SUMA 35
noviembre 2000, pp. 71-74

Algunas demostraciones del valor de la potencia de un punto con respecto a una circunferencia

Juan Ricardo Escribano Rivero

IDEAS Y RECURSOS

Se proponen tres demostraciones sobre el valor de la potencia de un punto con respecto a una circunferencia. La primera utiliza el método de la geometría analítica, y las propiedades de las soluciones de la ecuación de segundo grado. La segunda se basa sólo en el Teorema de Pitágoras. Y, la tercera utiliza el álgebra de vectores. Por último, se da el resultado de la potencia de un punto con respecto a una elipse. Con esto se intenta suplir el hueco en los libros de texto, de nivel de Bachillerato, que no recogen una demostración general sobre la constancia de la potencia del punto con respecto a una circunferencia.

LA POTENCIA DE UN PUNTO coplanario con una circunferencia es objeto de atención en el Bachillerato. Antes de estudiar las cónicas, se ha tratado la geometría analítica de la recta y el plano afín. Todo ello lleva a que el estudio de las cónicas tiene lugar, en los actuales planes de estudio, desde un punto de vista analítico más que geométrico. Esto es así para familiarizar a los estudiantes con toda la capacidad predictiva del método analítico, para que se vayan entrenando en el método de las coordenadas cartesianas y para ir conociendo la forma de las ecuaciones de unas cuantas curvas importantes en toda la Ciencia y la Técnica. Existe, en mi opinión, una pequeña parcela donde el método analítico no se aplica en toda su extensión y esto es precisamente en la demostración de que la potencia de un punto con respecto a una circunferencia es una cantidad constante, una vez fijados el punto y la circunferencia.

Los textos de enseñanza de 3.° de B.U.P. o de 1.° de Bachillerato definen (apriorísticamente) a la potencia de un punto con respecto a una circunferencia como una cantidad constante. Esto es un error: a) se presupone algo que no ha sido demostrado, lo cual es grave dentro del espíritu lógico-matemático que se pretende transmitir a los estudiantes; y, b) si el texto lo «demuestra», en general, tal demostración consiste en que la recta que pasa por el punto sea tangente a la circunferencia, pero no una recta cualquiera que sea secante a la misma. Estas pseudodemostraciones son peligrosas pues se cae en el error de la generalización a partir de un resultado particular. Por desgracia, esta es «la demostración» de la constancia de la potencia de un punto con respecto a una circunferencia que contienen la mayoría de los textos de este nivel (…eso si contiene alguna demostración al respecto).

Aquí lo que se pretende es llenar ese pequeño hueco, y proporcionar tres demostraciones. La primera está basada en la geometría analítica. Es una demostración algo laboriosa, pues requiere de muchos pasos algebraicos, y recurre a propiedades de las soluciones de una ecuación de segundo grado, pero tiene el interés de «mantener la tensión» hasta el final. Puede ser presentada por el profesor cuando se explique la geometría analítica de la circunferencia. La segunda demostración necesita únicamente de Teorema de Pitágoras (!!). Es con diferencia la más elegante, y puede ser explicada por el profesor, o propuesta como problema, mientras se imparte la trigonometría del triángulo rectángulo. La tercera demostración usa el álgebra vectorial. No es una demostración tan directa como la anterior, pero tiene el interés de proporcionar otro método de ataque a la solución de un mismo problema.

En cualquier caso no se pretende entrar en el estudio de las propiedades de la potencia, y posiciones relativas entre el punto y la circunferencia, lo cual suele estar recogido en cualquier libro de texto.

En último lugar, y como extensión del método analítico, se extiende la definición de potencia de un punto al caso de una elipse, y una vez proporcionado el resultado se sugiere que se compare con los correspondientes a los de una circunferencia.

Definición

La potencia del punto P *con respecto a la circunferencia coplanaria* C, y se denota por $\mathcal{P}_c(P)$, a la cantidad

$$\mathrm{P}_C(P) = \overline{PA_1} \cdot \overline{PA_2}$$

siendo A_1 y A_2 las intersecciones de una recta del haz que pasa por P, con la circunferencia Γ. Ver figura 1.

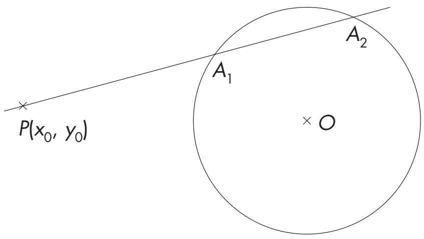

Figura 1

Teorema

La potencia, $\mathcal{P}_c(P)$, es una cantidad *constante*, cuyo valor es $d^2 - r^2$, siendo d la distancia del punto P al centro de la circunferencia O, y r su radio:

$$\mathcal{P}_c(P) = d^2 - r^2$$

Demostración basada en la geometría analítica

Consideremos una circunferencia Γ, centrada en el origen (no por ello se pierde generalidad), y de radio r. Sea un punto $P(x_0, y_0)$, que no pertenece a la circunferencia Γ, da igual que sea interior o exterior a ella. Supongamos que $y - y_0 = m(x - x_0)$ es la ecuación del haz de rectas ≠ que pasa por $P(x_0, y_0)$.

Como los puntos P, A_1 y A_2 están alineados, entonces se verifica:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} \qquad [1]$$

ya que $\overline{PA_1}$ y $\overline{PA_2}$ son las distancias de P a A_1 y A_2, verifica:

$$\mathrm{P}_C(P) = \overline{PA_1} \cdot \overline{PA_2}$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \cdot \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2} \qquad [2]$$

Si tenemos en cuenta las propiedades de las proporciones, podemos aplicarlas a la expresión [1], en concreto, si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

entonces

$$\frac{a^2 + b^2}{b^2} = \frac{c^2 + d^2}{d^2}$$

y usarla en [2], con lo que resulta:

$$\mathcal{P}_c(P) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) + (y_1 - y_0)(y_2 - y_0) \qquad [3]$$

Es de notar que a este mismo resultado [3] podríamos haber llegado a partir del producto escalar de los vectores

$$\overrightarrow{PA_1} \text{ y } \overrightarrow{PA_2}$$

expresándolos en componentes cartesianas, como fácilmente se puede demostrar.

Desarrollando la expresión [3] se obtiene:

$$\mathcal{P}_c(P) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 - x_0\,(x_1 + x_2) - y_0\,(y_1 + y_2) + d^2 \qquad [4]$$

donde hemos hecho $d^2 = x_0^2 + y_0^2$, que es la distancia entre P y O.

Si $A_1(x_1, y_1)$ y $A_2(x_2, y_2)$ son los puntos de intersección de la recta ≠ y la circunferencia Γ, entonces sustituyendo el valor de la variable y de ≠ en Γ se obtiene la ecuación de segundo grado:

$$(1 + m^2)x^2 + 2m(y_0 - mx_0)x + (y_0 - mx_0)^2 - r^2 = 0 \qquad [5]$$

Si x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación [5] se cumplirá, según las propiedades de las raíces de las ecuaciones de segundo grado:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \dfrac{(y_0 - mx_0)^2 - r^2}{1+m^2} & [6a] \\ x_1 + x_2 = \dfrac{-2m(y_0 - mx_0)}{1+m^2} & [6b] \end{cases}$$

Por otro lado, si sustituimos el valor de la variable x de $\neq$ en Γ, se obtendrá ahora la ecuación:

$$\left(1+\frac{1}{m^2}\right)y^2 - \frac{2}{m}\left(\frac{y_0}{m} - x_0\right)y_0 + \left(\frac{y_0}{m} - x_0\right)^2 - r^2 = 0 \qquad [7]$$

Si y_1 e y_2 son las soluciones de la ecuación [7] se verificará a su vez:

$$\begin{cases} y_1 \cdot y_2 = \dfrac{(y_0 - mx_0)^2 - m^2 r^2}{1+m^2} & [8a] \\ y_1 + y_2 = \dfrac{2(y_0 - mx_0)}{1+m^2} & [8b] \end{cases}$$

Los resultados [6a, 6b] y [8a, 8b] aseguran que efectivamente los puntos $A_1(x_1, y_1)$ y $A_2(x_2, y_2)$ pertenecen a $\neq$ y a Γ. Sustituyendo [6a, 6b] y [8a, 8b] en la expresión [4] resulta:

$$P_\Gamma(P) = \frac{(y_0 - mx_0)^2 - r^2}{1+m^2} + \frac{(y_0 - mx_0)^2 - m^2 r^2}{1+m^2} - x_0\left[\frac{m(y_0 - mx_0)}{1+m^2}\right] - y_0\left[\frac{2(y_0 - mx_0)}{1+m^2}\right] + d^2 = d^2 - r^2$$

Que era el resultado que se deseaba demostrar.

Demostración a partir del Teorema de Pitágoras

Por definición:

$$P_\Gamma(P) = PA_1 \cdot PA_2 \qquad [1]$$

En la figura 2 consideremos el triángulo $\Delta(POA_2)$, en él tenemos:

$$\begin{cases} d^2 = h^2 + \overline{PA}^2 & [2a] \\ r^2 = h^2 + \overline{AA_2}^2 & [2b] \end{cases}$$

y también:

$$A_1A = AA_2 \qquad [3]$$

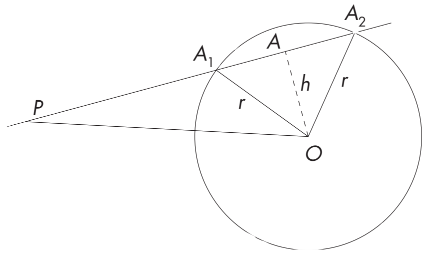

Figura 2

Como

$$PA_2 = PA + AA_2 \qquad [4a]$$

y

$$PA_1 = PA - A_1A \qquad [4b]$$

Sustituyendo [4a, 4b] en [1] resulta:

$$\begin{aligned} P_\Gamma(P) &= \left(\overline{PA} - \overline{A_1A}\right)\left(\overline{PA} + \overline{AA_2}\right) = \\ &\left(\overline{PA} - \overline{AA_2}\right)\left(\overline{PA} + \overline{AA_2}\right) = \overline{PA}^2 - \overline{AA_2}^2 \end{aligned} \qquad [5]$$

donde hemos usado [3]. Si sustituimos PA usando [2a], y AA_2 de [2b]; en [5] se obtiene:

$$\begin{aligned} P_\Gamma(P) &= \overline{PA}^2 - \overline{AA_2}^2 = \\ &(d^2 - h^2) - (r^2 - h^2) = d^2 - r^2 \end{aligned}$$

Demostración vectorial

Por definición:

$$P_\Gamma(P) = PA_1 \cdot PA_2 \qquad [1]$$

Como $\overrightarrow{PA_1}$ y $\overrightarrow{PA_2}$ son vectores paralelos (fig. 2), entonces:

$$P_\Gamma(P) = \overrightarrow{PA_1} \cdot \overrightarrow{PA_2} \qquad [2]$$

Por otro lado,

$$\overrightarrow{PA_1} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA_1} \text{ y } \overrightarrow{PA_2} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA_2} \qquad [3]$$

Sustituyendo [3] en [2] resulta:

$$\begin{aligned} P_\Gamma(P) &= \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA_1}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA_2}\right) = \\ &\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{PO}\cdot\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}\right) + \overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2} \end{aligned} \qquad [4]$$

Si tenemos en cuenta que (ver figura 3):

$$\left|\overrightarrow{PO}\right| = d \quad \text{y} \quad \left|\overrightarrow{OA_1}\right| = \left|\overrightarrow{OA_2}\right| = r$$

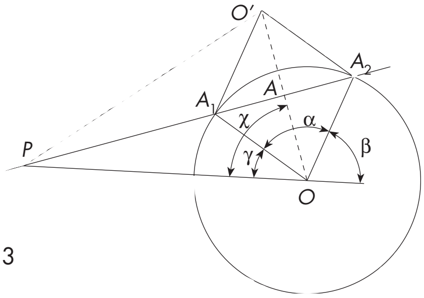

Figura 3

se tiene que:

$$\begin{cases} \overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PO} = d^2 \\ \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OO'} \\ \overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2} = r^2 \cos\alpha \end{cases} \qquad [5]$$

Sustituyendo ahora [5] en [4] resulta:

$$\mathrm{P}_C(P) = d^2 + \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OO'} + r^2 \cos\alpha \qquad [6]$$

En la figura 2, es de observar que el triángulo $\Delta(OA_1A_2)$ es isósceles, al ser $\left|\overrightarrow{OA_1}\right| = \left|\overrightarrow{OA_2}\right| = r$, luego $\overrightarrow{OO'}$ es perpendicular a $\overrightarrow{A_1A_2}$.

También el triángulo $\Delta(POO')$ es isósceles, pues la figura $(OA_1O'A_2)$ es un rombo, y por lo tanto $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{AO'}\right|$. Luego $\left|\overrightarrow{PO}\right| = \left|\overrightarrow{PO'}\right| = d$. Entonces:

$$\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OO'} = d\left(2r\cos\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right) = 2r\left[d\cos\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)\right]\cos\frac{\alpha}{2} \qquad [7]$$

Sean los ángulos $\chi = \angle(POO')$ y $\gamma = \angle(POA_1)$, entonces:

$$\chi = \gamma + \alpha/2 = [180 - (\alpha + \beta)] + \alpha/2 = 180 - (\beta + \alpha/2)$$

Luego:
$$\begin{cases} d\cos\chi = r\cos\dfrac{\alpha}{2} \\ d\cos\chi = d\cos\left[180 - \left(\beta + \dfrac{\alpha}{2}\right)\right] = -d\cos\left(\beta + \dfrac{\alpha}{2}\right) \end{cases}$$

con lo cual:

$$d\cos\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right) = -r\cos\frac{\alpha}{2}$$

Sustituyendo [8] en [7] queda:

$$\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OO'} = 2r\left(-\cos\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2} = -2r\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

Por último, sustituyendo [9] en [6] se obtiene por fín:

$$\mathrm{P}_C(P) = d^2 - 2r^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + r^2\cos\alpha =$$
$$d^2 + r^2\left(\cos\alpha - 2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right) = d^2 + r^2(-1) = d^2 - r^2$$

Potencia de un punto con respecto a una elipse

Todo este mismo razonamiento podría aplicarse a la «potencia de una elipse» con respecto a un punto coplanario con ella. Ahora el resultado es:

$$\mathrm{P}_C(P) = \frac{a^2b^2\left(1 + m^2\right)}{b^2 + a^2m^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right) \qquad [1]$$

donde a y b son los valores de los semiejes de la elipse centrada en el origen, y m es la pendiente de la recta que pasa por el punto $P(x_0, y_0)$.

Evidentemente, en esta situación, la «potencia» es una función del punto y del tamaño de la elipse (como también ocurre en la circunferencia), pero a su vez depende de la pendiente m. Por lo tanto, quizás sería mejor hablar de que la «potencia de la elipse» es una *función potencia* de m.

Es sencillo comprobar ahora las situaciones relativas del punto con respecto a la elipse, y el caso particular en que la elipse se reduce a una circunferencia ($a = b$), en la fórmula [1].

Conclusiones

Los razonamientos expuestos para demostrar el valor de la potencia de la circunferencia están al alcance de un estudiante de Bachillerato. Probablemente el método analítico sea el más laborioso, desde el punto de vista de la manipulación algebraica, pero debido a que hay que emplear diversos resultados (propiedades de las proporciones y de las raíces de las ecuaciones de segundo grado) en la demostración, ayudará a ejercitarse en diversas herramientas manipulativas. La demostración vectorial exige prestar cierta atención a los ángulos que forman los vectores. La demostración que usa el teorema de Pitágoras es la más sencilla y directa. Cada una de estas demostraciones pueden usarse en la sección apropiada de enseñanza: geometría analítica, vectores y trigonometría, pero sea cual sea el razonamiento empleado el resultado es el mismo. Existe también una demostración geométrica (Puig Adam, 1980) que no ha sido incluida.

El estudiante suele pensar que las áreas de las Matemáticas no sólo están divididas, sino que la relación entre ellas es escasa. Quizás estas demostraciones muestren un ejemplo de la unicidad de las Matemáticas y del hecho de que un resultado es independiente de los razonamientos lógicos usados para obtenerlo.

Agradecimientos

El autor desea expresar el reconocimiento a las fructíferas conversaciones que para el desarrollo de este trabajo ha tenido con Dª. Luz González, y con D. Antonio Gámez, a los que está agradecido por su amistad y cooperación.

Juan Ricardo Escribano
IES Huerta del Rosario.
Chiclana de la Frontera
(Cádiz)

Referencia

PUIG ADAM, P. (1980): *Curso de Geometría Métrica*, *Tomo I*, Gómez Puig Ediciones, Madrid, 135-136.