí. El primer cuadrado mágico que se conoce es un cuadrado mágico 3×3 que contenía los números del 1 al 9 y que se atribuye al emperador chino Yu, que reinó alrededor del año 2200 antes de Cristo. En 1514 Durero hizo un grabado, *La Melancolía*, que contiene un cuadrado mágico 4×4 con los números del 1 al 16 distribuidos de tal modo que el año de su realización aparece en el centro de la fila inferior.

16	**3**	**2**	**13**
5	**10**	**11**	**8**
9	**6**	**7**	**12**
4	**15**	**14**	**1**

En total existen 880 cuadrados mágicos 4×4 distintos que contienen los números del 1 al 16 y que fueron publicados por primera vez por el francés Frénicle en 1693. ¿Cómo logró encontrarlos todos? ¡A mí me costó tanto encontrar el primero!

En primer lugar, podemos observar que el total mágico debe ser 34 ya que los números del 1 al 16 formarán cuatro filas que suman el mismo total. Por lo tanto:

$$T = (1 + 2 + \ldots + 16)/4 = 34$$

Pero lo que me fascina es observar que conjuntos de cuatro números de los cuadrados que no están ni en las filas, ni en las columnas ni en las diagonales también suman 34. Tomemos el cuadrado de Durero que acabo de reproducir y fijémonos en las posiciones de los siguientes conjuntos:

{16, 13, 4, 1} {16, 3, 5, 10}

{3, 8, 14, 9} {16, 2, 7, 9}

{5, 9, 8, 12} {5, 3, 14, 12}

¿Existe algún conjunto simétrico de cuatro números que no sume 34? La cantidad de conjuntos que suman 34 es muy grande.

Una vez que hemos encontrado una solución, ¿cómo podemos encontrar otra a partir de ella? Si cambiamos el orden de las filas, se mantiene su total, pero el total de las diagonales normalmente cambia. Lo mismo ocurre con las columnas. No obstante, hay algunas permutaciones de filas o columnas que mantienen el total de las diagonales y nos dan, por lo tanto, una nueva solución. Las tres soluciones siguientes se han encontrado intercambiando pares de filas o de columnas, o ambas, partiendo del cuadrado mágico de Durero.

5	**10**	**11**	**8**
16	**3**	**2**	**13**
4	**15**	**14**	**1**
9	**6**	**7**	**12**

3	**16**	**13**	**2**
10	**5**	**8**	**11**
6	**9**	**12**	**17**
15	**4**	**1**	**14**

10	**5**	**8**	**11**
3	**16**	**13**	**2**
15	**4**	**1**	**14**
6	**9**	**12**	**7**

Este es un comienzo alentador, pero podemos hacer algo mejor con otra de las 880 posibilidades que H.E. Dudeney describió como «Diabólicas», puesto que eran incluso mucho más mágicas que las de Durero. Imaginemos el cuadrado mágico que muestro a continuación como si estuviera en un rodillo, de modo que la fila superior desapareciera y volviera a aparecer por la parte inferior. Este proceso puede repetirse tantas veces como sea necesario hasta que la fila superior haya estado en cada una de las cuatro posiciones. Del mismo modo, el cuadrado puede enrollarse lateralmente y las columnas desaparecer por la derecha y volver a aparecer por la izquierda. Estos movimientos se pueden combinar para conseguir que el número 1 esté en cualquiera de las 16 posiciones del cuadrado y cada movimiento retiene la propiedad mágica total. A continuación muestro algunas de las posibilidades:

1	14	2	12
15	4	9	6
10	5	16	3
8	11	2	13

15	4	9	6
10	5	16	3
8	11	2	13
1	14	7	12

4	9	6	15
5	16	3	10
11	2	13	8
14	7	12	1

5	16	3	10
11	2	13	8
14	7	12	1
4	9	6	15

Otro tipo de transformación que siempre convierte un cuadrado mágico en otro también mágico es la que en este caso se representa mediante $n \rightarrow 17 - n$

16	3	10	5
2	13	8	11
7	12	1	14
9	6	15	4

Aplicado al cuadrado de Durero se genera el mismo cuadrado, mientras que a partir del cuadrado diabólico se genera otro nuevo. No obstante, el problema sigue siendo: ¿cómo puedo encontrar un cuadrado para empezar con el que pueda generar varias transformaciones?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Mi método consiste en colocar los números del 1 al 16 en orden en un cuadro 4 × 4 y después cambiar los números centrales de las filas o columnas de los lados por los diametralmente opuestos. Éste es, esencialmente, el cuadrado mágico de Durero, y quizás fue así como lo descubrió. Al intentar buscar otro punto de partida, me dí cuenta de que podía poner los números del 1 al 16 en el cuadrado llenando primero dos columnas y luego las dos restantes; después se cambian los números que están entre los vértices por sus diametralmente opuestos.

1	9	2	10
3	4	11	12
5	6	13	14
7	8	15	16

1	9	2	10
3	11	4	12
5	13	6	4
7	15	8	16

1	9	10	2
3	11	12	4
5	13	14	6
7	15	16	6

1	15	8	10
14	4	11	5
12	6	13	3
7	9	2	16

1	8	15	10
14	11	4	5
12	13	6	3
7	2	9	16

1	16	15	2
6	11	12	5
4	13	14	3
7	10	9	8

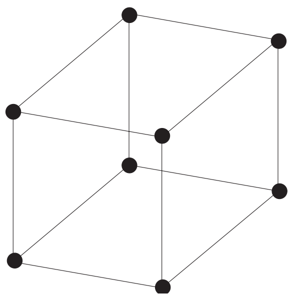
…un cuadrado mágico de 4 × 4 que está en la fachada de la Pasión del Templo de la Sagrada Familia de Gaudí.

Antes de finalizar este tema, me siento en la obligación de mostraros un cuadrado mágico de 4 × 4 que está en la fachada de la Pasión del Templo de la Sagrada Familia de Gaudí. En él, los números 10 y 14 aparecen dos veces mientras que los números 12 y 16 no están. Tiene un total mágico de 33. En este momento no tengo ninguna idea acerca del significado de la disposición de los números en el cuadrado. Sólo sé que es mágica. Por tanto, le estaré muy agradecido a quien pueda darme alguna información.

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

Otro de los temas que uso los sábados por la mañana en unas clases para niños de 13 años, cuyo objetivo es mejorar su competencia en matemáticas, está basado en el análisis y la resolución de una gran variedad de configuraciones mágicas. Para ilustrar las ideas en que se basa el curso, quisiera contaros un problema concreto, las estrategias para resolverlo y algunas de las nuevas ideas que descubrí.

Se deben poner los números del 1 al 8 en los vértices de un cubo de tal modo que la suma de los cuatro números que quedan en cada una de las seis caras dé el mismo resultado.



Es evidente que se podría buscar una solución usando inteligentemente estrategias de ensayo y error, pero es posible idear otras estrategias.

Supongamos que la suma de los cuatro vértices de cada cara sea T, entonces:

$$6T = 3(1 + 2 + 3 + \ldots + 8) = 3 \times 36$$

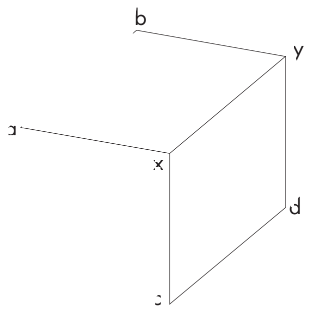
puesto que hay seis caras. Esto permite obtener el valor de $T = 18$ que es una información relevante.

Si se toman los números que quedan en dos caras contiguas. Como

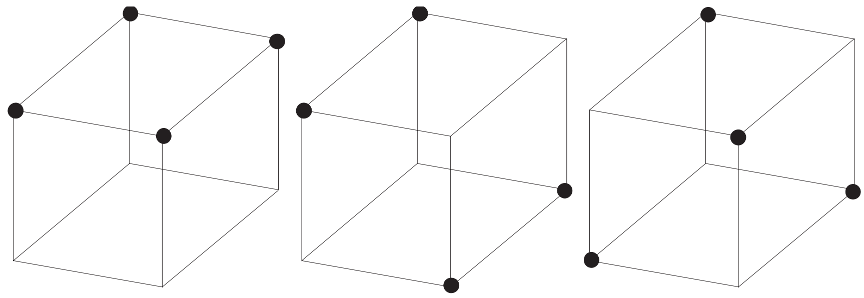
$$a + b + x + y = x + y + c + d,$$

se tiene que: $a + b = c + d$.

Podemos decir que los pares de números que están en aristas opuestas del cubo suman siempre lo mismo.



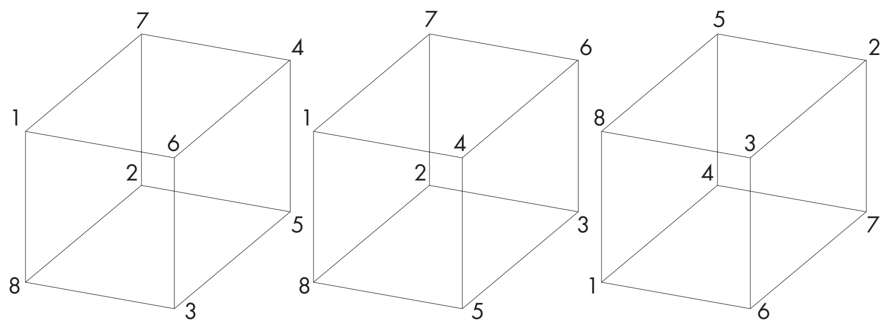
La siguiente parte de mi estrategia, que habitualmente es muy potente para solucionar problemas de este tipo, consite en considerar la posible distribución de los números primos. En primer lugar, sabemos que el total de la cara es par y necesitamos considerar sólo cómo colocar cuatro números impares en los vértices para conseguir este total. Sólo hay tres formas de hacerlo, y a partir de nuestro análisis previo, no tardaremos mucho en encontrar todas las soluciones.



La primera distribución posible con todos los números impares en una cara se debe rechazar ya que

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

y no 18. No obstante, en la segunda distribución posible, en la que los números pares se enparejan en aristas opuestas, es fácil ver que las parejas han de ser (1, 7) y (3, 5) en cierto orden ya que es la única manera de que su suma fuera igual ($1 + 7 = 3 + 5 = 8$), que es una condición necesaria. Esto hace que deban colocarse los cuatro números pares en el otro par de aristas paralelas opuestas, ordenados de tal modo que su suma sea 10. En la siguiente figura, a la izquierda, están las dos posibles soluciones:

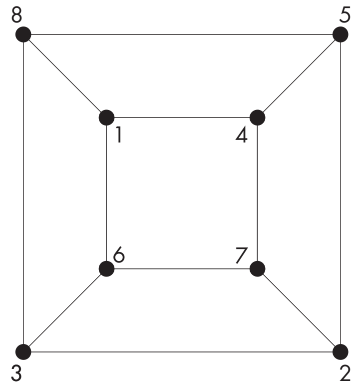


La tercera posible distribución de los números impares, en los vértices de un tetraedro regular, conduce a una tercera solución (cubo de la derecha en la figura anterior).

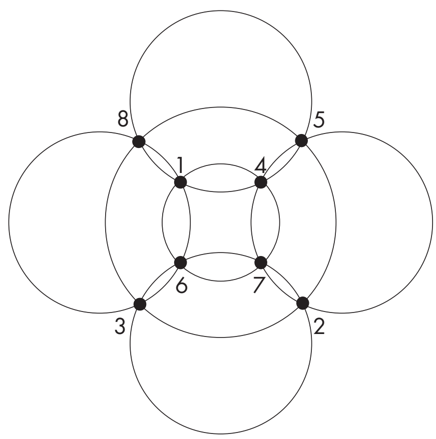
Una estrategia para generar nuevas soluciones a partir de las existentes en una configuración mágica de este tipo consiste en usar una transformación del tipo $n \to N - n$ en la que N sea el número siguiente al mayor de los números utilizados. En este caso $n \to 9 - n$ es la transformación que se necesita, aunque, en este caso, no genera ninguna solución nueva.

Hoy mientras estaba sentado en mi despacho en el CRM pensando en esta conferencia y mirando algunos de los modelos en 3D que había construido para mis conferencias sobre geometría, tuve varias ideas con las que pude visualizar una gran gama de problemas a partir del cubo, y me gustaría contároslas.

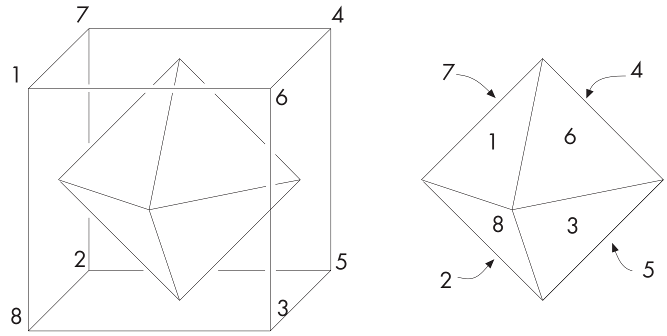
Imaginemos que estamos mirando un cubo a través de una de sus caras y proyectamos lo que vemos en un plano. Esto produce lo que se denomina un *diagrama de Schlegel*, una red en 2D que topológicamente tiene las mismas características que el cubo. Si mantenemos los mismos números que teníamos en los vértices del cubo en los correspondientes nudos de la red tendremos una figura en la que los números que están en la frontera de cada región tendrán la misma suma (18).



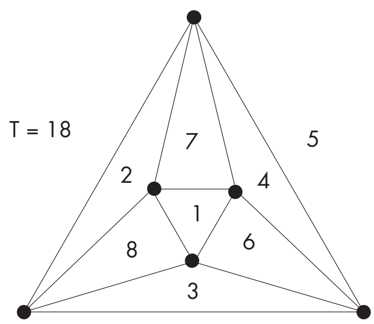
Pero al seguir reflexionando acerca de esta red se me ocurrió pensar que podría reemplazar las líneas rectas por seis círculos con la condición de que los cuatro números que quedan en cada círculo sumaran lo mismo. Existen muchas soluciones a este problema ya que en mi proyección inicial podía haber tomado cualquiera de las caras del cubo como punto de partida.



Siguiendo en esa línea, mi siguiente modelo fue un octaedro regular situado dentro de un cubo. Imaginemos que se ha formado al unir los puntos medios de las caras adyacentes del cubo. Ahora traslademos los números desde los vértices del cubo hasta las caras del octaedro. Esto nos da el modelo dual del modelo del cubo, pero ahora el problema consiste en colocar los números del 1 al 8 en las caras del octaedro para que la suma de los números de las cuatro caras alrededor de cada vértice sea la misma. El siguiente dibujo muestra una de las soluciones:



Mi siguiente movimiento fue considerar el diagrama de Schlegel del octaedro, que me dio la figura de más abajo. La distribución de los números del 1 al 8 en las regiones de esta nueva red es tal que los cuatro números que hay alrededor de cada vértice dan la misma suma. Pero esto implica tener un número (el 5 en el ejemplo) en la región exterior del triángulo. La pregunta que me formulé fue ¿cómo puedo encontrar una solución usando sólo los números del 1 al 7 en las regiones interiores para que la suma de los números en las regiones que se encuentren en un nudo de la red sea constante?



Si los números en las siete regiones son a, b, c, …, g, entonces queremos que:

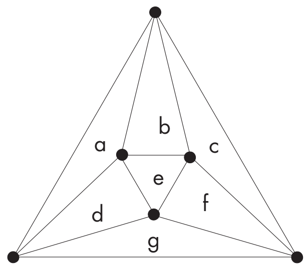
$$a + b + e + d = a + d + g$$

por lo tanto, $b + e = g$, y de igual modo,

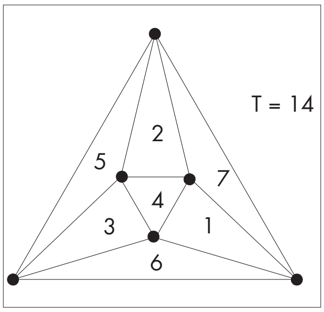
$$d + e = c$$

$$f + e = a$$

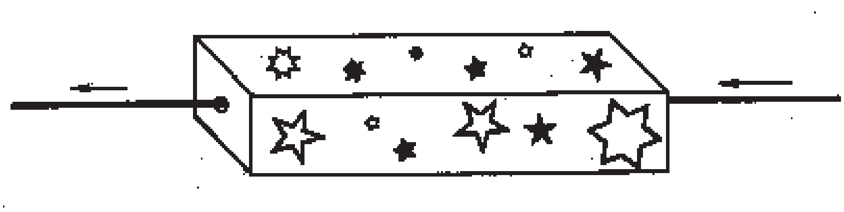
Con esta información encontramos una solución única en la que $T = 14$.



Vemos, pues, que a partir de estas ideas nace un nuevo puzzle numérico.

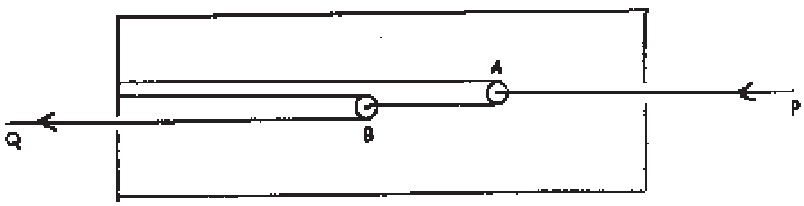


Para finalizar, veamos cómo funciona esta caja de trucos que llamo *La Fábrica de Cuerda de mi Mago*. La idea es que aparentemente fabrica cuatro veces más cuerda de la que engulle. La cuerda entra dentro de la caja por un extremo y sale por el otro lado cuatro veces más rápidamente.



Podría haber todo tipo de mecanismos dentro, como un tambor y un engranaje, pero no hay nada de eso ya que podría comprobarse que la caja es muy ligera. Hoy hice esta caja después de visitar a la secretaria del Centre de Recerca Matemàtica que me facilitó, en unos segundos, todo lo que necesitaba, papel, clips, cuerda, celo, tijeras y, por supuesto, una caja.

¿Cómo funciona? Si levanto la tapa podréis ver que el mecanismo básico es un sencillo sistema de poleas, para cuya fabricación usé simplemente un par de clips. Para ver por qué la razón es 4 en este caso, imaginad una cuerda P que se mueve 1 cm dentro de la caja. Para que esto suceda, la «polea A» debe moverse 1 cm hacia la izquierda y esto sólo ocurre si la cuerda a su alrededor se desplaza 2 cm hacia la derecha gracias a la «polea B»; para ello, la cuerda Q debe desplazarse 4 cm hacia la izquierda.



Durante años me han fascinado muchos aspectos de las matemáticas y espero que en el poco tiempo que he estado con vosotros haya sido capaz de compartir algunas de las cosas que han llamado mi atención.

Brian Bolt
University of Exeter