SUMA 34
junio 2000, pp. 81-85

Historia de las matemáticas: métodos no algebraicos para la resolución de problemas

Vicente Meavilla Seguí

En épocas pasadas, cuando el álgebra que utilizamos hoy en día no existía como tal o estaba dando sus primeros y balbuceante pasos, la resolución de problemas elementales de primer grado (problemas de móviles, grifos, relojes,...) fue atacada por los matemáticos mediante métodos aritméticos y geométricos (inversión, falsa posición, regla de tres,...) en los que no era preciso utilizar ningún tipo de simbolismo algebraico.
En este artículo presentamos algunos de dichos métodos, convencidos de que pueden ayudar a los alumnos no universitarios cuando tengan que enfrentarse a determinados problemas utilizando el álgebra simbólica.

ARTÍCULOS

ANTES DE QUE EL ÁLGEBRA simbólica tomase carta de naturaleza en los manuales dedicados a la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, para la resolución de algunos problemas elementales se utilizaron diversos métodos no algebraicos (inversión, falsa posición, etc.) que, desde una perspectiva histórica, tienen un notable interés y que, en ocasiones, pueden iluminar al profesor de Matemáticas actual en su trabajo diario en el aula.

En este artículo presentamos algunos de dichos métodos, rescatados de viejos libros.

Método de inversión

Para resolver determinados problemas elementales, los matemáticos árabes, hindúes y, posteriormente, los autores occidentales utilizaron el método de inversión, que Aryabhata (476 d.C.) describía así:

> La multiplicación se convierte en división; la división en multiplicación; lo que era beneficio se convierte en pérdida; lo que era pérdida se convierte en ganancia; inversión.

El matemático árabe al-Amuli (1547-1622), refiriéndose al mismo método decía:

> Este procedimiento consiste en hacer lo contrario de lo que propone el enunciado: pide doblar, se semisuma; pide sumar, se resta; pide raíz, se cuadra, etc.; comenzando por la última parte del problema se obtiene la solución.

Dos ejemplos de aplicación del método de inversión

> Encontrar un número tal que si se multiplica por 5 y además por 7, y el resultado se divide por 12, el cociente es 8.
>
> Multiplica 8 por 12 y divide el resultado por 5 veces 7...
>
> (E. de la Roche, *Larismethique*).

Encuentra un número tal que si tomas 1/ 5, de este quinto otro 1/ 5, y de este 1/ 5 otro 1/ 5, el último quinto sea 6.

Haz lo siguiente:

Multiplica 6 por 5, hacen 30; multiplica 30 por 5, hacen 150; multiplica 150 por 5 y serán 750. Y este es el número que se pide.

(Joan Ventallol. *Aritmética*)

Método de una falsa posición

La *regla de una falsa posición* o *regla de falsa posición simple*, que ya fue utilizada por los antiguos egipcios, árabes e hindúes, gozó de una gran popularidad en los textos matemáticos del siglo XVI y todavía se puede encontrar en algunos libros de matemática elemental de la primera mitad del presente siglo.

En general, la regla de falsa posición simple se usaba para resolver algunos problemas de primer grado con una incógnita, sin necesidad de recurrir al simbolismo algebraico.

De hecho, los problemas resueltos por la regla de una falsa posición eran aquellos cuyos enunciados se pueden traducir literalmente a una ecuación del tipo: $a_1x + a_2x + \ldots + a_nx = b$ o, si se quiere, $ax = b$.

Descripción de la regla de una falsa posición

La regla de falsa posicion simple se reduce à tres preceptos.

1. Tomese qualquiera numero, que sea apto, para que en èl se puedan exercitar las operaciones que pide la question. 2. Examinese, si es el numero que se pregunta: y si acaso fuere el mismo, quedarà satisfecha la question; pero si no lo fuere, se formarà una regla de tres, que es el tercero precepto, y se hallarà el numero que se busca.

Exemplo. Pidese, que el numero 100. se divida en tres partes, que la primera sea dupla de la segunda, y èsta sea tripla de la tercera: que es lo mismo que pedir tres numeros, el primero doblado del segundo, y èste tres doble del tercero, que sumados hagan 100. Tomo arbitrariamente un numero, y sea 2. èste supongo ser el menor de los tres, que se piden, para mayor facilidad. Triplico el 2. y serà 6. el segundo; duplico el 6. y tengo 12. sumo estos tres numeros 12. 6. 2. y hacen 20. y porque la suma havia de ser 100. busco otro numero por la regla de tres, diciendo: Si 20. vienen de 2. de quàntos vendràn 100? y hallo vienen de 10. Este pues serà el numero menor: luego el segundo es 30. y el mayor es 60. Con esto queda satisfecha la question; porque he dado los tres numeros 60. 30. 10. de los quales 60. es doblado de 30. y èste triplo de 10. y sumados hacen 100.

(Tomás Vicente Tosca, *Compendio Mathematico*)

Justificación geométrica de la regla de una falsa posición

Por semejanza de triángulos (figura 1) se tiene que:

$$x/b = = x_1/b_1$$

De donde:

$$x = bx_1/b_1$$

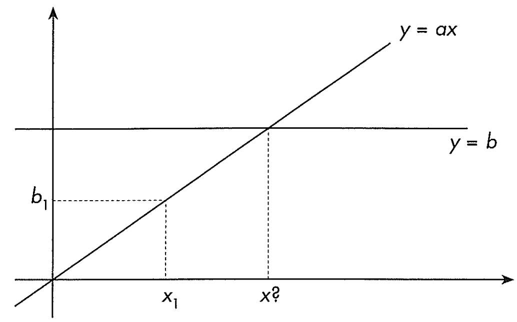


Figura 1

La regla de una falsa posición o regla de falsa posición simple, *que ya fue utilizada por los antiguos egipcios, árabes e hindúes, gozó de una gran popularidad en los textos matemáticos del siglo XVI y todavía se puede encontrar en algunos libros de matemática elemental de la primera mitad del presente siglo.*

Regla de dos falsas posiciones

Marco Aurel, autor alemán que escribió en 1552 el primer libro de álgebra en castellano, refiriéndose a la regla de dos falsas posiciones se expresaba en los siguientes términos:

En la regla de 2 falsas posiciones: lo mesmo haras como con la vna falsa has visto, en poner vn numero falso, con el que siguiras conforme a la demanda. Y a la postre mira, si lo que viene es mas, o menos delo que hauia de ser, aquello pornas aparte al costado del numero falso a su mano derecha, con la señal de más, o menos, qual fuere, digo la differencia que haura delo que vino, a lo que hauia de venir. Y luego toma otro numero a tu plazer, mayor, o menor delo que primero tomaste (no haze al caso) con el qual haras lo mesmo como con la primera posicion heziste: a la postre mira la differencia si es mas, o memos delo que hauia de ser: y pornas esta segunda posicion debaxo de la primera: y la differencia debaxo de la primera differencia, con su señal, o nombre, si es mas, o menos. Y luego multiplica en cruz la primera differencia con la segunda posicion: y la segunda differencia con la primera posicion, y sigue estas reglas y auisos siguientes:

Nota quando las dos differencias fueren de mas, o las 2 de menos: restaras la vna de la otra, digo la menor differencia has de restar dela mayor, y lo que quedara sera tu partidor. Assi mesmo restaras las 2 multiplicaciones que en cruz multiplicaste: y la resta partiras por el susodicho partidor: y el quociente sera el numero verdadero demandado.

Y si las dos differencias la vna fuere mas y la otra menos, summaras las dichas dos differencias: y tal conjunto sera tu partidor: y las 2 multiplicaciones, que en cruz multiplicaste (como arriba has visto) summaras tambien en vno, y tal suma partiras por tu partidor: el quociente sera el numero verdadero y demandado.

Justificación algebraica de la regla de dos falsas posiciones

Supongamos que pretendemos resolver un problema cuyo enunciado se puede traducir a una ecuación del tipo:

$$ax + b = c \qquad [1]$$

Sea $x = x_1$ la primera suposición.

Entonces:

$$ax_1 + b = c_1 \qquad [2]$$

Si $c_1 = c$, el problema está resuelto.

Si $c_1 \neq c$, sea $c - c_1 = e_1$ (primera diferencia).

Sea $x = x_2$ la segunda suposición.

Entonces:

$$ax_2 + b = c_2 \qquad [3]$$

Si $c_2 = c$, el problema está resuelto.

Si $c_2 \neq c$, sea $c - c_2 = e_2$ (segunda diferencia).

Restando miembro a miembro las expresiones [1] y [2] resulta:

$$a(x - x_1) = e_1 \qquad [4]$$

Restando miembro a miembro las expresiones [1] y [3] se obtiene:

$$a(x - x_2) = e_2 \qquad [5]$$

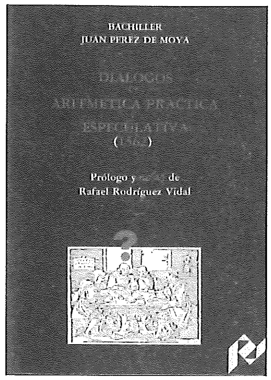
Despejando a de [4] y [5] e igualando los resultados obtenidos se tiene que:

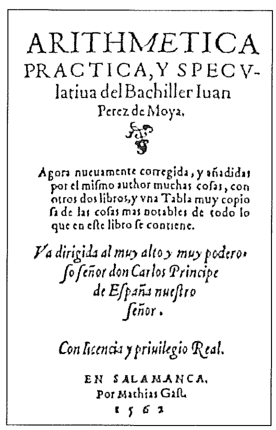
$$e_1/(x - x_1) = e_2/(x - x_2)$$

De donde, multiplicando medios por extremos y despejando la incógnita x, se llega finalmente a:

$$x = (e_1x_2 - e_2x_1)/(e_1 - e_2)$$

Esta última expresión contiene toda la casuística contemplada en la descripción de Marco Aurel.




ARITHMETICA
PRACTICA, Y SPECV-
latiua del Bachiller Iuan
Perez de Moya.

Agora nueuamente corregida, y añadidas por el miſmo author muchas coſas, con otros dos libros, y vna Tabla muy copioſa de las coſas mas notables de todo lo que en eſte libro ſe contiene.

Va dirigida al muy alto y muy poderoſo ſeñor don Carlos Principe de Eſpaña nueſtro ſeñor.

Con licencia y priuilegio Real.

EN SALAMANCA.
Por Mathias Gaſt.
1562

Un ejemplo de aplicación de la regla de dos falsas posiciones

Dame un numero, que añadiendole su mitad y tercio, y mas 9, monte 60.

Para declaración de lo que esta demanda pide, pon por caso, que el numero sea 30, o lo que quisieres. Añade a estos 30 su mitad, que son 15, y su tercio, que son 10, y 9 mas, y montara todo 64. Y porque no quisieras sino 60 pondras los 30 que tomaste por numero falso, y adelante los 4 que vienen mas de los 60 que quisieras desta manera —— 30 mas 4.

Ya que no acertaste con el 30, porque fue grande, tomaras otro. Y sea qualquiera, assi como 36. Añadele su mitad, que son 18, y su tercio, que son 12, y mas 9, como pide la demanda, y montara todo 75. Y porque no quisieras sino 60 pondras el 36 que tomaste, y adelante los 15 que salen de mas, que es la diferencia que ay de los 60 hasta 75, como parece figurado.

30 mas 4

36 mas 15

Hecho esto multiplicaras los numeros falsos con sus diferencias contrarias, conuiene a saber los 30, que es el numero falso, por las 15, que es lo que en el segundo vino de mas, y montara 450. Multiplica assi mismo los 36, que es el segundo numero falso, por 4, que es la diferencia del primero, y montara 144, las quales multiplicaciones pondras delante, como parece.

	Mas		
30	╳	4 ——	144
36		15	450

Hecho esto, restaras las dos multiplicaciones, la menor de la mayor, como son 144 de 450, y la resta sera la particion. Resta mas, la vna diferencia, que es quatro, de la otra, que es 15, y lo que quedare sera partidor. Pues restando 144, que es la vna multiplicacion, de los 450, que es la otra, quedan 306. Resta mas, la vna diferencia, que es 4, de la otra, que es 15, y quedaran 11 (esto es lo que quiere dezir, mas y mas es restar). Parte ahora 306 por 11 y vendra el quociente 27 y 9 onzabos. Y este sera el numero que si le juntas su mitad y tercio y nueue mas montara 60 como la demanda pide.

(Juan Pérez de Moya, *Aritmetica practica y especulativa*)

Método de aposición-remoción

Este método aritmético fue utilizado para resolver problemas indeterminados que admitían una traducción al simbolismo algebraico moderno del tipo:

$$x + y + z = m$$

$$ax + by + cz = n$$

Desde una óptica algebraica, el método constaba de dos fases:

1.ª fase: Eliminación de una de las incógnitas.

2.ª fase: Cálculo, por ensayo-error, de una solución entera de la ecuación indeterminada resultante.

Un ejemplo de aplicación del método de aposición-remoción

Un hombre quiere hacer un convite y da a su comprador 36 sueldos para que le compre tres clases de aves, como mirlos, tres por un sueldo, gallinas a 2 sueldos la pieza y capones a 3 sueldos la pieza. Y quiere 36 entre todos y que le cuesten 36 sueldos. Os pido: ¿cuántos comprará de cada clase?

Hazlo así:

Compra los 36 de aquellos de menor valor, que son los mirlos, y encontrarás que cuestan 12 sueldos. Quítalos de 36, quedan 24. Primero mira cuanto vale un mirlo y encontrarás que vale 1/3 de sueldo. Ahora mira cuanto vale más una gallina que un mirlo y encontrarás 1 sueldo y 2/3, ponlos aparte. Después, mira cuanto vale más un capón que un mirlo y encontrarás 2 sueldos y 2/3. Ahora haz tercios de todo, es decir: de 1 2/3 y serán 5/3, así como de 2 2/3 y serán 8/3. Y después harás tercios de 24 sueldos y serán 72/3. Ahora de estos 72 haz dos partes tales que la una se pueda partir por 5 y la otra por 8 y que venga justo. Para ello harás lo siguiente: Quita tantas veces 5 de 72 hasta que quede un número que se pueda partir por 8. Y encontrarás que será 32 y el otro será 40. Divide 32 por 8 y vendrán 4. Después divide 40 por 5 y vendrán 8. Y así ves que habrá 4 capones y 8 gallinas, que son 12. Hasta 36 sobran 24, y tantos mirlos habrá. Y así harás todas las semejantes.

(Joan Ventallol, *Aritmética*)

Traducción del método de Joan Ventallol al lenguaje moderno

	Número	*Precio*
Mirlos	x	1/3 sueldos
Gallinas	y	2 sueldos
Capones	z	3 sueldos

Con esto, el problema propuesto se reduce a resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y+z=36 \\ \dfrac{1}{3}x+2y+3z=36 \end{cases}$$

Ventallol procede del modo siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}y+\dfrac{1}{3}z=12 \\ \dfrac{1}{3}x+2y+3z=36 \end{cases}$$

De donde, restando miembro a miembro, se obtiene:

$$\frac{5}{3}y+\frac{8}{3}z=24=\frac{72}{3}\Rightarrow 5y+8z=72\Rightarrow 5y+8z=40+32\Rightarrow \begin{cases} y=8 \\ z=4 \end{cases}$$

Por tanto, $x = 24$

Resolución aritmética de algunos problemas clásicos

Problemas de móviles

Uno hace un viaje y cada día camina 30 millas. Cinco días después le sigue otro que cada día camina 35 millas. Pregunto: ¿en cuántos días lo alcanzará?

Mira cual es la ventaja del primero al cabo de 5 días y encontrarás que tiene 150 millas de ventaja. Las cuales deber partir por 5, que es lo que el segundo camina más que el primero cada día, y vendrá 30. Y en 30 días lo alcanzará.

(Joan Ventallol, *Aritmética*)

Vn correo se parte de Madrid para Roma, y no se sabe quantas leguas camina cada dia: pero sabese que otro correo se partio a cabo de 4 dias de la misma Villa de Madrid, y por el mismo camino hazia Roma, el qual caminaua cada dia 20 leguas, y este alcanço al primero correo en 6 dias. Pregunto, quantas leguas caminaba el primer correo cada dia.

Digo que el primer correo caminaua 12 leguas cada dia. La regla es, que mires el segundo correo quantas leguas auia caminado en los 6 dias que alcanço al primero, y hallaras que 6 dias a 20 leguas son 120, que partidas por 10 dias que auia caminado el primero, vendran las 12 leguas que caminaua cada dia.

(Gerónimo Cortés, *Arithmetica Practica*)

El primero de Abril se partieron dos correos, el vno de Valencia para Sevilla, y el otro de Sevilla para Valencia, camino de 84 leguas: y el que parte de Valencia, camina cada dia 10 leguas, y el que parte de Sevilla, camina al dia 14 leguas. Pregunto, en quantos dias se encontraran caminando los dos por un camino.

Digo que en 3 dias y medio se encontraran. La regla es que partas las 84 leguas por las 24 leguas que caminan entrambos cada dia, y saldran los 3 dias y medio en que se encontraran, como esta dicho.

(Gerónimo Cortés, *Arithmetica Practica*)

Son dos mensajeros. Uno sale de Perpiñán hacia Valencia y hace su camino en 9 días y el otro sale de Valencia hacia Perpiñán y hace su camino en 11 días. Os pido: saliendo los dos a la misma hora, ¿en cuánto tiempo se encontrarán?

Hazlo así:

Suma 9 y 11, hacen 20, que es el partidor. Después, multiplica 9 veces 11, hacen 99. Divide 99 por 20 y te vendrán 4 19/20. Y en 4 días y 19/20 de día se encontrarán.

(Joan Ventallol, *Aritmética*)

Comentario

Tomando la distancia entre Perpiñán y Valencia como unidad de longitud, resulta que el primer mensajero recorre 1/9 de dicha distancia en un día, y el segundo 1/11.

Por tanto, en un día los dos mensajeros recorren 1/9 + 1/11 = 20/99 de la distancia que les separaba inicialmente. Entonces, por la regla de tres, para recorrer 99/99 de dicha distancia tardarán 99/20 días.

Problemas de grifos

Es vna bota que tiene tres agujeros differentes, la qual estando llena de agua sale toda por el mayor agujero en 3 horas, y por el mediano en 4 horas, y por el menor en 6 horas. Pregunto, si los tres agujeros se desatapassen juntos, en quanto tiempo se vaziaria la dicha bota?

Digo que en vna hora y vn tercio de hora se vaziaria toda la bota, desatapando los tres agujeros a vn tiempo.

La regla es, que tomes vn numero que juntamente se pueda partir por 6, 4 y 3, y sera 12, que partido por los dichos tres numeros vendran estos otros tres 2, 3 y 4, que juntados hazen 9. Y dirás: si nueue vezes se vazia la bota en 12 horas, vna vez sola en quantas horas se vaziara? Y hallaras que en vna hora y vn tercio de hora, como esta dicho.

(Gerónimo Cortés, *Arithmetica Practica*)

Comentario

El agujero mayor vacía la bota en 3 horas. El agujero mediano vacía la bota en 4 horas. El agujero menor vacía la bota en 6 horas.

m. c. m (3, 4, 6) = 12

El agujero mayor en 12 horas vacía la bota 4 veces. El agujero mediano en 12 horas vacía la bota 3 veces. El agujero menor en 12 horas vacía la bota 2 veces.

Por tanto, los tres agujeros juntos vacían 9 veces la bota en 12 horas.

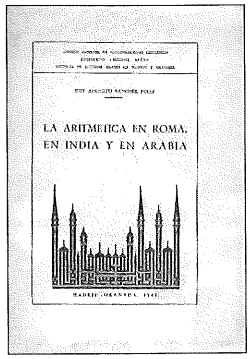
En consecuencia, por la regla de tres, si los tres agujeros juntos vacían la bota 9 veces en 12 horas, para vaciarla una vez tardarán 12/9 = 4/3 horas.

Un grifo llena una fuente en 4 días. Cuando está llena lo cerramos y abrimos un desagüe que la vacía en 11 días.

Estando la fuente vacía, ¿en cuánto tiempo se llenará, abriendo a la vez el grifo y el desagüe?

(Philippi Calandri, *Pictagoras arithmetrice introductor*)

La resolución del matemático florentino, presentada en forma esquemática, sin explicación alguna, se ajusta al siguiente plan:



Vicente Meavilla
IES Francés de Aranda
(Teruel)
Sociedad Aragonesa de
Profesores de Matemáticas
«Pedro Sánchez Ciruelo»

El grifo llena 1/4 de la fuente en un día. El desagüe vacía 1/11 de la fuente en un día.

Por tanto, en un día se llenan 7/44 de la fuente (7/44 = = 1/4 – 1/11) y en 44 días la fuente se llenaría 7 veces.

Entonces, si la fuente se llena 7 veces en 44 días, para llenarla una vez se necesitarán 44/7 días.

Un problema de relojes, sin relojes

Si oy se hallassen dos estrellas, o planetas juntos y en conjuncion, como sabriamos por Arithmetica sin ser Astronomos en quanto tiempo se tornarian a hallar juntos, como sucede en el presente año, entre Iupiter y Saturno, que se hallan juntos la vispera de Nauidad, el qual ajuntamiento llaman los Astronomos, conjuncion magna, por los grandes y terribles effectos que suele causar, segun ellos dizen, y la experiencia lo demuestra.

Essa demanda bien pudieras auer dexado para los Astronomos pues a ellos toca: pero todavia quiero darte contento: y aduierte, que primero se ha de saber quanto tiempo tarda cada estrella, o planeta en dar la buelta a todo su orbe. Y pues has hecho memoria de la magna conjuncion de Iupiter y Saturno, propongamos el exemplo dellos. Y sepas que Iupiter tarda en dar la buelta a su orbe doze años, y Saturno al suyo tarda treynta años, según parecer de Cardano, porque vnos escriuen que tardan mas, y otro menos: y tomando el parecer de Cardano, digo, que multipliques los 12 años de Iupiter por los 30 de Saturno, y montaran 360 años, que partidos por 18, que es la differencia que hay de 12 a 30, saldran 20 años: y acabo de tantos años se hallaran juntos, y en conjuncion los dichos planetas.

(Gerónimo Cortés, *Arithmetica Practica*)

Comentario

Gerónimo Cortés admite que Júpiter y Saturno describen órbitas circulares con el mismo centro.

Júpiter en un año describe 1/12 de su órbita. Saturno en un año recorre 1/30 de su órbita. Por tanto, en un año, Júpiter «adelanta» a Saturno 1/12 – 1/30 = 18/360 = 1/20.

En consecuencia, por la regla de tres, para que Júpiter «adelante» a Saturno una órbita completa (momento de la nueva conjunción) deberán transcurrir 20 años.

Referencias bibliográficas

AUREL, M. (1552): *Libro primero de Arithmetica Algebratica*, J. Mey, Valencia.

CORTÉS, G. (1604): *Arithmetica practica*, J. C. Gárriz. Valencia.

PÉREZ DE MOYA, J. (1562): *Aritmetica practica y especulativa*, F. Serrano, Madrid.

DE LA ROCHE, E. (1520): *Larismethique nouellement composee*, C. Fradin, Lyon.

SÁNCHEZ PÉREZ, J. A. (1949): *La aritmética en Roma, en India y en Arabia*, C. S. I. C., Madrid.

SMITH, D. E. (1958): *History of Mathematics*, Dover, New York.

TOSCA, T. V. (1707-1715): *Compendio Mathematico*, A. Bordázar, Valencia.

VENTALLOL, J. (1521): *Aritmética*.