

## Iteración de funciones e introducción al caos con Mathematica

**Ángela Rojas Matas**

**L**A TEORÍA DEL CAOS se ha convertido en un asunto de gran interés y no sólo para la comunidad científica. Películas como la norteamericana *Parque Jurásico* o la española *El efecto mariposa* explican con la teoría del caos el devenir de los acontecimientos en sus respectivas historias. En este trabajo vamos a abordar los aspectos básicos del caos a través del estudio de la iteración de punto fijo de una función particular: *la función logística*.

La iteración es un proceso muy habitual en los programas de ordenador. Los resultados en algunas ocasiones pueden resultar sorprendentes. Así se pueden obtener resultados totalmente dispares a largo plazo aun partiendo de valores iniciales muy próximos. El efecto anterior se conoce como *efecto mariposa* o sensibilidad a las condiciones iniciales y ya fue observada de forma accidental por Edward Lorenz en 1968. Este meteorólogo seguía un proceso iterativo para la predicción del tiempo que le llevaba varias horas de trabajo en un ordenador. Un día repitió los cálculos proporcionando como dato de entrada el mismo valor de otra ocasión anterior, pero, por simplificar, sólo proporcionó seis cifras decimales de precisión y puso el sistema a trabajar. Cuando volvió se encontró con unos resultados totalmente distintos. En un sistema dinámico como la atmósfera cambios pequeñísimos en una variable pueden resultar amplificados y provocar enormes efectos. En teoría, como dijo el propio Lorenz en su artículo *Can the flap of a butterfly's wing stir up a tornado in Texas?* (Peitgen, 1992), el simple aleteo de una mariposa podría provocar un tornado en el polo opuesto del mundo.

Para estudiar este tema es imprescindible el uso del ordenador. Hemos llevado a cabo esta experiencia con alumnos de la Escuela de Ingeniería Técnica Industrial de Córdoba, usando *Mathematica* por la potencia y versatilidad que posee este *software*.

En este trabajo se estudia la iteración de punto fijo muy habitual en todos los programas de cálculo numérico y su aplicación en un caso particularmente interesante: *la función logística*. De esta forma se pueden introducir elementos característicos de la teoría del caos: efecto mariposa o exponente de Lyapunov, bifurcaciones por duplicación de periodo, etc. Esta experiencia se ha realizado en la Escuela de Ingeniería Técnica Industrial de Córdoba, usando *Mathematica* por la potencia y versatilidad que posee este *software*.

## Iteración de una función

Tenemos una función real  $f(x)$ , partimos de un valor inicial  $x_0$  y generamos una sucesión de valores  $\{x_n\}$  de la siguiente forma:  $x_n = f(x_{n-1})$ . Este tipo de iteración se conoce como *iteración de punto fijo*.

Supongamos que la función  $f$  admite  $p$  como punto fijo, entonces:  $f(p) = p$ . Partimos de un valor inicial  $x_0$  y nos interesa saber cuándo se puede asegurar la convergencia de la sucesión  $\{x_n\}$  al punto fijo  $p$ . En este caso diremos que el punto fijo  $p$  es un punto fijo *atractivo* o *estable*. La respuesta nos la proporciona el siguiente teorema:

Sea  $f$  una función definida y con derivada continua en  $(p - r_0, p + r_0)$ , un entorno del punto fijo. Si  $|f'(p)| < 1$ , entonces existe un  $r < r_0$  tal que para cualquier  $x_0 \in [p - r, p + r]$  la sucesión  $x_n = f(x_{n-1})$  para  $n \geq 1$  es convergente hacia  $p$ .

La demostración se basa en el teorema del valor medio:

$$x_n - p = f(x_{n-1}) - f(p) \Rightarrow x_n - p = f'(s)(x_{n-1} - p)$$

donde  $s$  es un valor intermedio entre  $x_{n-1}$  y  $p$ . Como la derivada de  $f$  es continua, seguro existe un intervalo  $[p - r, p + r]$  donde:  $|f'(x)| \leq k < 1$ . Por lo tanto:

$$\begin{aligned} |x_n - p| &= |f'(s)| \cdot |x_{n-1} - p| \leq k \cdot |x_{n-1} - p| \\ &\leq k^2 \cdot |x_{n-1} - p| \leq \dots \leq k^n \cdot |x_0 - p| \end{aligned}$$

de manera que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$$

Una observación útil es que si los errores  $e_n = x_n - p$  son no nulos, entonces:

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{x_{n+1} - p}{x_n - p} = \frac{f(x_n) - f(p)}{x_n - p} \rightarrow f'(p)$$

por lo tanto, la magnitud de la derivada de la función en el punto fijo nos indica la rapidez de la convergencia de la iteración de punto fijo.

En el caso de que  $|f'(p)| > 1$ , las únicas sucesiones que convergen al punto fijo son aquellas cuyos términos, de uno concreto en adelante, son siempre iguales a  $p$ , ya que por la continuidad de la derivada, será posible encontrar un entorno  $[p - r, p + r]$  del punto fijo donde:  $|f'(x)| \geq k > 1$ . Supongamos que tenemos una sucesión de términos distintos de  $p$  que converge a  $p$ . Desde un cierto término  $n_0$  en adelante, los términos de la sucesión pertenecerán al entorno anterior y por lo tanto:

$$|x_n - p| \geq k \cdot |x_{n-1} - p| \geq \dots \geq k^{n-n_0} \cdot |x_{n_0} - p|$$

si  $n$  tiende a infinito, las distancias  $|x_n - p| > 1$  tienden a infinito, lo cual contradice la convergencia de la sucesión.

*Un método gráfico para conseguir visualizar fácilmente la iteración de punto fijo consiste en dibujar simultáneamente la función bajo consideración y la bisectriz del primer y tercer cuadrante.*

Vemos como, en este caso, para  $x_n$  próximo a  $p$ ,  $x_{n+1}$  dista más de  $p$  que  $x_n$ . El punto fijo se llama entonces *repulsor* o *inestable*.

## Gráfico de la iteración de punto fijo

Un método gráfico para conseguir visualizar fácilmente la iteración de punto fijo consiste en dibujar simultáneamente la función bajo consideración y la bisectriz del primer y tercer cuadrante. Si buscamos el punto fijo  $p$  de una función  $f$ , entonces  $f$  y la bisectriz se cortarán en el punto  $(p, p)$ . En la iteración de punto fijo, se parte de un valor  $x_0$  concreto sobre el eje de abscisas. Entonces  $x_1 = f(x_0)$  se obtiene levantando una recta vertical desde el punto  $x_0$  hasta cortar a la gráfica de  $f$ , obteniendo el punto  $(x_0, x_1)$ . Por la intersección obtenida se traza una recta horizontal hasta cortar a la bisectriz, en el punto  $(x_1, x_1)$ . La abscisa de dicho punto de corte es  $x_1$ . A continuación se repite el proceso.

Como vimos en el teorema anterior, la sucesión de punto fijo será convergente si  $|f'(p)| < 1$ . Es fácil comprobar que pueden conseguirse dos tipos de convergencia:

- monótona (creciente o decreciente), como se muestra en la figura 1, cuando  $0 < f'(p) < 1$ , es decir cuando la función es creciente en  $p$ . En este caso, la sucesión se acerca al punto fijo con «una escalera hacia dentro»;

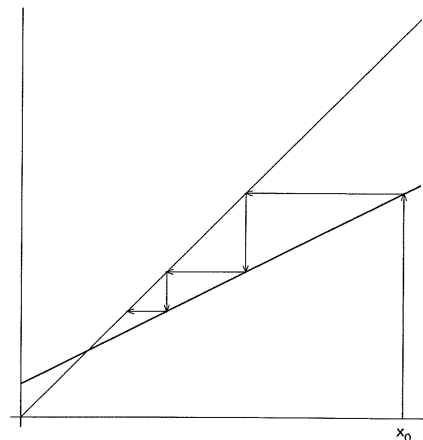


Figura 1. Escalera hacia dentro

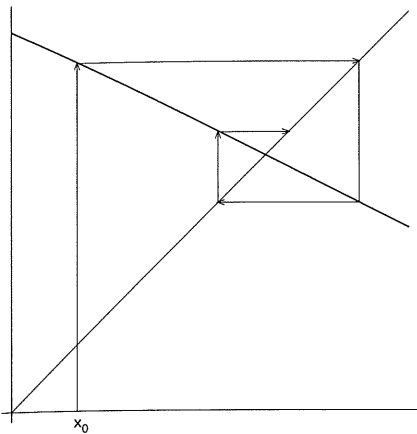


Figura 2. Espiral hacia dentro

- oscilante, como se muestra en la figura 2, cuando  $-1 < f'(p) < 0$ , es decir cuando es decreciente. En este caso, la sucesión se aproxima a  $p$  con «una espiral hacia dentro».

Análogamente, si  $|f'(p)| > 1$ , la sucesión de punto fijo será generalmente divergente (sólo «accidentalmente» será convergente, como comentamos anteriormente), pudiendo ser también:

- monótona, como se muestra en la figura 3, cuando  $1 < f'(p)$ , la sucesión diverge (se aleja del punto fijo  $p$ ) con «una escalera hacia fuera».
- oscilante, como se muestra en la figura 4, cuando  $f'(p) < -1$ , la sucesión diverge con «una espiral hacia fuera».

El programa para obtener un gráfico de iteración con *Mathematica* se presenta a continuación. Hay que proporcionar previamente la función, el valor inicial, número de iteraciones y el rango de valores de  $x$  para la representación gráfica:

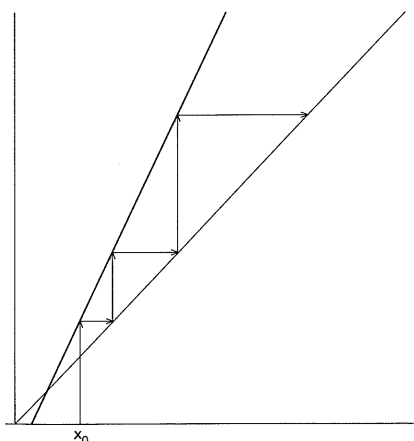


Figura 3. Escalera hacia fuera

*Este iterador es muy utilizado en biología para modelar el crecimiento de determinadas poblaciones.*

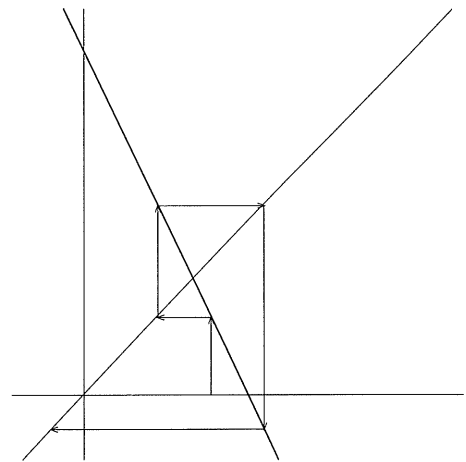


Figura 4. Espiral hacia fuera

```

gra1 = Plot [ { f[x], x}, { x, xmin, xmax }, DisplayFunction -> Identity];
ptos = { };
lista = NestList [ f, x0, nitera ];
PrependTo [ ptos, { x0, 0 }];
For [ i = 1, i <= nitera, i++,
  AppendTo [ ptos, { lista[[ i]], lista[[ i+1]] } ];
  AppendTo [ ptos, { lista[[ i+1]], lista[[ i+1]] } ];];
gra2 = LisPlot [ ptos, PlotJoined -> True, DisplayFunction -> Identity ];
Show [ gra1, gra2, DisplayFunction -> $DisplayFunction ]

```

## Función logística: diagrama de bifurcación

Vamos a estudiar una función concreta, conocida como *función logística*:

$$f: [0,1] \rightarrow [0,1]$$

$$x \rightarrow rx(1-x)$$

Este iterador es muy utilizado en biología para modelar el crecimiento de determinadas poblaciones. La imagen de esta función es una parábola invertida que tiene su máximo en  $(1/2, r/4)$ . Para confinar las iteraciones al intervalo  $[0, 1]$ , tiene que verificarse:  $0 \leq r/4 \leq 1$ . Por lo tanto, el rango de posibles valores del parámetro será:  $0 \leq r \leq 4$ .

Si  $0 < r \leq 1$ , la parábola cae enteramente por debajo de la bisectriz del primer cuadrante. En este caso, sólo habrá un único punto fijo en  $p_1$ , ya que éste será el único punto de corte de la gráfica con la bisectriz. Para  $r > 1$  existen dos puntos de intersección de la función con la bisectriz. Resolviendo la ecuación:  $rx(1-x) = x$ , se obtienen los dos puntos fijos:

$$p_1 = 0 \text{ y } p_2 = \frac{r-1}{r}$$

para  $r > 1$ .

Como  $f'(x) = r - 2rx$ , entonces  $f'(0)$  y

$$f'\left(\frac{r-1}{r}\right) = 2 - r$$

De manera que:

- si  $0 < r < 1$ , entonces  $p_1$  es un punto fijo atractivo o estable en escalera. Las sucesiones generadas por iteración, también llamadas *órbitas*, serán atraídas por  $p_1$ , cualquiera que sea  $x_0 \in (0, 1)$ . Para  $r = 1$ , el teorema anterior no afirma nada porque  $f'(p_1) = 1$ , pero es fácil comprobar que también es estable en ese caso.
- si  $1 < r < 3$ ,  $p_1$  deja de ser atractivo y pasa a ser atractivo el otro punto fijo  $p_2$ . El atractor de todas las órbitas generadas por iteración de punto fijo pasa de ser el punto  $p_1$  a ser ahora el punto  $p_2$ . Concretamente si  $1 < r < 2$ , la convergencia hacia  $p_2$  será en escalera y si  $2 < r < 3$  será en espiral. En  $r = 3$ ,  $f'(p_2) = -1$ , el teorema anterior sobre convergencia no afirma nada, pero también puede probarse fácilmente la estabilidad.
- Si  $3 < r \leq 4$ , el punto  $p_2$  perderá también su estabilidad, será repulsor con espiral hacia afuera.

En la figura 5 se representa un gráfico de iteración correspondiente a  $r = 0,75$  y a  $x_0 = 0,7$  en la que se aprecia la convergencia en escalera hacia  $p_1$ . En la figura 6,  $r = 1,75$  y  $x_0 = 0,1$  pudiendo observar la convergencia en escalera hacia el punto fijo, mientras que en la figura 7,  $r = 2,75$  y  $x_0 = 0,1$  se observa la convergencia en espiral. Por último, el gráfico de la figura 8 representa la iteración para  $r = 3,5$  con el punto  $p_2$  repulsor.

Para  $r > 3$ , ambos puntos fijos pierden su estabilidad. En el gráfico de la figura 9 se representan las iteraciones obtenidas cuando  $r = 3,3$  y partiendo de  $x_0 = 0,1$ . Como se observa, a largo plazo las iteraciones se estabilizan alrededor de dos valores concretos: 0,479 y 0,823. Lo mismo ocurre con cualquier otro valor inicial. De forma que el

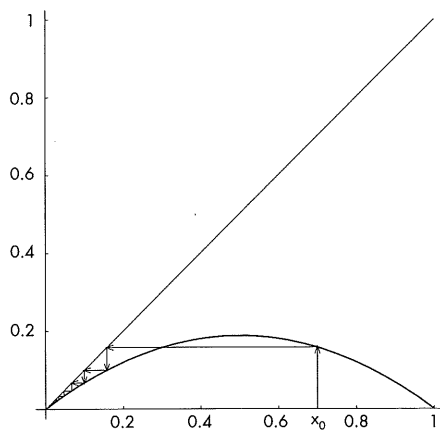


Figura 5

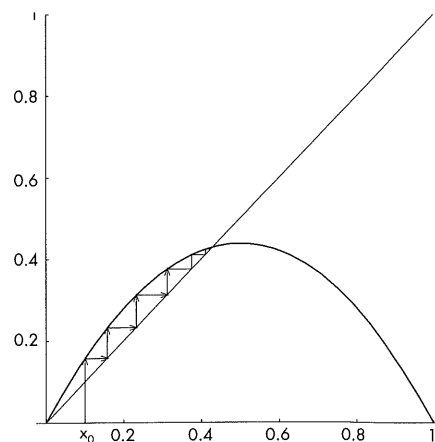


Figura 6

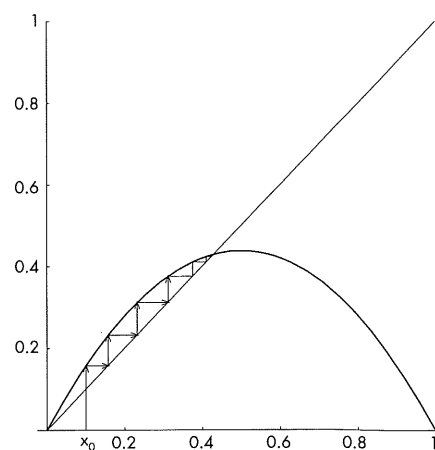


Figura 7

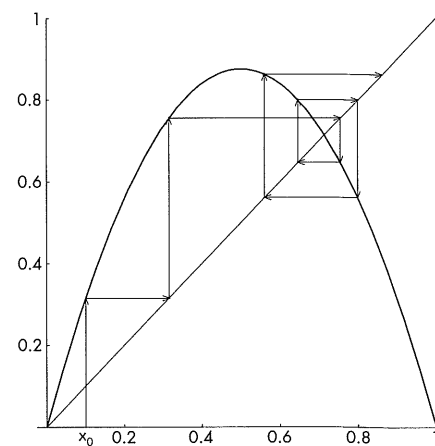


Figura 8

atractor de las órbitas generadas es:  $\{0,479, 0,823\}$ .

En este caso se pasa a un 2-ciclo o periodo de orden 2 estable. El atractor de las

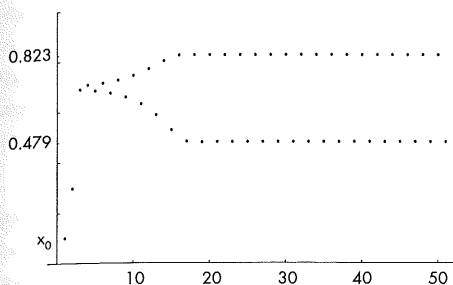


Figura 9

órbitas generadas por iteración es un conjunto con dos puntos:  $\{a, b\}$ , de modo que  $f(a) = b$  y  $f(b) = a$ . Por lo tanto,  $f^2(a) = f(f(a)) = a$  y análogamente:  $f^2(b) = f(f(b)) = b$ . Es decir, tanto  $a$  como  $b$  son puntos fijos de  $f^2$ . En la figura 10 se representa el gráfico de iteración para  $r = 3,3$ , tomando como valor inicial  $0,1$ . Se representa conjuntamente la bisectriz del primer cuadrante, la función  $f$  y la función  $f^2$ . Se observa cómo efectivamente las iteraciones oscilan entre dos puntos fijos de la función  $f^2$  (los otros dos puntos fijos de  $f$  coinciden con los de  $f^2$ , pero ambos perdieron su estabilidad).

Hallamos los puntos fijos de  $f^2$ , resolviendo:  $f(f(x)) = x$ . Esta ecuación es de cuarto grado. Las raíces son los dos puntos periódicos y los dos puntos fijos de  $f$ ;  $p_1 = 0$  y  $p_2 = (r - 1)/r$ . Al conocer de antemano dos soluciones, el cálculo de las otras dos se reduce a la resolución de una ecuación de segundo grado. Resultando ser:

$$a, b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2r} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{r}\right)\left(1 - \frac{3}{r}\right)}$$

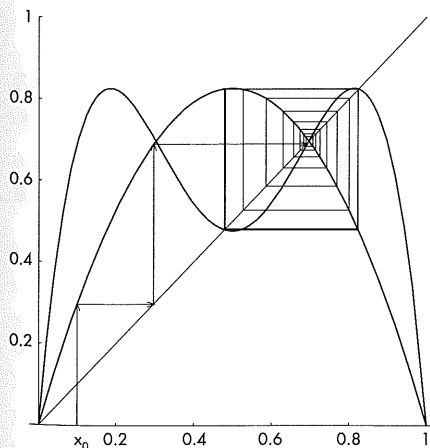


Figura 10

*El atractor estable de un sistema dinámico puede encontrarse numéricamente de forma simple poniendo el ordenador a trabajar con un número elevado de iteraciones.*

La estabilidad del 2-ciclo depende de la derivada de  $f^2$  en dichos puntos:

$$(f^2)'(a) = f'(f(a))f'(a) = f'(b)f'(a) = 4 + 2r - r^2$$

y

$$(f^2)'(b) = (f^2)'(a)$$

El valor absoluto de la derivada será menor que 1 si:

$$3 < r < 1 + \sqrt{6} \approx 3,449489743$$

La división de un punto fijo estable como  $p_2$  en un 2-ciclo cuando  $r > 3$  se llama *bifurcación*. A medida que  $r$  crece aparecen más bifurcaciones. Así, es de esperar otra bifurcación cuando se supere la cota:

$$r = 1 + \sqrt{6}$$

En efecto, con  $r = 3,5$  se comprueba experimentalmente con *Mathematica* la aparición de un periodo estable de orden 4. Para encontrarlo de forma exacta habría que resolver la ecuación  $f^4(x) = x$ .

Cuando  $r$  sobrepasa el valor

$$r_2 = 1 + \sqrt{6}$$

el periodo de orden 2 pierde su estabilidad y aparece un periodo de orden 4 estable hasta  $r_2 = 3,544\dots$ , donde ocurre de nuevo una bifurcación por duplicación de periodo. Estas circunstancias se repiten conforme  $r$  va creciendo, dando lugar a una sucesión de valores:

$$r_1 = 3, r_2 = 3,449489\dots, r_3 = 3,544090\dots, \\ r_4 = 3,564407\dots, r_5 = 3,5699456\dots,$$

donde se van produciendo bifurcaciones por duplicación de periodo.

Supongamos que notamos por  $d_k = r_{k+1} - r_k$ , la distancia entre dos puntos de bifurcación consecutivos. Entonces, en el límite la razón  $d_k/d_{k+1}$  tiende a una constante  $4,669201\dots$ . Este número fue descubierto en octubre de 1975 por el profesor americano Mitchell J. Feigenbaum. Posteriormente se demostró que esta constante es siempre la misma para un amplio rango de iteradores y no sólo para la función logística, por ejemplo

$$f(x) = rx^2 \sin(\pi x)$$

o la función

$$f(x) = \begin{cases} rx & \text{si } x \leq 1/2 \\ r(1-x) & \text{si } x \geq 1/2 \end{cases}$$

funciones con forma parecida al iterador logístico.

El atractor estable de un sistema dinámico puede encontrarse numéricamente de forma simple poniendo el ordenador a trabajar con un número elevado de iteraciones. Para cada valor de  $r$ , escogeremos un valor inicial  $x_0$  cualquiera y calcularemos 10000 iteraciones, con lo que se supone que ya tendremos un valor del atractor final. Ignoraremos lo que ocurre en esas primeras iteraciones y grabaremos las 100 iteraciones siguientes entre 10001 y

10100 (si el atractor final es un 4-ciclo, serán cuatro puntos repetidos cada uno 250 veces). Podemos ahora dibujar los atrayentes para diferentes valores de  $r$  en un gráfico llamado *diagrama de bifurcación*. En el eje horizontal se representan los valores de  $r$ , mientras que en el eje vertical se representan los valores de las 100 iteraciones obtenidas.

El tiempo de computación del gráfico depende del número de iteraciones y del número de valores de  $r$  para los que tiene que buscar el atractor correspondiente. El uso de la función  $f$  previamente compilada disminuirá de forma significativa el tiempo necesario para hacer los cálculos. A modo ilustrativo, el diagrama de bifurcación de la figura 11 necesitó unos 50 segundos, pero puede llevar varios minutos si el número de iteraciones es mayor o si el incremento de los valores de  $r$  es muy pequeño. Para conseguir el diagrama de bifurcación se aplicó para cada valor de  $r$ :

1. la función `Nest`, para averiguar el valor de la iteración 10000. Este valor ya será un elemento del atrayente final.
2. Con este valor y usando la función `NestList`, se consigue una lista con los valores de las 100 iteraciones siguientes.
3. Se eliminan los valores repetidos de la lista anterior y la lista resultante será el atrayente final.

El programa *Mathematica* completo para conseguir los datos necesarios para dibujar el diagrama de bifurcación de la figura 11 es el siguiente:

```
f = Compile[{{x, _Real, 1}, {r, _Real, 1}}, r x (1-x)];
bifurcacion := Module[{ }, rmin = 2.8; rmax = 4. ;
incrementor = 0.003; primera = 10000; nitera = 100; x0 = 0.1;
R = Table[r, {r, rmin, rmax, incrementor}];
prov = Nest[f[#, R] &, x0 + 0. R, primera + 1];
prov = NestList[f[#, R] &, prov, nitera - 1];
prov = Map[Union, Transpose[prov]];
datos = Flatten[MapThread[Thread[{{#1, #2}} &, {R, prov}], 1];]
```

El tiempo de computación se consigue con `Timing[bifurcacion]` y usando el comando `ListPlot` se representan los pares de puntos almacenados en `datos`.

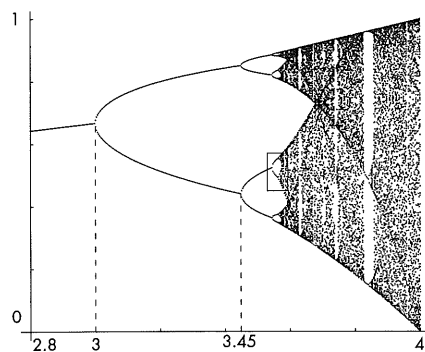


Figura 11

*El diagrama de bifurcación muestra que hay «ventanas» dentro de la región caótica donde el atractor vuelve a ser finito, es decir vuelve a haber orden dentro del desorden.*

Después de todas las bifurcaciones de  $2^n$ -ciclos a  $2^{n+1}$ -ciclos, llegamos a un valor límite de  $r$  a partir del cual el atractor es un conjunto infinito. Comienza el caos, justo al final de la cascada de bifurcaciones doblando el periodo.

La figura obtenida posee unas propiedades muy interesantes. Si ampliamos detalles de la figura 11, obtendremos «copias» idénticas de la figura global a la escala que se quiera. Esta propiedad de «auto semejanza» es característica de los fractales. En la fig. 12 se representa el diagrama de bifurcación para valores de  $r \in (3,53, 3,593)$ , donde se amplía el recuadro señalado en la figura 11. Si se hicieran también ampliaciones de los recuadros que aparecen en la figura 12, se obtendrían «copias» de la misma imagen a diferentes escalas.

Existe un *software* de distribución gratuita *Fractint* (<http://spanky.triumf.ca/www/fractint/fractint.html>) que permite obtener este fractal (además de muchos otros) directamente en la pantalla de un PC y hacer zoom sobre la figura para observar detalles ampliados de ella, sin necesidad de programar.

El diagrama de bifurcación muestra que hay «ventanas» dentro de la región caótica donde el atractor vuelve a ser finito, es decir, vuelve a haber orden dentro del desorden. Una ampliación detallada del diagrama nos hará más explícitas estas ventanas. Por ejemplo, en la figura 13 se presenta el diagrama de bifur-

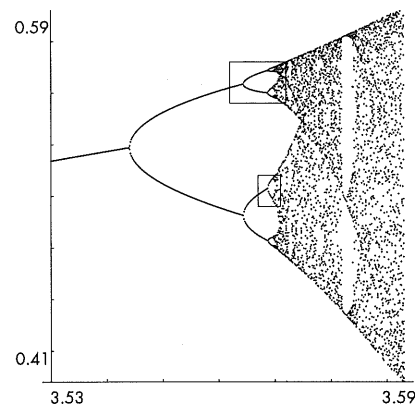


Figura 12

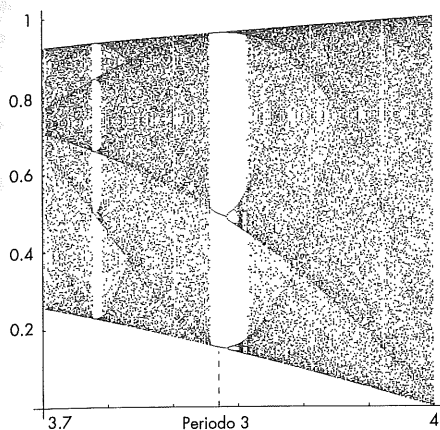


Figura 13

cación para valores de  $r \in (3,7, 4)$  donde se aprecia más claramente una ventana correspondiente al periodo 3.

¿Pero qué es exactamente el caos? Desde el punto de vista matemático (Romero, 1994; Peitgen, 1992), diremos que una función  $f: V \rightarrow V$  es *caótica en V* si verifican tres propiedades:

1. Sensible a las condiciones iniciales.
2. Debe tener puntos con todos los periodos posibles y éstos deben ser densos en  $V$ .
3. Debe ser topológicamente transitiva en  $V$ .

En las siguientes secciones vamos a abordar experimentalmente estas propiedades estudiando concretamente una función que las verifica: la función logística con  $r = 4$ .

### Primera propiedad de una función caótica: sensibilidad a las condiciones iniciales

Esta propiedad es conocida popularmente como «efecto mariposa». Supongamos que conseguimos dos iteraciones de punto fijo  $\{x_n\}$  y  $\{x_n^*\}$  del iterador logístico con  $r = 4$  comenzando en valores distintos aunque muy próximos:  $x_0 = 0,232$  y  $x_0^* = x_0 + 0,00001$ . Las primeras iteraciones son parecidas pero pronto

*Usando Mathematica se puede calcular una aproximación del exponente de Lyapunov mediante un número finito de iteraciones.*

comienzan a haber grandes diferencias. Así, por ejemplo, la iteración 25 en el primer caso toma el valor 0,991, mientras que en el segundo caso es 0,209. Teniendo en cuenta que el rango de valores de la función es  $[0, 1]$ , las diferencias son muy importantes, tan grandes como la propia función.

En la figura 14 se representan las diferencias entre las iteraciones obtenidas en ambos casos, mientras que en la figura 15 se muestra como en el curso de la iteración las diferencias se van incrementando substancialmente aunque los valores iniciales estén próximos.

El *exponente de Lyapunov* (Peitgen, 1992) sirve para cuantificar la sensibilidad a las condiciones iniciales. Se calcula como:

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \ln(|f'(x_k)|)$$

Usando *Mathematica* se puede calcular una aproximación del exponente de Lyapunov mediante un número finito de iteraciones. Es interesante, calcular dicho exponente para distintos valores de  $r$ . Donde el exponente es negativo, hay un punto fijo o ciclo estable y, por lo tanto, valores próximos convergen a los puntos estables. Sin embargo, cuando es positivo implica divergencia en condiciones iniciales próximas. Concretamente, el siguiente programa:

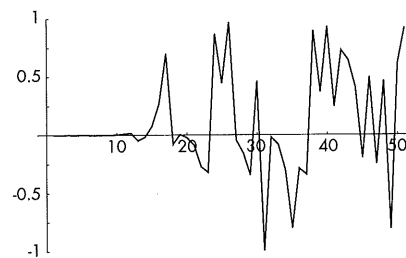


Figura 14

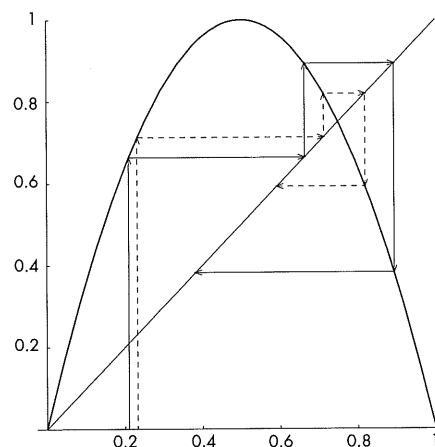


Figura 15

```
f [ x_ ] := 4 x (1-x); val = 0.232; expon = 0.0; nitera = 10000;
For [ i = 1, i < nitera, i++,
expon = expon + Log [ Abs [ f' [ val ] ] ];
val = f [ val ];]
expon = expon / nitera
```

proporciona como valor del exponente

$$\lambda(0,232) \approx 0,693$$

## Segunda propiedad de una función caótica: puntos periódicos densos

Vamos a comprobar otra propiedad característica de una función caótica: debe tener puntos periódicos con todos los periodos posibles y deben ser densos en el intervalo de definición.

En la función  $f(x) = 4x(1-x)$  hacemos el cambio de variable:

$$x = \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} v\right)$$

con  $0 \leq v \leq 1$ . Usando el comando

$$\text{Plot}[\{\text{Sin}[\text{Pi}/2 v]\}^2, \{v, 0, 1\}],$$

veremos la gráfica (figura 16) correspondiente al cambio efectuado.

Supongamos que generamos una sucesión iterando la función anterior partiendo de

$$x_0 = \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} v_0\right)$$

entonces:

$$x_1 = f(x_0) = 4x_0(1-x_0) = 4\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} v_0\right) \cdot \left(1 - \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} v_0\right)\right) = \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} 2v_0\right)$$

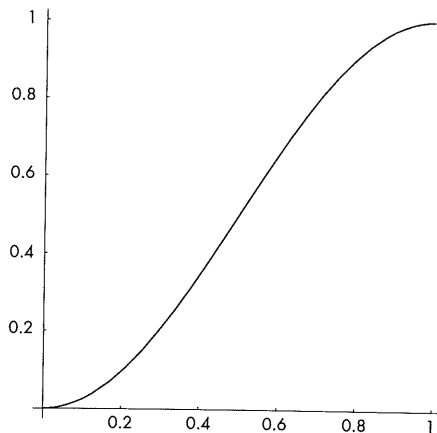


Figura 16

*... otra propiedad característica de una función caótica: debe tener puntos periódicos con todos los periodos posibles y deben ser densos en el intervalo de definición.*

y así sucesivamente, de modo que las iteraciones se pueden calcular directamente como:

$$x_n = \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} 2^n v_0\right)$$

Un punto  $x_0$  será periódico de periodo  $n$  si  $f^n(x_0) = x_0$ , entonces:

$$\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} 2^n v_0\right) = \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} v_0\right)$$

Son soluciones de la ecuación anterior:

$$\frac{\pi}{2} 2^n v_0 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} v_0 + k\pi \Rightarrow v_0 = \frac{2k}{2^n - 1} \\ k\pi - \frac{\pi}{2} v_0 \Rightarrow v_0 = \frac{2k}{2^n + 1} \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{N}$$

Si

$$x_0 = \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{b}{2^n - 1}\right)$$

con  $b$  par, la iteración de punto fijo se convierte en un  $n$ -ciclo ya que:  $x_n = x_0$ .

Si

$$x_0 = \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{b}{2^n + 1}\right)$$

con  $b$  impar, entonces:

$$x_1 = \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{b}{2^n - 1}\right)$$

será un punto periódico de periodo  $n$  porque  $x_{n+1} = x_1$ , aunque en este caso el punto de partida  $x_0$  no es un elemento del ciclo. Así que los puntos de la forma:

$$v = \frac{b}{2^n - 1}$$

con  $b = 1, 2, \dots, 2^n - 1$ , dan lugar a órbitas de periodo  $n$ . Análogamente para

$$v = \frac{b}{2^n + 1}$$

Admite la función puntos periódicos de todos los periodos posibles y además son densos en el intervalo  $[0, 1]$  ya que dado cualquier punto  $w$  es posible encontrar un punto  $x_0$  periódico todo lo cerca que se quiera de  $w$ . Vamos a comprobarlo con un ejemplo:  $w = 0,36$  y  $\delta = 0,01$ . Usando *Mathematica*, comprobaremos que el primer valor de  $n$  para el que todos los subintervalos del tipo

$$\left[ \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{k}{2^n - 1}\right), \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{k+1}{2^n - 1}\right) \right]$$

son de amplitud menor  $\delta$  es  $n = 8$ . La amplitud del subintervalo mayor es



0,00615 y además  $w$  caerá seguro dentro de uno estos subintervalos. Concretamente:

$$w = 0,36 \in \left[ \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{104}{2^8 - 1}\right), \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{105}{2^8 - 1}\right) \right] \approx [0,3572, 0,3632]$$

siendo el extremo izquierdo del subintervalo un punto de periodo 8.

### Tercera propiedad de una función caótica: topológicamente transitiva

Diremos que la función  $f$  es *topológicamente transitiva* en  $[0, 1]$  si para cualquier par de subintervalos abiertos  $I$  y  $J$  de  $[0, 1]$ , que pueden ser todo lo pequeños que se quiera, se puede siempre encontrar un valor en  $I$  que al iterar por  $f$  se transforma en una determinada iteración en un elemento de  $J$ .

Una forma intuitiva de justificar que la función logística con  $r = 4$  verifica esta propiedad consiste en subdividir  $[0, 1]$  en intervalos pequeños y comprobar que por iteración se puede obtener a partir de cualquier subintervalo de entrada cualquier subintervalo de llegada. Si esta condición se satisface para cualquier subdivisión finita (por pequeña que sea), está claro que la función será topológicamente transitiva.

Supongamos que dividimos el intervalo  $[0, 1]$  en 10 partes iguales:

$$I_k = \left[ \frac{k-1}{10}, \frac{k}{10} \right]$$

con  $k = 1, \dots, 10$

Consideremos un subintervalo concreto:  $I_2 = [0,1, 0,2]$  e iteramos 5 veces.

En la tabla 1 podemos ver como en sólo 4 iteraciones ya se pasa por los 10 subintervalos de  $[0, 1]$ . Se obtiene un resultado similar de haber escogido cualquier otro subintervalo distinto de  $I_2$ , o de haber subdividido en 100, 1000 o un millón de partes. Además  $f^5([0,1; 0,2]) = [0, 1]$ , lo que quiere decir que cualquier elemento de  $[0, 1]$  tiene una preimagen en el pequeño intervalo  $I_2$ .

Iteración	Intervalo origen	Intervalos visitados
0	[0,100; 0,200]	$I_2$
1	[0,360; 0,640]	$I_4, I_5, I_6, I_7$
2	[0,922; 1,000]	$I_{10}$
3	[0,000; 0,289]	$I_1, I_2, I_3$
4	[0,000; 0,822]	$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8, I_9$
5	[0,000; 1,000]	$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8, I_9, I_{10}$

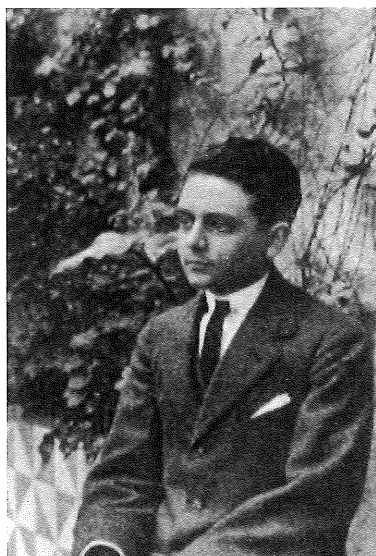
Tabla 1

### Bibliografía

- PEAK y FRAME (1994): *Chaos under control. The art and Science of Complexity*, W. H. Freeman and Company, New York.
- PEITGEN, JURGENS y SAUPE (1992): *Chaos and Fractals. New Frontiers of Science*, Springer-Verlag, New York.
- ROMERO, J. L. (1994): «Introducción al caos», *Epsilon*, n.º 28, vol. 10(1), 55-80.
- WOLFRAM, S. (1996): *Mathematica Book*, Wolfram Media/Cambridge University Press.

### Ángela Rojas

Departamento de Matemáticas  
Escuela Universitaria Politécnica  
Universidad de Córdoba  
SAEM «Thales»



Puig Adam a los 20 años