SUMA 35
noviembre 2000, pp. 27-34

# ¿Por qué seguir anclados en Egipto?

Carlos Usón Villalba
Ángel Ramírez Martínez

ARTÍCULOS

La pervivencia en las aulas de listas y listas de ejercicios de cálculo con fracciones es un arcaísmo gremial. Fue al-Kashi (s. XV) quien propuso por primera vez que las fracciones decimales son válidas para representar cualquier número, rompiendo así con la tradición de la Antigüedad. El desarrollo de la notación ha llevado finalmente a que 7/4 se escriba como 1,75. Nadie hace hoy día operaciones con quebrados. Utilizamos las fracciones clásicas sólo como descriptores de situaciones en las que el denominador es más pequeño que 10.

## I

CIERTAMENTE corren malos tiempos para la lírica. Vivimos una paz tensa, cargada de desalientos, en la que las voces del inmovilismo parecen tener justificación a sus proclamas. Entre ellas, cómo no, las que insisten en las virtudes formativas del aprendizaje de los algoritmos de lápiz y papel. Si la marea conservadora alcanza círculos próximos decides, aunque sólo sea para mantener en buen estado las defensas, entrar al trapo. Hay que volver a recordar entonces uno y mil argumentos para comprobar, con una sorpresa siempre renovada a causa de nuestra ingenuidad, que lo que era innovador hace quince años sigue siéndolo en este momento.

No vamos a repetirlos. Parece irremediablemente perdida la batalla por liberar a niñas y niños de la Enseñanza Primaria de los «trabajos de soldado» (recupérese la lectura de Freinet, 1986) a que se ven sometidos. Nos limitaremos a recordar, aunque sea de mal gusto en estos tiempos supuestamente desideologizados, que las intenciones subliminales, aunque inconscientes, existen; que se perpetúan si son útiles para defender a la sociedad de un exceso de creatividad que pueda resultar peligroso para el «normal» funcionamiento de las cosas; y que estos condicionantes ideológicos también actúan, por supuesto que sí, en las clases de matemáticas. Es decir, forman parte del currículo «oculto» (¿?) del profesorado. Decimos sólo esto, y no más, porque sobre este tema ya hemos escrito con más amplitud (Ramírez y Usón, 1996; Ramírez, 1997) y porque nuestra intención ahora es trasladar la reflexión a otro contexto con una similar problemática.

## II

¿A cuál? En realidad todas las matemáticas escolares, tanto en Primaria como en Secundaria, están reducidas a la práctica de algoritmos. En ocasiones, incluso, se definen los conceptos a partir de uno de los algoritmos posibles para desarrollarlos o calcularlos, olvidando que, por su carácter de tales, hacen tanto en tan poco tiempo y/o espacio que necesariamente ocultan la complejidad del concepto.

Esto es lo que ocurre, por ejemplo, si definimos: «$a/b = c/d$ si $ad = bc$». La relación entre decimales y fracciones permite accesos más naturales a la igualdad de fracciones, por más que nos resulte entonces una obviedad, pero si observamos que alumnas y alumnos de segundo de bachillerato afirman que se puede hacer $2^{1/2}$ pero no $2^{0,5}$, queda claro cuánto se pierde, cuántas conexiones básicas se tiran por la borda, si se elige el camino del formalismo.

La multiplicación en cruz aparece también como base de la definición habitual de la división de fracciones. Definición caprichosa donde las haya, que no suele justificarse. Afirmar que $(a/b) : (c/d) = ad/bc$ porque dividir es multiplicar por el inverso del divisor no es explicación suficiente; sigue siendo más algorítmica que conceptual. Y además: ¿por qué el inverso de 3/4 es 4/3? ¿Por qué (3/4)(4/3) =1? ¿Y por qué se multiplican los quebrados como se multiplican? No es nada evidente, por otra parte, que 1,333… x 0,25 = 1.

Desde luego que la lista de «porqués» puede hacerse infinita y que en algún momento hay que pararla. Pero no estamos adoptando una actitud filosóficamente provocadora y didácticamente improductiva. Estamos sugiriendo que si bien es cierto que cualquier definición es socialmente un convenio, también lo es que los convenios no se acuerdan como en un juego lógico desprovisto de significado y que es necesario y útil justificarlos. Veamos: ¿es habitual razonar que (6/7) : (3/7) es muy fácil de obtener porque las dos fracciones, al tener el mismo denominador, son comparables y que para dividir fracciones hay que ponerlas primero con denominador común? Sí, por supuesto que con el tiempo ahorraremos este paso, pero al final, no al principio, porque si vamos directamente al algoritmo ocultaremos la naturaleza de la operación que efectuamos. La naturaleza conceptual, la que esconde precisamente el algoritmo imponiendo su enfoque utilitarista. Por esto mismo, porque es necesario el denominador común, se explica el criterio para decidir la igualdad de fracciones: igualados los denominadores es obligada la igualdad de los numeradores.

Curiosamente nos parece más difícil la justificación del producto de fracciones. Pero es que ¿acaso tenemos claro el concepto de producto de dos números? ¿Qué hacemos al calcular 0,75 x 0,666 … , 25% x 12% o, incluso, 1/2 x 20%? Para la división hemos podido emplear todavía nuestra vieja concepción de esta operación como una comparación de magnitudes, casi un reparto, pero al multiplicar uno de los quebrados se convierte necesariamente en un operador. Y su efecto, en el efecto combinado de otros dos operadores.

*En realidad todas las matemáticas escolares, tanto en Primaria como en Secundaria, están reducidas a la práctica de algoritmos.*

## III

Lejos de nuestra intención desarrollar en las páginas de *Suma* un elemental tratado sobre las operaciones con fracciones. Lo que pretendemos es reivindicar la necesidad de una mayor insistencia en los conceptos. Puesto que lo único que se hace en muchos centros con las fracciones es simple calculote[1], hay tiempo para ello: basta con romper con ese absolutismo. Los afortunados tiempos tecnológicos en que nos ha tocado desarrollar nuestra labor docente nos permiten incluso, si nos apetece, caer en un absolutismo de signo contrario. Lo queremos gritar bien alto:

*¡Hay calculadoras baratas que trabajan con fracciones!*

Bien: ahora que los ingleses, esos amantes de las tradiciones más rancias, han avisado de la maldad didáctica intrínseca de la calculadora (ese maravilloso invento), desempolvemos de nuevo parte de la vieja batería argumental para defender su empleo.

- No se trata de usar las calculadoras solamente como en el supermercado. ¡Cuidado! No afirmamos que esta prestación de la máquina sea despreciable. Uno de los objetivos de la Enseñanza Primaria debería ser que los estudiantes fueran capaces de hacer un uso inteligente de una calculadora elemental (científica para la Secundaria y el Bachillerato). Inteligente quiere decir que sepan aprovechar al máximo sus posibilidades (¿cuántas tiendas conocéis en las que sepan utilizar una memoria tan básica como la de una calculadora de 700 ptas.?), que no la empleen para efectuar, por ejemplo, 50 + 50 (entre otras cosas porque no es elegante hacerlo), y que estimen previamente y tengan costumbre de valorar los resultados que aparecen en pantalla. Siguen siendo válidas las sugerencias del Informe Cockcroft (elaborado en Inglaterra, claro).
- No usarlas sólo como en el supermercado quiere decir que, como

1 Muy poco eficaz, por cierto. A pesar de haber manejado exclusivamente quebrados en sus clases de matemáticas, alumnos y alumnas muestran predilección, si se les deja elegir, por la mayor claridad interpretativa inmediata que les ofrecen los decimales. Optan, por ejemplo, por

$$\sqrt{2} + 0,5\sqrt{2} = 1,5\sqrt{2}$$

en lugar de

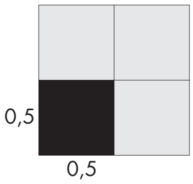
$$\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

Una elección que alerta de nuevo sobre la nula comprensión conceptual que se alcanza después de cursos y cursos de emplear las fracciones desconectadas de los decimales.

docentes, deberíamos ser capaces de aprovechar el enorme potencial didáctico de estos pequeños aparatos. Hay literatura más que suficiente a este respecto. Es inevitable aquí recordar a Fielker (otro inglés)[2].

- El tiempo que ganaríamos podría emplearse en:

  — Mejorar la comprensión conceptual de las operaciones con quebrados. En particular, ampliar el concepto de multiplicación. Explicar, por ejemplo, que 0,5 x 0,5 = 0,25 porque se crece en dimensión pero disminuye la proporción de la superficie obtenida respecto al cuadrado unidad.




  — Establecer conexiones entre decimales, quebrados, tantos por ciento y modelos geométricos.

  — Hacer problemas, no ejercicios rutinarios, en los que intervengan fracciones (por ejemplo: «El 36% de las tortillas que hace mi abuela tienen mucha sal, y el 53% mucha patata. ¿Qué porcentaje de las tortillas que hace mi abuela tienen mucha sal y mucha patata?»)

  — Cálculo mental con quebrados. Es fácil proponerlo como un juego. Además la existencia de regularidades lo favorece. Por ejemplo:

$$1/2 + 1/4 = 3/4$$

$$1/3 + 1/6 = 3/6 = 1/2$$

$$1/4 + 1/8 = 3/8$$

  De paso podemos aprovechar para generalizar, el auténtico vicio de los matemáticos. ¿No nos interesa el Álgebra?

$$1/n + 1/2n = 3/2n$$

*¿Conocéis a alguien que opere con quebrados en la calle?*

  También se puede empezar por el final (dar el resultado y perdir la operación), bien en abstracto:

  > ¿A qué quebrado le puedo añadir su mitad para obtener 1/2?

  o contextualizando la pregunta de forma atractiva:

  > Luisa partió la tarta en tres trozos: ella se quedó con la mitad y Juan recibió el doble que Antonio. ¿Cuánto correspondió a cada uno de ellos?

  (¡No olvidemos que se propone como cálculo mental! No se trata de repetir el algoritmo de lápiz y papel…).

  Otra bonita serie:

$$1/2 - 1/3 = 1/6$$

$$1/3 - 1/4 = 1/12$$

$$1/n - 1/(n + 1) = 1/n(n + 1)$$

  — Pensar, sobre todo pensar. Si la máquina trabaja ya no hay justificación para obligar al alumnado a ejercitarse en trabajos de soldado ni para perder después ridículamente el tiempo en valorarlos de forma ridícula. ¿Cómo no equivocarse al realizar un churro («castillo» o como se le quiera llamar) que da finalmente como resultado 223/315? (por cierto: ¿no es más expresivo «71%» que «223/315»?) Si se siente nostalgia de los viejos tiempos (un vicio dulce y comprensible) siempre pueden hacerse algunos … con la calculadora, claro: una excelente ocasión para practicar la prioridad de las operaciones sin machacar para ello la mente ni extenuar la paciencia.

## IV

Abandonamos esta línea argumental. No llegaremos a decir nada nuevo que no se encuentre ya publicado. Hablemos más bien de la utilidad social de nuestro trabajo. *¿Conocéis a alguien que opere con quebrados en la calle?* Los quebrados se emplean en la vida cotidiana como operadores (tres cuartos de litro, cuarto y mitad de carne, etc.), no como instrumentos de cálculo. Antes ya de la aparición de las calculadoras electrónicas la contabilidad de las oficinas, las compra-ventas de terrenos, las operaciones comerciales, se efectuaban con decimales. ¡Cuánto más en el momento actual!

Frente a esto, los quebrados mantienen su vigencia en las aulas a causa de nuestro gremialismo como matemáticos. Hagamos una breve visita a la Historia. Allá por el 1650 a. C., el escriba egipcio Ahmes se ocupaba, en el conocido hoy como «papiro de Rhind», de descomposiciones de fracciones como éstas:

2 Citamos sólo una pequeña y deliciosa obra suya: *Usando las calculadoras con niños de 10 años*, Generalitat Valenciana, 1986. Aunque está agotada la edición, es posible encontrarla, junto con el Informe Cockcroft, en los CPR.

$$2/7 = 1/28 + 1/4;$$

$$1/15 + 1/3 = 2/5;$$

$$2/13 = 1/8 + 1/52 + 1/104$$

No son ejercicios aislados. Ahmes aporta una tabla que expresa $2/n$ como suma de fracciones de numerador 1 para valores de $n$ desde 3 a 101. Toda una demostración de virtuosismo al servicio de la simplificación de los cálculos en las necesidades prácticas, desarrollada a partir de métodos diferentes de los nuestros: empleo de fracciones unitarias y de la técnica del desdoblamiento. Veamos un ejemplo (Collette):

$$2/7 = 1/7 + 1/7 = 1/14 + 1/14 + 1/7 = 1/28 + 1/28 + \\ + 1/14 + 1/7 = = 1/28 + (1/28 + 1/14 + 1/7) = 1/28 + 1/4$$

El sistema egipcio de escritura de los números era jeroglífico, decimal y no posicional. Queda claro que esa «decimalidad» no ejerció ninguna influencia sobre el tratamiento algorítmico de las operaciones con fracciones. ¿Cómo iba a hacerlo? Dividir por 10 sólo es cómodo si el sistema de numeración es decimal y posicional. Si la escritura no aporta ninguna ayuda el primer recurso es emplear la división más sencilla: buscar mitades. Para multiplicar o dividir números enteros los egipcios empleaban también la técnica del desdoblamiento.

La sombra de la tradición es alargada. En el siglo IX, 2600 años después de Ahmes, la obra en la que al-Khwarizmi muestra por primera vez cómo operar con el sistema decimal posicional hindú, permite ver que la lengua árabe disponía de nombres particulares para las fracciones de numerador 1. El *Libro sobre la aritmética necesaria a los escribas y a los comerciantes*, de Abu-l-Wafa (s. X), distingue tres tipos de fracciones fundamentales (Youschkevitch):

- Principales: 1/2, 1/3, 1/4,…, 1/10
- De la forma $m/n$, con $m < n \leq 10$
- Expresables en la forma $(1/m) \times (1/n) \times \ldots \times (1/p)$ (exceptuando las principales)

Abu-l-Wafa lleva el virtuosismo operativo al extremo, con la finalidad de expresar fracciones a partir de las incluidas en estos tres tipos (y si no es posible lo hace de forma aproximada), pero ya no recurre al desdoblamiento. Su táctica consiste en desarrollar las fracciones en fracciones sexagesimales y de éstas pasar a las fundamentales. Y obtiene, por ejemplo:

$$2/5 = 1/3 + (2/3)(1/10)$$

$$9/10 = 1/2 + 1/3 + (2/3)(1/10)$$

$$3/17 \approx 1/10 + (1/2)(1/9) + (1/6)(1/8)$$

El desarrollo seguido para 3/17 es especialmente fascinante (Youschkevitch).

Mientras los funcionarios y comerciantes empleaban fracciones unitarias, los científicos árabes, continuando la tradición de la antigua Babilonia, efectuaban sus cálculos con un sistema sexagesimal. En el cruce de estas dos tendencias con las nuevas ideas venidas de la India (un largo período de tiempo indeciso) es razonable terminar planteándose una pregunta hoy día ingenua pero entonces revolucionaria: ¿son adecuadas las fracciones decimales cuando el problema requiere una respuesta con una aproximación muy precisa? Al-Kashi (s. XV) responde que sí, da por primera vez una descripción detallada de las operaciones con ellas y aplica su habilidad a la conversión de fracciones sexagesimales en decimales y viceversa.

¿Hace falta recordar que la Humanidad ha optado finalmente por las fracciones decimales? Hoy no empleamos 3/17, ni la aproximación de Abu-l-Wafa. Hoy aproximamos 3/17 con el valor

$$1/10 + 7/10^2 + 6/10^3 + 4/10^4 + 7/10^5 + \\ + 5/10^7 + 8/10^8 + 8/10^9$$

La calculadora muestra en pantalla 0,176470588 porque hemos adoptado la notación resultante de un largo proceso colectivo (como siempre) de pruebas, cuyo remate final, la coma que separa la parte entera de la decimal, fue propuesta por el holandés Snellius a principios del siglo XVII.

*Si la sociedad ha elegido operar con fracciones decimales, y hacerlo además bajo la forma de «decimales», ¿qué justifica dedicar tanto tiempo a efectuar operaciones con quebrados?*

## V

Si la sociedad ha elegido operar con fracciones decimales, y hacerlo además bajo la forma de «decimales», ¿qué justifica dedicar tanto tiempo a efectuar operaciones con quebrados? No negamos la necesidad didáctica de ocuparse de las ideas básicas; afirmamos la conveniencia de entusiasmarse ante la habilidad desplegada para desarrollar un cálculo o para inventar o interpretar un algoritmo; pero todo ello sin perder de vista que los quebrados no son hoy día un instrumento social de cálculo. Es cierto que siguen empleándose como descriptores útiles y elegantes de algunas situaciones cuando el denominador es 2, 3, 4, 5 o incluso 6. Seguimos hablando de un cuarto de litro, un quinto o un tercio de cerveza, las abuelas de Forges siguen pidiendo «cuarto y mitad» en la tienda, pero ya nadie opera con quebrados. La generalización del empleo de calculadoras electrónicas tiene forzosamente consecuencias. Incluso como indicadores de información los quebrados están cediendo terreno, cada vez más, al «tanto por ciento».

Es inevitable la sensación de estar asistiendo al final de un período. Y si bien es comprensible la añoranza del especialista que debe reciclarse y desea mostrar la belleza de su anticuado instrumental, hay que recordarle que no tiene derecho a presentar como piezas actuales las que están en desuso; y que cuando un grupo de personas sin vocación de historiadores visita un museo muy amplio, selecciona las salas de mayor interés.

Desde este punto de vista, ¿cómo valorar la insistencia de un alumno en escribir 1/4 en lugar de 0,25 porque le han dicho «que son más elegantes los quebrados»?[3] La elegancia siempre ha sido una cuestión condicionada por la subjetividad de cada cual y por el momento histórico. Lejos de nuestra intención negarle prestancia a 1/4, pero una persona cultivada apreciará la belleza tanto en un Monet como en un Saura: tiene todo el derecho a elegir, por supuesto, y sería maravilloso que fuera capaz de transmitir entusiasmo por los logros del pasado, pero no a seguir afirmando la validez permanente, como medio de expresión, de propuestas ya superadas.

¿Sabemos realmente disfrutar el atractivo de la notación decimal? ¿Qué ofrece una igualdad como (5/6) x (6/5) = 1 frente a la sorpresa que aporta 0,83333… x 1,2 = 1? La pervivencia obsesiva en las aulas del cálculo con quebrados nos parece una imposición gremial. La afirmación de su superioridad frente al cálculo con decimales, un desatino, a la vista de la marcha de la Historia, y un elitismo sectorial y platónico. El disfrute del encanto artesanal de las habilidades de Abu-l-Wafa es perfectamente compatible con el de la funcionalidad y la eficacia de las operaciones con decimales. En cualquier caso tenemos derecho, si nos apetece, a permanecer personalmente anclados en Egipto, pero no a abandonar allí a nuestros alumnos y alumnas.

*La pervivencia obsesiva en las aulas del cálculo con quebrados nos parece una imposición gremial. La afirmación de su superioridad frente al cálculo con decimales, un desatino, a la vista de la marcha de la Historia, y un elitismo sectorial y platónico.*

## VI

¿Hace falta decir que también somos contrarios a la pervivencia obsesiva del cálculo manual con decimales? ¿Que nos parece una liberación maravillosa la funcionalidad y la contundencia de una calculadora de bolsillo? Léase el párrafo III de este artículo cambiando «fracciones» por «decimales».

## VII

Una propuesta de problemas sobre fracciones para 3.° de ESO. No es exahustiva, por supuesto: hay que hacer multitud de problemas con enunciado, ocuparse del tanto por ciento, etc. La proponemos como ejemplo alternativo a los interminables listados de «castillos» fraccionarios con que se topan habitualmente los adolescentes. Se trata, por tanto, de problemas (sí, en la situación actual son auténticos problemas, no ejercicios) en los que se propone trabajar sobre los números en abstracto, fuera de un contexto real o matemático en el que tuvieran un significado.

1. Localiza dos números periódicos puros cuya diferencia sea más pequeña que una milésima.

   Dos periódicos mixtos cuya diferencia sea más pequeña que una décima.

   Un periódico mixto, un periódico puro y un irracional comprendidos entre 4,6 y 4,67 .

   Un periódico mixto y un decimal exacto comprendidos entre 3,2 y 3,2 .

   Tres fracciones comprendidas entre 1,1 y $1{,}\widehat{1}$.

2. ¿Qué números cumplen la condición de que al dividirlos por 4 dan …,25 y al dividirlos por 3 dan 3 ?

   ¿Y que den …,75 al dividirlos por 4 y …,6 al dividirlos por 5?

3. ¿Qué denominadores pueden dar lugar a decimales de la forma …,125? ¿Cuántos hay? ¿Y a decimales de la forma 6 ?

3 ¿Habéis podido observado alguna vez en una pizarra de la que no se han borrado todavía los cálculos de la clase anterior la resolución de un sistema como {1,5x – y = 4; –x + 0,75y = 1}? ¿De qué oscuro fondo asciende el rechazo a esta forma de expresar los coeficientes? ¿Por qué *se prohíbe* en beneficio de {3x – 2y = 8 ; –4x + 3y = 4 }? Prohibición (tácita, no suele estar explicitada) tanto más absurda desde el momento en que se dispone de calculadoras gráficas.

4. Divido un número entre 18 y obtengo $\ldots,\overset{\frown}{3}$. ¿Cuál es el resto de la división?

   ¿Y si obtengo $\ldots,\overset{\frown}{4}$ ? ¿Los puedes adivinar sin emplear la calculadora?

5. ¿Lo tienes claro? ¿Seguro? Veamos otro ejemplo. Divido por 16 y obtengo …,5. ¿Cuál es el resto? ¿Y si obtengo …,125?

6. Ahora empleamos la calculadora. Dividimos 73:13 y aparece en la pantalla 5,6153846. Queremos obtener el resto sin necesidad de pulsar *AC* para borrar el resultado anterior. ¿Qué operaciones harías?

7. ¿Sabes que *calculus*, en latín, significa «piedra pequeña»? Los romanos hacían sus cuentas, con piedras de pequeño tamaño. Todos los pueblos han hecho cuentas con «cálculos». Bien: ahí va un capazo de cálculos … pero no para que los hagas con «cálculos». ¡Mala suerte! Tampoco te propongo que los hagas con la calculadora (ese maravilloso invento) y no te dejo recurrir a los algoritmos (¿qué querrá decir «algoritmo»? ¿lo sabes?) de lápiz y papel. ¡Y tienes que dar el resultado como número decimal!

$$0,\overset{\frown}{2}\times 4,5 \qquad 0,00\overset{\frown}{2}\times 45 \qquad 1,25\times 1,6 \qquad 0,2:0,0\overset{\frown}{2}$$
$$0,\overset{\frown}{6}\times 0,1\overset{\frown}{6} \qquad 0,75:0,5 \qquad 1,5:0,\overset{\frown}{5} \qquad 0,1:0,01$$
$$0,\overset{\frown}{1}:0,1 \qquad 0,1:0,\overset{\frown}{1} \qquad 1:0,\overset{\frown}{1} \qquad 1,3\times 0,\overset{\frown}{3}$$

## VIII

Desde luego que el listado anterior de problemas requiere un amplio período previo de búsqueda de regularidades en los procesos de división de un número por 2, 3, 4, 5, 6, 8 y 9. La calculadora proporciona la base experimental necesaria para llegar a ellas mediante un proceso inductivo, y para una comprensión suficiente de la situación que permita justificarlas deductivamente. A fin de cuentas son procesos muy sencillos. La división entre 9 es especialmente divertida.

| | | |
|---|---|---|
| 1/9 = 0,111111… | 2/9 = 0,222222… | 3/9 = 0,333333… |
| 9/9 = 1 | 10/9 = 1,11111… | 11/9 = 1,22222… |
| 34/9 = 3,77777… | 53/9 = 5,88888 … | 83/9 = 9,22222… |

*…hay que recordar siempre que una experimentación exahustiva e inteligente convence aunque no demuestra y una demostración rigurosa demuestra pero muchas veces no convence.*

Aparecerán en clase diversas formas de describir la regularidad observada, pero seguro que entre ellas está la que advierte que el período se obtiene «sumando» las cifras del dividendo: 8 + + 3 = 11 → 1 + 1 = 2. Sorprende entonces la dificultad que manifiestan para conectar este mecanismo con algo conocido. Y, por supuesto, cuando recuperan del baúl de la memoria el criterio de divisibilidad por 9 nadie sabe justificar qué tiene que ver con lo que han hecho.

Un tema tan atractivo y con tantas posibilidades para que alumnos y alumnas investiguen por su cuenta, elaboren, comprueben y modifiquen conjeturas, como el de los criterios de divisibilidad, es tratado habitualmente con una perspectiva meramente instrumental, como un recetario que no es necesario justificar sino simplemente aplicar obedientemente para obtener resultados. Como las transformaciones de Ahmes o las reglas de Abu-l-Wafa. Seguimos metodológicamente anclados en Egipto, pero con un diferencia social que hace la situación sangrante: los matemáticos de la Antigüedad y de la Edad Media escribían para usuarios analfabetos. Hay sugerencias dolorosas por este camino que preferimos no detallar.

Desde luego que habría que intentar justificar con cierto rigor que la «suma» de los dígitos de un número, su resto entero al dividir por 9 y la cifra del período son la misma cosa. Hay argumentaciones sencillas que siempre pueden ser posteriores al convencimiento empírico, y ya suficientemente riguroso, que se puede adquirir experimentalmente con la calculadora.

## IX

A la hora de optar por uno u otro camino didáctico hay que recordar siempre que una experimentación exahustiva e inteligente convence aunque no demuestra y una demostración rigurosa demuestra pero muchas veces no convence. La comprensión lógica afecta al cerebro pero el convencimiento es algo más visceral. Como diría Gattegno, se siente en el estómago. Un ejemplo muy claro lo proporciona la pequeña crisis que surge al dividir por 9: ¡no aparece 0,999999…!

Bien: ¿cómo convencer (¡convencer!, no demostrar) a cerca de veinte adolescentes de que 0,999999… = 1? Hay que tener en cuenta que escrita en la forma $0,9$ = 1 es todavía más dura de aceptar, se pierde cierta referencia visual. Desde luego que no se consigue con un proceso del tipo «llamo $x$ = 0,999999… ; entonces $10x$ = 9,999999… ; y por tanto $9x$ = 9, luego $x$ = 1». Una vez explicado suele ser habitual escuchar un escéptico «Bueno, ¿y qué?». Y quien lo emite tiene razón, está advirtiendo que la frialdad del camino seguido le impide «sentir» la igualdad 0,999999… = 1. De hecho es inevitable cierta sensación de que algo se escapa en esta argumentación. Algo así como si se hubiera hecho en el vacío y no en la «realidad». Un camino más pegado al suelo, más experimental, nos llevaría a intentar escribir un número comprendido entre 0,999999… y 1 (o a calcular la diferencia entre ambos). Si son diferentes, habrá infinitos entre los dos. La imposibilidad de hacerlo suele convencer a un porcentaje alto de alumnos y alumnas. Siempre quedan recalcitrantes, pero la necesidad de tiempo para asumir resultados es un elemental derecho de quien aprende.

*…¿cómo convencer (¡convencer!, no demostrar) a cerca de veinte adolescentes de que 0,999999… = 1?*

Analicemos los dos métodos. El primero es irrebatible y tiene la ventaja de que se puede generalizar para obtener la fracción generatriz de cualquier decimal periódico, no en vano es una argumentación algorítmica. Pero ahí reside su debilidad para convencer. Aporta «como hacer» pero no «porqués», puesto que no va a la naturaleza del problema … al menos aparentemente. Si lo analizamos con detalle vemos fácilmente que se sustenta en el carácter periódico de los decimales que pretende convertir en fracción. No podía ser de otra manera, pero para convencer puede ser preferible una experimentación más elemental como la que propone el segundo método: aporta menos rigor, deja la explicación a la imaginación, pero va de lleno a enfrentarse con la estructura de la notación decimal.

## X

La obtención de la fracción generatriz es otra de las cuestiones habitualmente reducida a una receta. En el peor de los casos aprendida memorísticamente. En el mejor, lo que se memoriza, sin comprender cómo se ha inventado, es el algoritmo empleado anteriormente. Se ha dicho ya mil veces que todo esto contribuye a una mitificación absurda de las Matemáticas y de la tarea de los matemáticos. Y la excusa de la eficacia se sostiene mucho peor en este caso. ¿Conocéis a alguien que tenga necesidad de obtener fracciones generatrices en su quehacer diario? Y además, ¡otra vez!, hay calculadoras que efectúan esa conversión.

El estudio de la división por 9 permite a un porcentaje muy alto de alumnos y alumnas convertir, sin haber recibido información previa, periódicos puros con una sola cifra en el período en fracciones. Para los casos en los que el período tiene dos cifras habrá que estudiar la división por 99.

| | |
|---|---|
| 1/99 = 0,010101… | 2/99 = 0,020202… |
| 23/99 = 0,2323… | 98/99 = 0,9898… |
| 101/99 = 1,0202… | 121/99=1,2222… |
| 134/99 = 1,353535… | 234/99 = 2,363636… |
| 1234/99 = 12,464646… | 2345608/99 = 23693,010101… |

Al margen de la fracción generatriz la atención se centra poco a poco en una conjetura inesperada. El criterio de divisibilidad por 9 es fácilmente generalizable a 99. El resto entero de la división por 99, las dos cifras del período de su parte decimal, se obtiene «sumando» pares de cifras del dividendo hasta obtener un resultado de dos cifras:

$$12 + 34 = 46;$$

$$2 + 34 + 56 + 08 = 100 \rightarrow 1 + 00 = 01$$

Se puede demostrar de forma tan sencilla como en el caso del 9. Basta tener en cuenta que $10^n - 1$, con $n$ par, y $10^n - 10$, con $n$ impar, son divisibles por 99. Veamos, como ejemplo, el caso de un número de cinco cifras.

$$\begin{gathered}
«x_4x_3x_2x_1x_0» = 10000x_4 + 1000x_3 + 100x_2 + 10x_1 + x_0 = \\
= (9999x_4 + x_4) + (990x_3 + 10x_3) + (99x_2 + x_2) + 10x_1 + x_0 = \\
= (9999x_4 + 990x_3 + 99x_2) + [x_4 + (10x_3 + x_2) + (10x_1 + x_0)] = \\
= (9999x_4 + 990x_3 + 99x_2) + [«x_4» + «x_3x_2» + «x_1x_0»]
\end{gathered}$$

Puesto que los sumandos del paréntesis son todos divisibles por 99 el corchete pertenecerá a la misma clase de restos módulo 99 que «$x_4x_3x_2x_1x_0$».

La demostración es tan fácilmente generalizable que está ya claro cual será el criterio de divisibilidad por 999:

23456007/999 = 23479,486486… (007 + 456 + 23 = 486)

y, en general, para 999… 9 (*n* nueves).

Si nos decidimos a indagar por nuestra cuenta, si desmenuzamos las situaciones en lugar de manejarlas empaquetadas como nos las dejaron en nuestros años de estudiantes, hay una probabilidad alta de que encontremos sorpresas inesperadas.

## XI

¿Qué tiene el 9 para que pasen con él estas cosas? La respuesta está clara a estas alturas. Si el resto de la división de «*abc*» entre 9 es $a + b + c$ (es decir: $a + b + c$ pertenece a la misma clase de restos módulo 9 que «*abc*») ello es debido a que 9 es el número anterior a la base del sistema de numeración que empleamos.

Fantaseemos un poco. El citado al-Kashi (s. XV) manejaba, además del decimal, un sistema de numeración posicional de base 60. Por analogía, el criterio de divisibilidad por 59 en este sistema debería ser el mismo que el del 9 en el decimal. Una descomposición como las del párrafo anterior en base 10 no cambiará en lo esencial en base 60. ¿Sabría esto al-Kashi? Es igual, juguemos un rato (con nuestras grafías, claro).

«28 45 53» / «59» = = «29 15 , 8 8 8….»

como muestra la división de abajo. Y, efectivamente,

«28» + «45» + «53» = «2 6»

(es decir, 126)

y

«2» + «6» = «8»

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 28 | 45 | 53 | 59 | | | |
| –28 | 31 | | 29 | 15 | , | 8 |
| | 14 | 53 | | | | |
| | –14 | 45 | | | | |
| | | 8 | 0 | | | |
| | | –7 | 52 | | | |
| | | | 8 | | | |

## XII

¿Hasta cuándo la insistencia en un uso exclusivamente instrumental de las matemáticas en las aulas? Es cierto que hay toda una larga tradición cultural en esta línea. La obra de Abu-l-Wafa antes citada no incluye demostraciones de sus reglas y resultados. Como su título indica se dirige a escribas y comerciantes, a los que se les aportan reglas y ejemplos suficientes para que operen con eficacia; no es necesario que comprendan. La cuestión a plantear es qué entendemos, o deberíamos entender, como conveniente para la formación de los adolescentes. También sobre esto se ha escrito mucho y se ha leído o asumido muy poco. Citaremos simplemente, para terminar, un fragmento de Erich Fromm (1998).

*¿Hasta cuándo la insistencia en un uso exclusivamente instrumental de las matemáticas en las aulas?*

> El pensamiento crítico es la facultad humana específica. El pensamiento instrumental, o sea, pensar cómo conseguiré, qué haré para coger esto y aquello, es cosa que hacen muy bien los chimpancés. De hecho, los chimpancés son animales con una inteligencia instrumental excelente. En experimentos, han cumplido tareas tan difíciles que muchas personas no habrían podido hacerlas. En cambio, la facultad de pensar críticamente es una dote exclusiva del hombre[4] y es a la vez su único recurso. Sólo con el pensamiento crítico puede el hombre apreciar la realidad.

4 Y de la mujer, obviamente. (El añadido de esta nota no nos parece superfluo en absoluto.)

**Carlos Usón**
IES Quintiliano.
Calahorra (La Rioja).
Sociedad Riojana
de Profesores de Matemáticas

**Ángel Ramírez**
IES Biello Aragón.
Sabiñánigo (Huesca).
Sociedada Aragonesa
de Profesores de Matemáticas
«Pedro Sánchez Ciruelo»

## Bibliografía

COLLETTE, J. P. (1985): *Historia de las matemáticas, tomo I*, Siglo XXI, Madrid.

FREINET, C. (1986): *Parábolas para una pedagogía popular*, Planeta-Agostini.

FROMM, E. (1998): *El arte de escuchar*, Altaya, Barcelona.

RAMÍREZ, A. (1997): *De la mano a la electrónica. Máquinas de calcular* (folleto para la exposición del mismo título en la UNED de Barbastro, en noviembre)

RAMÍREZ, A. y C. USÓN (1996): «…Por los trillados caminos de la aritmética escolar de las cuatro operaciones», *Suma*, n.° 21, 63-71.

YOUSCHKEVITCH (1976): *Les mathématiques arabes (VIII-XV siècles)*, J. Vrin, Librairie philosophique, Paris.

*Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*, MEC. Madrid, 1985.