



FACULTAD DE EDUCACIÓN

MÁSTER UNIVERSITARIO EN INVESTIGACIÓN EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE
DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES, SOCIALES Y MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Máster

***EXPLORACIÓN DEL TRATAMIENTO DE LOS PROBLEMAS EN LOS
MANUALES ESCOLARES DE MATEMÁTICAS DE 4º DE BACHILLERATO
ELEMENTAL, 8º DE EGB Y 2º DE ESO, EN RELACIÓN CON LAS ECUACIONES
DE SEGUNDO GRADO.***

Alumno: FRANCISCO CARBONERO MURILLO

Tutores: Dr. D. LORENZO J. BLANCO NIETO
D^a. CLARA JIMÉNEZ GESTAL

(JULIO 2014)

RESUMEN

El trabajo que presentamos analiza el tratamiento que reciben los problemas propuestos, de ejemplo y como evaluación, sobre las ecuaciones de segundo grado, planteados en manuales escolares de Matemáticas del mismo nivel durante diferentes épocas.

Se analizan siete manuales, en concreto, dos de 4º de Bachillerato Elemental, dos de 8º de EGB y tres de 2º de ESO, que han sido utilizados por los escolares de Extremadura durante su vigencia.

Para enriquecer y complementar la investigación se estudian las propuestas curriculares de Matemáticas que hacen las distintas leyes de educación por las que se deben guiar los manuales estudiados, prestando especial atención a la resolución de problemas y en concreto a las ecuaciones de segundo grado. Además, a través de los manuales objeto de estudio, se conocen las características que presenta el libro de texto de Matemáticas en diferentes épocas.

En este trabajo se ha empleado como método el análisis de contenido basado en un sistema de categorías, complementándose con un análisis microestructural de las lecciones o unidades sobre las ecuaciones de segundo grado.

Los resultados indican que las lecciones y unidades temáticas analizadas no han ofrecido siempre la misma organización y sucesión de contenidos y actividades. Además, con respecto a los problemas, se advierte un predominio de los “ejercicios algorítmicos o de repetición”, del soporte “texto escrito”, del contexto “matemático” y de la tarea de “aplicar”, necesaria para descubrir la solución del problema.

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a todas aquellas personas que sin su apoyo no hubiera conseguido este trabajo.

Al Dr. D. Lorenzo J. Blanco Nieto,
además de por dirigir mi trabajo fin de máster,
por su ayuda y sus valiosos consejos e ideas.

A mi familia,
por su comprensión, cariño y por muchas cosas más ...

Miles de gracias a todos.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE GENERAL

SIGLAS Y ABREVIATURAS

ÍNDICE DE FIGURAS

0. PRESENTACIÓN	1
1. INTRODUCCIÓN	3
1.1. Interés y justificación del tema	3
1.2. Objetivos, alcance y cuestiones de investigación	5
2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA	8
2.1. El significado de problema	8
2.2. Clasificación de los problemas	12
2.3. Los enunciados de los problemas	16
2.4. Significación de la resolución de problema	18
2.5. La resolución de problemas en el currículo	25
2.5.1. Comparativa de las propuestas curriculares de Matemáticas en la normativa educativa de 1953, 1970, 1990 y 2006	28
2.6. El libro de texto o manual escolar y su misión	38
2.6.1. Características de los manuales escolares de Matemáticas (1953-2006)	43
2.7. Análisis de los modelos de valoración de textos escolares	53
3. METODOLOGÍA	63
3.1. Recopilación de fuentes bibliográficas	63
3.2. Aspectos generales de la investigación	64
3.3. Perfil de las categorías de análisis	67
3.4. Selección de la muestra y recogida de datos	72
3.5. Procedimientos de análisis de datos	74
3.5.1. Procedimiento de análisis microestructural	74
3.5.2. Procedimiento de análisis de contenido	74

4. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN RECOGIDA, PRESENTACIÓN Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS	76
4.1. Análisis descriptivo de los manuales escolares de 4° de Bachillerato Elemental	76
4.1.1. Análisis microestructural	76
4.1.2. Análisis de los problemas propuestos	78
4.1.3. Análisis de los problemas de ejemplo	81
4.2. Análisis descriptivo de los manuales escolares de 8° de EGB	83
4.2.1. Análisis microestructural	83
4.2.2. Análisis de los problemas propuestos	86
4.2.3. Análisis de los problemas de ejemplo	88
4.3. Análisis descriptivo de los manuales escolares de 2° de ESO	91
4.3.1. Análisis microestructural	91
4.3.2. Análisis de los problemas propuestos	94
4.3.3. Análisis de los problemas de ejemplo	96
4.3.4. Análisis de los problemas para la evaluación	98
4.4. Síntesis y discusión de los resultados relevantes del análisis	100
5. CONCLUSIONES E IMPLICACIONES	106
6. BIBLIOGRAFÍA	112
7. ANEXOS	121

SIGLAS Y ABREVIATURAS

Cit.: Citado.

Cols.: Colaboradores.

EGB: Educación General Básica.

Ej.: Ejemplo.

ELE: Español como lengua extranjera.

ESO: Educación Secundaria Obligatoria.

Et al.: et alii (y otros).

Fig.: Figura.

LGE: Ley General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa.

LOE: Ley Orgánica de Educación.

LOEM: Ley sobre Ordenación de la Enseñanza Media.

LOGSE: Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo.

NCTM: *National Council of Teachers of Mathematics.*

RAE: Real Academia Española.

REBIUN: Red de Bibliotecas Universitarias.

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 1.1	Relación entre las cuestiones y los objetivos de la investigación	7
Fig. 2.1	Diferencias entre un problema y un ejercicio de aplicación (Juidías y Rodríguez, 2007: 261)	9
Fig. 2.2	Clasificación de los problemas a partir de Butts, Charles y Lester y Borassi. (Blanco, 1991: 62)	13
Fig. 2.3	Autores que desde un enfoque de la Psicología o de las Matemáticas, han investigado diferentes modelos de resolución de problemas (Hernández y Socas, 1994: 82)	20
Fig. 2.4	Fases de resolución de problemas. (Cañadas y otros, 2002: 2)	21
Fig. 2.5	Modelos para la resolución de problemas	21
Fig. 2.6	Manuales escolares y normativa legal estudiada para cada una de las épocas	29
Fig. 2.7	Objetivos específicos de las matemáticas que se recogen en los cuatro currículos estudiados	30
Fig. 2.8	Estructura de los grados o etapas en la que se organizan los contenidos y los enunciados de los temas	32
Fig. 2.9	Criterios que marca la metodología en los cuatro planes de estudio	34
Fig. 2.10	Criterios evaluación que recogen los cuatro programas curriculares	37
Fig. 2.11	Características bibliográficas de los manuales escolares analizados	44
Fig. 2.12	Manuales escolares de 4º curso de Bachillerato Elemental	45
Fig. 2.13	Manuales escolares de 8º de EGB	47
Fig. 2.14	Manual escolar de 2º de ESO	49
Fig. 2.15	Manuales escolares de 2º de ESO	51
Fig. 3.1	Ejemplo de ejercicios algorítmico (Manual escolar de 4º de Bachillerato Elemental, SM, 1965; p.58)	69
Fig. 3.2	Ejemplo de enunciado de problema dado a través de un soporte imagen dependiente (Manual escolar de 4º de Bachillerato Elemental, SM, 1965; p.58)	70
Fig. 3.3	Ejemplo de problema dado en un contexto matemático (Manual escolar de 8º de EGB, Santillana, 1978; p.237)	70
Fig. 3.4	Varios ejemplos de problemas de un manual escolar de 2º de ESO	71
Fig. 3.5	Codificación de las categorías y subcategorías	72
Fig. 3.6	Tabla previa de clasificación de contenidos	73
Fig. 4.1	Contenidos sobre las ecuaciones de segundo grado incluidos en los manuales escolares de 4º de Bachillerato Elemental	77
Fig. 4.2	Organización y estructura de una sección de la “presentación”, “desarrollo” y “cierre” de una lección de 4º de Bachillerato Elemental	78
Fig. 4.3	Tabla de distribución de las categorías y subcategorías de los problemas propuestos (1ª época)	79

Fig. 4.4	Gráfico de distribución de las subcategorías de los “tipos de problemas” de los problemas propuestos (1ª época)	79
Fig. 4.5	Gráfico de distribución de las subcategorías del “soporte” de los problemas propuestos (1ª época)	80
Fig. 4.6	Gráfico de distribución de las subcategorías del “contexto” de los problemas propuestos (1ª época)	80
Fig. 4.7	Gráfico de distribución de las subcategorías de la “tarea matemática” de los problemas propuestos (1ª época)	81
Fig. 4.8	Tabla de distribución de las categorías y subcategorías de los problemas de ejemplo (1ª época)	81
Fig. 4.9	Gráfico de distribución de las subcategorías de los “tipos de problemas” de los problemas de ejemplo (1ª época)	82
Fig. 4.10	Gráfico de distribución de las subcategorías del “soporte” de los problemas de ejemplo (1ª época)	82
Fig. 4.11	Gráfico de distribución de las subcategorías del “contexto” de los problemas de ejemplo (1ª época)	83
Fig. 4.12	Gráfico de distribución de las subcategorías de la “tarea matemática” de los problemas de ejemplo (1ª época)	83
Fig. 4.13	Contenidos sobre las ecuaciones de segundo grado incluidos en los manuales escolares de 8º de EGB	85
Fig. 4.14	Organización y estructura de una sección de la “presentación”, “desarrollo” y “cierre” de una unidad de 8º de EGB	86
Fig. 4.15	Tabla de distribución de las categorías y subcategorías de los problemas propuestos (2ª época)	86
Fig. 4.16	Gráfico de distribución de las subcategorías de los “tipos de problemas” de los problemas propuestos (2ª época)	87
Fig. 4.17	Gráfico de distribución de las subcategorías del “soporte” de los problemas propuestos (2ª época)	87
Fig. 4.18	Gráfico de distribución de las subcategorías del “contexto” de los problemas propuestos (2ª época)	88
Fig. 4.19	Gráfico de distribución de las subcategorías del “tarea matemática” de los problemas propuestos (2ª época)	88
Fig. 4.20	Tabla de distribución de las categorías y subcategorías de los problemas de ejemplo (2ª época)	89
Fig. 4.21	Gráfico de distribución de las subcategorías de los “tipos de problemas” de los problemas de ejemplo (2ª época)	89
Fig. 4.22	Gráfico de distribución de las subcategorías del “soporte” de los problemas de ejemplo (2ª época)	90
Fig. 4.23	Gráfico de distribución de las subcategorías del “contexto” de los problemas de ejemplo (2ª época)	90
Fig. 4.24	Gráfico de distribución de las subcategorías de la “tarea matemática” de los problemas de ejemplo (2ª época)	91
Fig. 4.24	Contenidos sobre las ecuaciones de segundo grado incluidos en los manuales escolares de 2º de ESO	92
Fig. 4.25	Organización y estructura de una sección de la “presentación”, “desarrollo” y “cierre” de una unidad de 2º de ESO	93
Fig. 4.26	Tabla de distribución de las categorías y subcategorías de los problemas propuestos (3ª época)	94

Fig. 4.27	Gráfico de distribución de las subcategorías de los “tipos de problemas” de los problemas propuestos (3ª época)	95
Fig. 4.28	Gráfico de distribución de las subcategorías del “soporte” de los problemas propuestos (3ª época)	95
Fig. 4.29	Gráfico de distribución de las subcategorías del “contexto” de los problemas propuestos (3ª época)	96
Fig. 4.30	Gráfico de distribución de las subcategorías de la “tarea matemática” de los problemas propuestos (3ª época)	96
Fig. 4.31	Tabla de distribución de las categorías y subcategorías de los problemas de ejemplo (3ª época)	97
Fig. 4.32	Gráfico de distribución de las subcategorías de los “tipos de problemas” de los problemas de ejemplo (3ª época)	97
Fig. 4.33	Gráfico de distribución de las subcategorías del “soporte” de los problemas de ejemplo (3ª época)	98
Fig. 4.34	Gráfico de distribución de las subcategorías de la “tarea matemática” de los problemas de ejemplo (3ª época)	98
Fig. 4.35	Tabla de distribución de las categorías y subcategorías de los problemas para la evaluación (3ª época)	99
Fig. 4.36	Gráfico de distribución de las subcategorías de los “tipos de problemas” de los problemas para la evaluación (3ª época)	99
Fig. 4.37	Gráfico de distribución de las subcategorías de la “tarea matemática” de los problemas para la evaluación (3ª época)	100
Fig. 4.38	Síntesis del análisis microestructural de las lecciones o unidades de las ecuaciones de segundo grado de los manuales de Matemáticas estudiados	101
Fig. 4.39	Síntesis del análisis de contenido realizado de acuerdo al sistema de categorías establecido para el tratamiento de los problemas recogidos en los manuales escolares de Matemáticas estudiados	103
Fig. 5.1	Relación entre los objetivos de la investigación con las cuestiones y las conclusiones	106

PRESENTACIÓN

El trabajo se encuentra estructurado en cinco capítulos que corresponden a cinco partes bien diferenciadas.

El primer capítulo, tiene fundamentalmente un carácter introductorio, ya que se presenta la justificación del interés del tema y la formulación de objetivos y cuestiones de investigación. La finalidad de esta parte es delimitar el problema de la investigación.

El capítulo segundo, está dedicado a presentar el estado de la cuestión resultante de la revisión bibliográfica realizada. En los primeros apartados se expone un análisis de la noción de problema: significado, clasificación y expresión en los enunciados. A continuación, se da paso a la resolución de problemas, para conocer su significación en general y en el currículo en particular. Los últimos apartados se focalizan en el estudio del libro o manual escolar: su alcance y misión. Finalizando con una revisión de los modelos de valoración de textos escolares en general y del área de Matemáticas en particular. Este capítulo también recoge una comparativa de las propuestas curriculares de Matemáticas que marca la LOEM 1953, LGE 1970, LOGSE 1990 y LOE 2006, estudiando la normativa educativa de cada época. Además, a través de los manuales escolares que han sido objeto de estudio, se extraen las principales características que presentan los manuales escolares de Matemáticas en diferentes épocas (1953-2006), originando otro apartado para este capítulo.

El tercer capítulo se dedica al diseño general y a la metodología empleada. En la primera parte, se hace una descripción del diseño general de la investigación y del perfil de las categorías de análisis utilizadas para el tratamiento de los problemas de las ecuaciones de segundo grado recogidos en los manuales escolares. A continuación, se describe la selección de la muestra y la recogida de datos. Finalmente, el capítulo ofrece el procedimiento seguido para el análisis de los datos: microestructural y de contenido.

El capítulo cuarto se ocupa del análisis de los datos recogidos de los manuales escolares y de presentar sus resultados formulando la discusión oportuna. Se dedica un apartado para cada una de las etapas estudiadas (4º Bachillerato Elemental, 8º de EGB y

2º de ESO) realizando en ellos el análisis microestructural y de contenido. El apartado final recoge una síntesis de la discusión y de los resultados obtenidos.

El quinto y último capítulo expone las conclusiones generales del trabajo, así como las cuestiones abiertas que se pueden abordar en posteriores trabajos de investigación.

Se finaliza el trabajo de esta investigación con las referencias bibliográficas utilizadas en el mismo y con unos anexos finales.

1. INTRODUCCIÓN

1.1 Interés y justificación del tema

A lo largo del tiempo la resolución de problemas ha ido destacando entre las diversas posibilidades de estudio que ofrece la investigación en enseñanza de las Matemáticas.

En los últimos 30 años la resolución de problemas se ha convertido en el centro sobre el que se ha encaminado el mayor número de esfuerzos, tanto por lo redactado sobre el tema como por el desarrollo de proyectos de investigación y, en consecuencia, el que mayor empuje ha dado a la enseñanza de las Matemáticas (Sepúlveda, Medina y Sepúlveda, 2009: 80).

La investigación que presentamos está centrada en la resolución de problemas desde la perspectiva de la enseñanza y el aprendizaje. Contenido que como se verá ha sido tratado por autores relevantes como Polya (1945), Schoenfeld (1985), Puig (1996), Guzmán (1991) y Blanco (1991), entre otros. Es decir, la tarea de resolver problemas no es sólo científica, sino que también se configura como tarea educativa ocupando un puesto relevante en la enseñanza y el aprendizaje del alumnado. Por tanto, la resolución de problemas es un contenido escolar, que colabora a la formación intelectual y científica de los estudiantes (Castro, 2008: 2).

Por otra parte este contenido escolar se ha ido reflejando de forma cada vez más acentuada en los currículos y programas educativos de diversos países, marcando el contenido de los manuales escolares utilizados tanto por el profesorado como por el

alumnado cada día en las aulas de enseñanza. Por tanto, el manual escolar se configura como una herramienta imprescindible para complementar el currículo.

Teniendo en cuenta el contexto general de cambio introducido en el currículo, con respecto a la resolución de problemas, resulta de interés analizar la forma en que son tratados los problemas en los manuales escolares, con el fin de conocer los factores que pueden influir en la mejora de su enseñanza y aprendizaje. Y todo ello por varias razones, que se indican a continuación.

En primer lugar, por ser el manual escolar una herramienta clave en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas a lo largo de los años, siendo su uso determinante para lograr en los alumnos una serie de conocimientos matemáticos. En este sentido a raíz de la importancia en el proceso de enseñanza-aprendizaje del uso de los manuales escolares, en los últimos años han proliferado los estudios sobre la valoración de estos manuales, tanto los que presentan instrumentos de valoración aplicables a cualquier área (Martínez, 1992; Parcerisa, 1996; Prendes, 2001, entre otros), como los que se plantean en el área de las Matemáticas (González y Sierra, 2004; Pino y Blanco, 2008; Moterrubio y Ortega, 2009, 2011, 2012; Gea, Batanero, Arteaga y Cañadas, 2013, entre otros).

En segundo lugar, porque siendo incuestionable la utilidad de los manuales escolares como fuente para la enseñanza-aprendizaje, resulta indudable que es necesaria su transformación para adaptarse a las nuevas directrices de los currículos. En este sentido resulta de interés conocer el modo en que se tratan los problemas para intentar valorar el nivel de cambio necesario.

En tercer lugar, porque los manuales escolares son la herramienta más utilizada por el profesorado como medio de apoyo para impartir sus clases y cualquier intento de análisis para su mejora redundará en el aprendizaje del alumnado. Esta búsqueda de la mejora debe orientarse a satisfacer las necesidades tanto del profesorado como del alumnado.

En definitiva, cabe afirmar que la importancia del manual escolar desde su aparición hasta la actualidad, justifica su interés como objeto de investigación por su vigencia como herramienta facilitadora de la enseñanza y aprendizaje de cualquier área en general y de la resolución de problemas en particular.

La finalidad principal del trabajo que se presenta es realizar una exploración del tratamiento de los problemas que se plantean en la enseñanza de las ecuaciones de segundo grado en el contexto de los manuales escolares en diferentes épocas. Para ello, se analiza y valora la conexión en relación a la resolución de problemas que se establece entre lo que argumentan algunos autores (Polya, 1945; Kilpatrick, 1978; Chamorro, 2003; Pino y Blanco, 2008, entre otros), lo marcado por el currículo (LOEM 1953, LGE 1970, LOGSE 1990 y LOE 2006) y lo que recogen los propios manuales escolares (4º de Bachillerato Elemental, 8º de EGB y 2º de ESO).

1.2 Objetivos, alcance y cuestiones de investigación

Para acotar y delimitar el tema de forma precisa, se han fijado los objetivos que se señalan a continuación. Por razones de claridad y precisión se ha optado por distinguir entre un objetivo general, o fin global perseguido, y objetivos específicos, es decir objetivos o fines parciales dentro del objetivo general.

Objetivo general:

Explorar el tratamiento de los problemas de ecuaciones de segundo grado en los manuales escolares de 4º de Bachillerato Elemental, 8º de EGB y 2º de ESO, en relación a la organización y sucesión de contenidos y actividades de estos manuales en diferentes épocas.

Objetivos específicos:

1. Realizar una revisión bibliográfica sobre el fundamento de la resolución de problemas y el manual escolar, que permita cimentar la investigación.
2. Conocer y equiparar las propuestas curriculares de las distintas leyes de educación por las que se deben guiar los manuales escolares que han sido objeto de estudio de este trabajo, prestando especial atención a la resolución de problemas y a las ecuaciones de segundo grado.
3. Analizar las formas de organización y sucesión de contenidos y actividades de cada lección o unidad dedicada a las ecuaciones de segundo grado, que están implicadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

4. Obtener información sobre el número de problemas de ecuaciones de segundo grado disponibles en los manuales escolares y analizar si ese número varía en función de la época a la que pertenece el manual.
5. Describir y estudiar desde el punto de vista del análisis de contenido, los problemas de ecuaciones de segundo grado, a través de los tipos de problemas incluidos en los manuales escolares (propuestos, de ejemplos, y de evaluación).

De acuerdo a los objetivos expuestos el alcance del trabajo se limita a la valoración de los problemas de ecuaciones de segundo grado. En futuros trabajos se pretende extender el análisis al resto de los problemas de los manuales escolares, estudiar las facilidades e inconvenientes para el aprendizaje del alumnado y sugerir medidas correctoras.

Una vez fijados los objetivos de la investigación, se traducen en cuestiones específicas cuyas respuestas facilitarán datos útiles y necesarios para lograr esos objetivos.

1. ¿Existen suficientes estudios sobre la resolución de problemas y el manual escolar para abordar trabajos de investigación?
2. ¿Las propuestas curriculares de las diferentes leyes de educación le conceden la misma importancia a la resolución de problemas y a las ecuaciones de segundo grado?
3. ¿Las lecciones o unidades de las ecuaciones de segundo grado proponen diferentes formas de organización y sucesión de contenidos y actividades en las diferentes épocas educativas?
4. ¿Está compensada para la instrucción del alumnado la dotación de problemas de ecuaciones de segundo grado disponibles en los manuales?
5. ¿Existen diferencias significativas entre las distintas épocas (1953, 1970, 1990, 2006) en cuanto a la dotación y tipo de problemas presentes en las lecciones o unidades sobre las ecuaciones de segundo grado?

6. ¿Son los problemas propuestos, el tipo que predomina en las lecciones o unidades de ecuaciones de segundo grado?
7. ¿Los problemas que emplean el soporte de imagen influyen en el enunciado?
8. ¿El contexto matemático es el más común para la redacción de los enunciados de los problemas de ecuaciones de segundo grado?
9. ¿Están bien formulados los problemas sugiriendo alguna tarea matemática para su resolución?

En el siguiente esquema se muestra la relación entre las cuestiones específicas y los objetivos de la investigación.

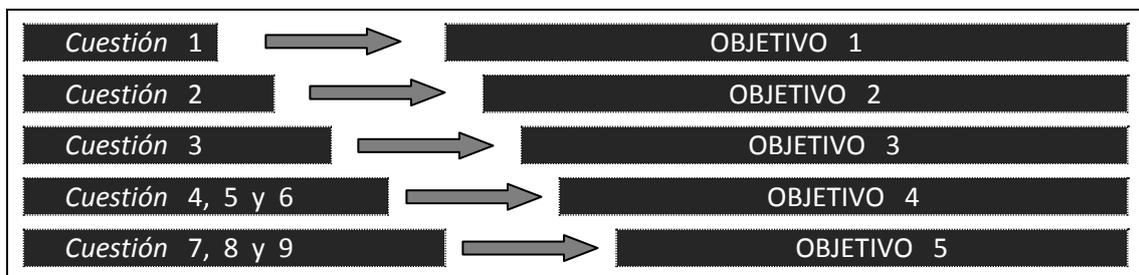


Fig. 1.1 Relación entre las cuestiones y los objetivos de la investigación.

2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

2.1 El significado de problema

Como punto de partida de esta investigación es necesario tener claro el concepto de problema, por tanto, hay que comenzar precisando su significado.

A diario, los términos “problema” y “ejercicio” se suelen usar de forma ambigua y poco precisa, al considerarlos, en la práctica, como sinónimos. Por ello, hay que resaltar su diferencia:

Un ejercicio es “un trabajo práctico que en el aprendizaje de ciertas disciplinas sirve de complemento y comprobación de la enseñanza teórica”. (RAE, 2014)

“Un problema es una situación que difiere de un ejercicio en que el resolutor de problemas no tiene un proceso algorítmico que le conducirá, con certeza, a la solución”. (Kantowski, 1981: 113).

Llivina (1999: 48), especifica cuando un ejercicio tiene carácter de problema. Sobre este planteamiento expresa: “Un ejercicio es un problema si y sólo si la vía de solución es desconocida para la persona”.

Un problema supone mucho más que la aplicación de un algoritmo o una fórmula. Por tanto, un problema supone mucho más que un ejercicio de aplicación. Prueba de ello son las diferencias que destacan Juidías y Rodríguez (2007: 261) en la siguiente tabla:

Problema matemático	Ejercicio de aplicación
-El individuo se ve expuesto ante una dificultad para la que no tiene un remedio inmediato.	-Puede resolverse mediante la aplicación directa de un procedimiento previamente adquirido.
-El individuo se implica en su solución.	-La aplicación rutinaria del algoritmo no exige ningún interés especial en el individuo que resuelve la tarea.
-Requiere utilizar de modo estratégico los procedimientos previamente conocidos. Las técnicas automatizadas pueden ser necesarias, pero no son suficientes para llegar a la solución.	-Requiere la mera aplicación de técnicas automatizadas, ya que éstas son necesarias y suficientes para llegar a la solución.
-Supone al individuo una demanda cognitiva de alto nivel.	-Supone al individuo una demanda cognitiva de bajo nivel.
-La determinación de la información es una pieza clave en la resolución del problema.	-El individuo no precisa discernir la información relevante de la irrelevante porque toda la información que aparece en el enunciado es necesaria para la solución.

Fig. 2.1 Diferencias entre un problema y un ejercicio de aplicación (Juidías y Rodríguez, 2007: 261).

Una vez aclarados los dos términos, hay que encontrar el significado de problema. Sin embargo, el concepto de problema no tiene una significación única sino que admite una diversidad de interpretaciones, como se comprueba explorando en los diccionarios y enciclopedias o leyendo directamente a sus autores. Prueba de ello, son las definiciones que se exponen a continuación:

Según la versión en línea del Diccionario de la Real Academia Española (2014), problema es “una cuestión que se trata de aclarar”, una “proposición o dificultad de solución dudosa”, un “conjunto de hechos o circunstancias que dificultan la consecución de algún fin”, o un “planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos”.

En el Diccionario enciclopédico Espasa (1993) la definición que se da de problema en Matemáticas es “proposición dirigida a averiguar el modo de obtener un resultado cuando ciertos datos son conocidos”.

Simon (1978; cit. en Godino, 1994: 7) describe que “un ser humano se enfrenta con un problema cuando intenta una tarea pero no puede llevarla a cabo. Tiene algún criterio para determinar cuando la tarea ha sido completada satisfactoriamente”.

La definición de Kantowski (1980; cit. en Remesal, 2006: 8): “un problema es una situación para la que el individuo que se enfrenta a ella no posee algoritmo que garantice una solución. El conocimiento relevante de esa persona tiene que ser aplicado en una nueva forma para resolver el problema”.

Para Krulik y Rudnik (1980; cit. en Ortega, Pecharromán y Sosa, 2011: 102) “un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo

o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma”.

Remesal (2006: 6) indica en su tesis doctoral que una de las definiciones más extendidas y comúnmente citadas en el ámbito de la educación matemática es la de Kilpatrik (1985): “un problema es una situación en la que se debe alcanzar un objetivo final, para el cual la ruta de acceso está bloqueada”.

Dumas-Carré (1987; cit. en Perales, 1993: 170) define problema “como cualquier situación prevista o espontánea que produce, por un lado, un cierto grado de incertidumbre y, por el otro, una conducta tendente a la búsqueda de su solución. En la vida ordinaria se resuelve un problema para obtener un resultado; por el contrario, en el contexto escolar el resultado importa poco (a menudo es conocido) y sí lo hace la propia resolución”.

Blum y Niss (1991; cit. en Contreras, 1998: 84) entienden por problema: "una situación que conlleva ciertas cuestiones abiertas que retan intelectualmente a alguien que no posee inmediatamente métodos/procedimientos/algoritmos, etc., directos suficientes para responder".

En la definición que da Puig (1996; cit. en Albarracín y Gorgorio, 2013: 293) destaca el adjetivo matemático delimitando el tipo de problema, considera que: “un problema escolar de matemáticas es una tarea de contenido matemático, cuyo enunciado es significativo para el alumno al que se ha planteado, que este desea abordar, y para el cual no ha producido sentido”.

Deulofeu (2002; cit. en Gómez Aguirre, 2010: 14) considera que “un problema de matemáticas es un enunciado donde se pide que se obtenga un resultado a partir de un conjunto de informaciones que se proporcionan. El problema es tal, cuando una vez conocido el enunciado, no es inmediato el camino que hay que seguir para hallar la solución”.

Desde el punto de vista didáctico, la definición que dan Campistrous y Rizo (2013: 3) es muy importante, ya que en la selección de los problemas propuestos al alumnado hay que tener en cuenta no únicamente la naturaleza de la tarea, sino también los conocimientos que el sujeto precisa para su solución y las motivaciones para

realizarla. Para ellos, se denomina problema “a toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. La vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida tiene que ser desconocida y la persona debe querer hacer la transformación”.

Se puede concluir diciendo que encontrar el significado exacto de problema no es una tarea fácil, ya que como expone Schoenfeld (1985; cit. en Alfaro y Barrantes, 2008: 86) “la dificultad de definir el término “problema” radica en que es relativo: un problema no es inherente a una tarea matemática, más bien es una relación particular entre el individuo y la tarea; utiliza la palabra problema para referirse a una tarea que resulta difícil para el individuo que está tratando de resolverla”. Por tanto, “un problema es una tarea que la persona se enfrenta a ella y desea o necesita encontrar una solución, que no posee un procedimiento accesible y fácil de llegar a ella y hace intentos para lograrla” (Nortes Checa y Nortes Martínez-Artero, 2010: 319). Es decir, esta tarea precisa de un razonamiento activo, que posibilite descubrir conceptos, así como demostrar esos conceptos haciendo un juicio crítico.

Una vez delimitado el significado de problema, antes de finalizar este apartado, resulta necesario resaltar las características que deben reunir los problemas. Santos (1997; cit. en Sepúlveda, Media y Sepúlveda, 2009: 90) sugiere algunos criterios sobre su diseño para que ofrezcan un potencial matemático en las clases:

1. *los problemas, sin ser fáciles, deben ser accesibles a una gran variedad de estudiantes con diferentes antecedentes o recursos matemáticos,*
2. *los problemas deben demandar de los estudiantes un plan de reflexión, es decir, que no puedan resolverse instantáneamente;*
3. *los problemas deben involucrar varias formas de solución (...);*
4. *las soluciones de los problemas pueden permitir y facilitar el uso de las ideas matemáticas (...);*
5. *los problemas deben servir de plataformas para realizar diversas exploraciones matemáticas (...);*
6. *cuando un alumno resuelva un problema, deberá ser posible identificar los procesos y operaciones empleadas (...), y*

7. *los problemas deben situarse en contextos donde los estudiantes puedan utilizar o tener acceso a las experiencias y recursos matemáticos previamente estudiados, con cierta naturalidad (...).*

2.2 Clasificación de los problemas

En el contexto de esta investigación será de gran utilidad conocer la clasificación de los problemas, ya que en los manuales escolares se presentan diferentes tipos de problemas a los que tendrá que hacer frente el alumnado con los conocimientos que vaya adquiriendo a lo largo de su educación matemática. Por tanto, hay que repasar las tipologías de algunos de los autores que han trabajado sobre el tema.

Se parte de la reflexión que hace Blanco (1993: 39), argumentando que “tenemos que considerar que ninguna clasificación puede ser exhaustiva, estableciéndose siempre intersecciones entre los diversos apartados y apareciendo actividades de difícil catalogación, y todo esto por la enorme diversidad de problemas que pueden proponerse de diferentes niveles y contenidos”.

Una de las tipologías que se menciona habitualmente es la Greeno (1978; cit. en Ayllón, 2012: 36), presenta una clasificación propia de los problemas atendiendo a las acciones que debe realizar el sujeto para resolver el problema. Distingue tres tipos:

- *Problema de estructura inductora*: “aquel en el que el individuo ha de descubrir el patrón o el modelo implícito (por ejemplo, completar una serie)”.
- *Problema de transformación*: “el resolutor ha de buscar una secuencia de operadores que le permita pasar del estado inicial al final”.
- *Problema de ordenamiento*: “el resolutor ha de ordenar todos los elementos que se le dan para obtener la solución”.

Las clasificaciones que hacen Butts (1980), Charles y Lester (1982), y Borasi (1986), se sintetizan en la siguiente representación:

BUTTS (1980)	CHARLES Y LESTER (1982)	BORASI (1986)
Ejercicios de reconocimiento <i>Resolver, reconocer o recordar una definición o una proposición.</i>		
Ejercicios algorítmicos <i>Ejercicios que pueden ser resueltos con un algoritmo, normalmente, numérico.</i>	Ejercicios de repetición <i>Práctica de algún algoritmo para potenciar las habilidades de cálculo.</i>	Ejercicios <i>Ejercicios que pretenden desarrollar algún tipo de algoritmo.</i>
Problemas de aplicación <i>Problemas formulados en un enunciado concreto, normalmente escrito, que suponen utilizar algún algoritmo conocido.</i>	Prob. de traducción simple o compleja <i>Problemas típicos cuya resolución supone una traducción del texto a una expresión matemática.</i>	Word-Problem <i>Problemas en los que en el texto aparece toda la información para ser resuelto.</i>
Problemas de investigación <i>Problemas cuyas proposiciones no contienen ninguna estrategia para representar el problema.</i>	Problemas de procesos <i>La forma de cálculo no aparece claramente delimitada, dándose la posibilidad de establecer diferentes conjeturas.</i>	Situación problemática <i>Establecer una formulación vaga que permita realizar nuevas conjeturas.</i>
Situación de problema <i>Plantear situaciones que puedan requerir soluciones matemáticas.</i>	Problemas de aplicación <i>Situaciones reales que requieran el uso de habilidades, conceptos y procesos matemáticos.</i>	Situación <i>No aparece ninguna formulación, y el contexto aparece implícito.</i>
	Problemas de puzles <i>Muestran el potencial recreativo de las Matemáticas.</i>	Problemas de la vida real <i>Problemas que impliquen la matematización de situaciones reales.</i>
		Problemas de puzles <i>El contexto y la formulación que se hacen en este problema pueden ser engañosa.</i>
		Prueba de una conjetura <i>Demostraciones de teoremas o propiedades matemáticas.</i>

Fig. 2.2 Clasificación de los problemas a partir de Butts, Charles y Lester y Borassi. (Blanco, 1991: 62).

Blanco (1993: 39) partiendo del contraste de las tres clasificaciones anteriores fija los siguientes tipos de actividades con respecto a la enseñanza de las Matemáticas: *ejercicios de reconocimiento, ejercicios algorítmicos o de repetición, problemas de traducción simple o compleja, problemas de procesos, problemas sobre situaciones reales, problemas de investigación matemática, y problemas de puzles.*

Puig (1996: 30) para establecer su clasificación adopta los nombres utilizados por Butts (1980), *ejercicios de reconocimiento, ejercicios algorítmicos, problemas de aplicación, problemas de búsqueda y situaciones problemáticas.* “Así, si el resolutor lo único que tiene que hacer es buscar en la memoria el resultado, se tratará de un *ejercicio de reconocimiento* y si ha de ejecutar un algoritmo de forma automática, se tratará de un *ejercicio algorítmico*. Pero usaremos el término problema cuando el resolutor conoce un procedimiento para resolver el problema y ha de justificar que ese procedimiento es adecuado para obtener su solución, o siempre que la ejecución de un procedimiento tenga que ir acompañada de la argumentación de que sus pasos son adecuados — *problemas de aplicación*—, o cuando ha de crear un procedimiento de solución — *problemas de búsqueda*. El nombre de *situaciones problemáticas* lo utilizó Butts (1980) para aquéllas en cuyo enunciado no se ha precisado qué es lo que hay que hacer y ésa es

la primera tarea del resolutor, de modo que no se sitúan exactamente en el continuo en que están los otros tipos”.

Tomás (1990; cit. en Juidías y Rodríguez, 2007: 265) clasifica los problemas en función de la forma que toma el enunciado. Así, considera:

- *Problemas de presentación y pregunta*: el enunciado presenta primero una situación y finalmente plantea la pregunta. “Ejemplo: María tiene 3 manzanas, Pepe le da una manzana más, ¿cuántas manzanas tiene ahora María?”
- *Problemas de pregunta y explicación a la vez*: el enunciado es al mismo tiempo la pregunta y el planteamiento de la situación problemática. “Ejemplo: ¿Cuántas canicas tendrán Juan y Carlos juntos si Juan tiene 8 canicas y Carlos 4?”
- *Problemas de pregunta indirecta*: cuando la pregunta no es explícita. “Ejemplo: En una estantería caben 9 libros, tengo 3 estanterías y me gustaría saber si me van a caber en ellas todos los libros que tengo. Tengo 25 libros”.
- *Problemas de explicación y diversas preguntas*: el problema plantea una situación y exige varias respuestas. “Ejemplo: Un bolígrafo y un cuaderno cuestan 1,65 euros, 2 bolígrafos y 1 cuaderno cuestan 2,40 euros. ¿Cuánto cuestan 1 bolígrafo y cuánto 1 cuaderno? ¿Con 10 euros tengo suficiente dinero para comprar 5 bolígrafos y 7 cuadernos?”
- *Problemas de preguntas internas no explícitas*: el problema plantea preguntas explícitas pero hay que deducir información a partir de los datos del enunciado. “Ejemplo: Tardo 35 minutos en ir de mi casa al colegio y otros tantos en volver. Si voy al colegio por la mañana y por la tarde, ¿cuántas horas al día dedico a este desplazamiento?”

En el estudio de López Rupérez (1991: 57) se recoge la clasificación de problemas que establece Frederiksen (1984). Esta clasificación, atendiendo al nivel de definición de su enunciado, distingue entre:

- *Problemas bien estructurados*: En ellos se facilita toda la información necesaria, presentada de forma clara y se dispone de un algoritmo apropiado que garantice la solución correcta.
- *Problemas mal estructurados*: No están claramente establecidos y no toda la información necesaria está disponible inicialmente, no existe un algoritmo definido e incluso puede de no existir solución o no ser única.

- *Problemas estructurados que requieren un pensamiento productivo*: Similares en cuanto a las características de definición del problema y de su solución, a los bien estructurados, se diferencian en el hecho de que el procedimiento de resolución o alguna etapa crucial del mismo deben ser aportados por el sujeto resolvente.

Díaz y Poblete (2001) presentan una categorización de tipos de problemas matemáticos, considerados según su naturaleza, en *rutinarios* (“son similares a los que se han desarrollado durante el curso de instrucción, donde el alumno efectúa una serie de secuencias que involucra una comprensión de conceptos y algoritmos para llegar a soluciones válidas”) y *no rutinarios* (“cuando no basta con aplicar una regla o un método de manera rutinaria, sino que a fuerza de búsqueda y de intuición hay que llegar a elaborar una solución recurriendo al conjunto de conocimientos y experiencias anteriores”). A su vez, clasifica los problemas rutinarios según su contexto, en *problema real* (“si se produce efectivamente en la realidad y compromete al alumno a actuar”), *realista* (“si es susceptible de producirse realmente. Se trata de una simulación de la realidad o de una parte de la realidad”), *fantasista* (“si es fruto de la imaginación y está sin fundamento en la realidad”) y *puramente matemáticos* (“si hace referencia exclusivamente a objetos matemáticos -números, relaciones y operaciones aritméticas, figuras geométricas, etc.-”).

Ayllón (2012: 35-36), en su tesis, citando la clasificación de Noda (2001) distingue entre *problemas mal definidos* y *problemas bien definidos*. Denomina *problema bien definido* al problema en el que hay consenso acerca del estado final al que hay que llegar y se considera resuelto cuando el individuo alcanza dicho estado. Sin embargo, *el problema mal definido* es aquel en el que no hay un único estado final y donde los estados final e inicial no están bien especificados.

Finalmente, constatamos que no hay ninguna clasificación exhaustiva sino múltiples clasificaciones de problemas, dependiendo todas ellas de los criterios de organización empleados.

2.3 Los enunciados de los problemas

Los enunciados de los problemas que aparecen en los libros de textos de Matemáticas se presentan como un reto que debe superar el alumnado para hallar su solución.

El enunciado de un problema es “un escrito matemático particular que tiene características propias, podríamos incluso decir que es un género literario bien caracterizado que necesita para su comprensión la adquisición de ciertas claves y alguna dosis de entrenamiento” (Chamorro, 2003: 278). “Consiste simplemente en una pregunta cuya respuesta requiere la aplicación de las matemáticas, aunque el procedimiento que se debe utilizar ha de extraerse antes de las frases que constituyen dicho enunciado” (Orton, 1996: 178).

Para Dumas-Carré (1987; cit. en Perales, 1993: 171), el enunciado de un problema implica seis elementos:

- *La descripción de un dispositivo y su funcionamiento eventualmente acompañado de un esquema.*
- *Las condiciones experimentales a que está sometido.*
- *Unas simplificaciones o modificaciones parciales que inscriben el fenómeno estudiado en un marco teórico simple.*
- *Unos datos, valores tomados por ciertas magnitudes físicas que se llaman a menudo «condiciones iniciales o condiciones en los límites».*
- *Una(s) pregunta(s).*
- *Unas consignas de repuesta más o menos implícitas interviniendo en la formulación de la pregunta.*

En la redacción del enunciado de un problema, Figueras (1994: 21-22) indica, que incide directamente sobre el grado de dificultad de su solución: “cómo son expresadas las relaciones entre los datos y las cantidades desconocidas y en qué grado se hacen explícitas; el orden de los ítems de información; la prioridad de los números sobre las palabras; el uso de palabras clave; la complejidad de las sintaxis y del vocabulario”. De esto se deduce que son abundantes las variables que intervienen, y por tanto, que hay que tener en cuenta a la hora de componer un enunciado.

La comprensión e interpretación de los enunciados supone, a veces, el principal inconveniente que deben superar los alumnos a la hora de afrontar la resolución de problemas matemáticos. Comprender el enunciado supone comprender el problema planteado. Esta comprensión depende de muchos factores. Chamorro (2003: 283-284) destaca, entre otros, los siguientes factores:

- *Los conocimientos pragmáticos del alumnado*: familiaridad del alumnado con el enunciado.
- *Los conocimientos del mundo*: Conocimiento sobre el tema del que trata el enunciado.
- *Las competencias lingüísticas*: Estructura de las frases, tiempos verbales, etc. De los cuatro niveles que destaca, resalta el *nivel pragmático* (interpretar lo que quiere decir el autor del enunciado) y el *nivel gráfico* (disposición del enunciado, presencia de esquemas, tablas, figuras, dibujos, etc.).
- *Las capacidades perceptivas*: Relacionadas, principalmente, con la exploración visual y la discriminación perceptiva.
- *La capacidad de representarse el problema*: Sobre todo a través de un escrito matemático poniendo en funcionamiento procedimientos de verificación y control.
- *Las competencias lógicas*.

En un estudio realizado por Giménez (1984) se señala el *factor de la percepción* como uno de los factores evidentes a tener en cuenta para la comprensión de los enunciados. Este autor resalta la dificultad para la abstracción que aparece cuando se introduce en el enunciado de un problema un factor perceptivo visual, lo cual ha sido estudiado por L. V. Zankov, Vygotski y otros, especificando qué “instrucciones verbales pueden quedar sin efecto por una determinada observación visual” (Giménez, 1984: 483).

Vieiro y Pereira (2013) consideran que la comprensión de un enunciado matemático exige tanto la comprensión de las relaciones entre los conjuntos de números como las relaciones entre los conceptos allí representados. Llegan incluso a afirmar que la habilidad que muestran los alumnos con la lectura influye en la forma de afrontar la resolución de un problema matemático, es decir, la comprensión del enunciado se presenta como una fase estrictamente necesaria que la convierte en un prerrequisito.

En el estudio realizado por Beltrán y Repetto (2006: 33) sobre la comprensión del enunciado matemático por alumnos, resaltan que en todo proceso de resolución de problemas aritméticos existe una fase imprescindible, que es la comprensión del enunciado y, más en concreto, la comprensión lectora del enunciado. “Este requisito permite al resolutor extraer un modelo mental de las relaciones que se extraen de las premisas del enunciado, permitiéndole de este modo focalizar su atención en la comprensión matemática del mismo”. Por tanto, según estas autoras es necesario facilitar a los escolares *estrategias comprensivas* y *metacompresivas* que ayuden a la interpretación lectora del enunciado.

Ortega, Pecharromán y Sosa (2011), en su trabajo sobre *la importancia de los enunciados de problemas matemáticos*, ponen de manifiesto la relevancia de estos enunciados como metodología para conseguir aprendizajes significativos en Educación Secundaria. Consideran que la formulación de enunciados con una finalidad específica es clave. Además, piensan que tales enunciados deben ser *interesantes, atractivos y novedosos* para lograr aprendizajes significativos en el alumnado, y se deben crear conexiones de las Matemáticas con *la vida real, con la Historia, con otras ciencias y entre otras ramas de las propias Matemáticas*. Según ellos, estos enunciados propuestos, favorecen los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas propias de la Educación Secundaria.

Después del análisis de este apartado, se deduce que algunas de las dificultades que se encuentra el alumnado a la hora de resolver un problema pueden venir de la mala lectura y comprensión que hagan de su enunciado, impidiéndole poder traducirlo a términos matemáticos.

2.4 Significación de la resolución de problema

Una vez descubierto el significado de problema, su clasificación y su expresión en los enunciados, se exploran las acciones que conducen a su resolución.

Concepto de resolución de problema

Para llegar a conocer el concepto de resolución de problemas desde un punto de vista escolar, se tiene que partir de que en ese proceso se distinguen o intervienen cuatro componentes según Kilpatrick, (1978; cit. en Castro, 2008: 3): “el *problema*,

interrogante o cuestión que se plantea, el *alumno* (o los alumnos) a quien se plantea el problema para que lo resuelva, y la *situación* en que resuelve el problema, que en el ámbito educativo es el aula, manejada por el *profesor*”.

Una vez aclarado los componentes que participan en ese proceso resulta interesante destacar la visión de resolución de problemas de Orton (1996: 51):

“La resolución de problemas se concibe ahora normalmente como generadora de un proceso a través del cual quien aprende combina elementos del conocimiento, reglas, técnicas, destrezas y conceptos previamente adquiridos para dar una solución a una situación nueva. Se admite, por lo general, que las matemáticas son tanto un producto como un proceso; tanto un cuerpo organizado de conocimientos como una actividad creativa en la que participa el que aprende (...). Así, la resolución de problemas puede considerarse como la verdadera esencia de las matemáticas (...). Tras haber resuelto un problema, se ha aprendido. Puede que sólo se haya aprendido a resolver ese problema, pero resulta más probable que se haya aprendido a solucionar una variedad de problemas semejantes y quizá incluso otros que poseen algunas características similares”.

Pifarré y Sanuy (2001: 307) proponen, para mejorar el proceso y las estrategias para resolver problemas matemáticos, cuatro elementos:

- a) *Contextualizar los problemas en situaciones cotidianas del entorno del alumno;*
- b) *Utilizar métodos de enseñanza que hagan visibles las acciones para resolver un problema;*
- c) *Diseñar diferentes tipos de materiales didácticos que guíen los diferentes procedimientos para resolver un problema, y*
- d) *Crear espacios de discusión y de reflexión como el trabajo en pequeños grupos.*

Branca (1980; cit. en Blanco, 1991: 55-56) considera diversas significaciones o interpretaciones del término de resolución de problema tanto en diversas disciplinas como dentro de las Matemáticas. Para él las tres interpretaciones más comunes de la resolución de problemas son:

- a) Como *meta*. En este caso surge la necesidad de aprender a resolver problemas ya que se considera que esta habilidad ayudará a resolver distintas situaciones de naturaleza diversa.
- b) Como *proceso*. Lo que importa es el método, el proceso la estrategia y este debería ser el foco del currículum de Matemáticas.
- c) Como una *habilidad básica*. Se considerará conjuntamente con otras, como interpretación de tablas, habilidades de cálculo, etc. Y en este sentido sería necesario distinguir los contenidos de los problemas, la clasificación que pudiera hacerse o distintos métodos para hallar la solución.

Polya (1945; cit. en Sepúlveda, Medina y Sepúlveda, 2009: 81) establece que la resolución de problemas es una característica esencial que distingue a la naturaleza humana y cataloga al hombre como “el animal que resuelve problemas”.

Modelos para la resolución de problemas

Son muchos los planteamientos que se pueden seguir a la hora de afrontar un problema matemático. Algunas propuestas caminan más por el lado de lo matemático y las estrategias heurísticas (Polya 1949; Schoenfeld 1985) y otros se acercan más a modelos psicológicos (Bransford y Stein 1986; Mason Burton y Stacey 1988), así se recoge en Pino y Blanco (2008: 66). En otros trabajos, como el de Hernández y Socas (1994), además de mencionar los autores anteriores aumentan el número de nombres relevantes que se han ocupado del tema:

<i>PSICOLOGÍA</i>	<i>MATEMÁTICAS</i>
Dewey (1888)	
Asociacionismo	
Gestaltismo:	
Wallas (1926)	
Duncker (1945)	Polya (1945, 1957)
Wertheimer	
Procesamiento de la información:	
Newell y Simon (1972)	
Mason, Burton y Stacey (1982)	
Mayer (1983)	
Bransford-Stein (1984)	Schoenfeld (1985)
	Goldin (1985, 1987)
	Guzmán (1991)

Fig. 2.3 Autores que desde un enfoque de la Psicología o de las Matemáticas, han investigado diferentes modelos de resolución de problemas (Hernández y Socas, 1994: 82).

Para Hernández y Socas (1994) los “asociacionistas” no hacen grandes aportaciones sobre modelos, ya que entendían que en la resolución de problemas sólo intervienen el empleo, más o menos mecánico, de la experiencia pasada. Por el contrario los “gentilistas”, sí influirían notoriamente en las teorías actuales. Explican que la comprensión de un problema se produce cuando la persona logra concebirlo como un todo y es capaz de establecer la relación de las partes con dicho todo. Agregan además, que en las teorías basadas en el *procesamiento de la información*, se distinguen tres fases en la resolución de un problema: *preparación* (comprender y concebir un plan), *producción* (ejecutar un plan) y *enjuiciamiento* (comprobar el resultado).

El siguiente cuadro, de Cañadas y otros (2002: 2), resume las propuestas de algunos autores sobre las fases a seguir en la resolución de problemas:

POLYA (1982)	MASON, BURTON Y STACEY (1988)	BRANDSFORD Y STEIN (1993)
<p>Comprender el problema estableciendo cuál es la meta y los datos y condiciones de partida.</p> <p>Idear un plan de actuación que permita llegar a la solución conectando los datos con la meta.</p> <p>Llevar a cabo el plan ideado previamente.</p> <p>Mirar atrás para comprobar el resultado y revisar el procedimiento utilizado.</p>	<p>Abordaje:</p> <p>Comprender el problema</p> <p>Concebir un plan</p> <p>Ataque:</p> <p>Llevar a cabo el plan</p> <p>Revisión:</p> <p>Reflexión sobre el proceso seguido. Revisión del plan.</p>	<p>I-identificación del problema</p> <p>D-efinición y representación del problema</p> <p>E-xploración de posibles estrategias.</p> <p>A-ctuación, fundad en una estrategia</p> <p>L-ogros. Observación y evaluación de los efectos de nuestras actividades</p>

Fig. 2.4 Fases de resolución de problemas. (Cañadas y otros, 2002: 2)

Por nuestra parte, hemos completado el cuadro anterior a partir de otros autores.

DEWEY (1888) (cit. en Blanco, 1996: 12)	WALLAS (1926) (cit. en Hernández y Soca, 1994: 83)	GUZMÁN (1991)
<p>Identificación de la situación problemática.</p> <p>Definición precisa del problema.</p> <p>Análisis medios-fines. Plan de solución.</p> <p>Ejecución del plan.</p> <p>Asunción de las consecuencias.</p> <p>Evaluación de la solución.</p> <p>Supervisión. Generalización.</p>	<p>Preparación. Recolección de información e intentos preliminares de solución.</p> <p>Incubación. Dejar el problema de lado para realizar otras actividades o descansar.</p> <p>Iluminación. Es cuando se produce la aparición de la idea clave para la solución (el famoso ajá o insight).</p> <p>Verificación. Se comprueba la solución.</p>	<p>Familiarización con el problema.</p> <p>Búsqueda de estrategias.</p> <p>Llevar adelante la estrategia.</p> <p>Revisar el proceso y sacar consecuencias.</p>

Fig. 2.5 Modelos para la resolución de problemas.

Alonso, González y Sáenz (1988: 252), señalan que la mayoría de estos modelos de solución de problemas, son modelos formales contruidos, a costa de un *a priori*, “que es el proceso ideal, conceptual, o lógico, si se quiere, para resolver problemas”. Además, según Juidías y Rodríguez (2007: 283) todas las fases que recogen los modelos se deben complementar con intervenciones dirigidas a mejorar el contexto en el que el alumno resuelve los problemas matemáticos para crear “un clima en el que el alumno sienta que se valora su proceso de resolución y no sólo la solución a la que llega, pueda compartir su pensamiento matemático con sus iguales, esté expuesto a problemas matemáticos interesantes y útiles y se empleen recursos didácticos variados para plantear y resolver los problemas”.

Variables influyentes en la resolución de problemas

Son muchos los factores que pueden intervenir en la resolución de problemas matemáticos, fundamentalmente hacen referencia tanto a la singularidad del problema matemático, como del alumnado que lo averigua, y del contexto en el que tiene lugar la resolución.

Con respecto a las variables que influyen en el proceso de resolución de un problema se puede citar la clasificación de Kulm (1979; cit. en Hernández y Socas, 1994: 84), realizada a partir de la clasificación sobre variables hecha por Kilpatrick. La clasificación que configuró se compone de cuatro variables:

1. *Variables sintácticas*, que describen la estructura gramatical y la complejidad del enunciado del problema.
2. *Variables de contenido y de contexto*, que engloban todos los aspectos semánticos, tanto matemáticos como no matemáticos.
3. *Variables de la estructura*, que describen las características de la representación formal del problema y los procedimientos algorítmicos.
4. *Variables de la conducta heurística*, que incluyen los procesos heurísticos que son aplicables al problema y las consecuencias de aplicarlos.

Charles y Lester, (1982; cit. en Blanco, 1993: 69) sintetizan en siete los factores que influyen en la resolución de problemas:

1. *Complejidad del enunciado del problema.* Se refiere a la complejidad de la sintaxis, la cantidad de información proporcionada, el número de condiciones y variables que intervienen, y el contenido matemático del problema.
2. *Presentación y representación del problema.* La manera de plantear un problema influirá en el éxito de su resolución. Además, la representación mental que el resolutor se forma del mismo posiblemente será decisiva para encontrar un camino de solución.
3. *Familiaridad con procesos adecuados de resolución.* La práctica en el uso de determinados procesos de solución facilitará la resolución de problemas semejantes.
4. *Problemas que sugieren soluciones o procedimientos engañosos.* El modo de exponer un problema puede condicionar modos de solución inadecuada o soluciones engañosas. Los libros de Matemáticas recreativa sugieren numerosos ejemplos de ello.
5. *Dificultad en lograr soluciones parciales.* En ocasiones, los resolutores inexpertos desconocen cómo abordar un problema, dudando de su capacidad.

Se comprueba que las variables o factores que recogen estos autores están estrechamente relacionados, y además se podrían agrupar en las tres categorías que configura Perales (1993: 117):

- *La naturaleza del problema:* Considera las variables que se refieren fundamentalmente a los aspectos formales del problema tales como la precisión o univocidad, estructura, lenguaje, etc., del enunciado; complejidad y tipo de tarea requerida en la resolución; solución abierta o cerrada, conocida o desconocida; etc.
- *El contexto de la resolución de problema:* Hace referencia a aquellas variables intervinientes en el proceso de resolución sin tener en cuenta al propio solucionador. Así cabría hablar de la manipulación o no de objetos reales, la consulta o no de fuentes de información, la verbalización o no de la resolución, si se suministra o no el algoritmo puesto en juego, tiempo de resolución, etc.
- *El solucionador del problema:* Aquí incluye las características del solucionador tales como conocimiento teórico, habilidades cognitivas, creatividad, actitud, ansiedad, edad, sexo, etc.

Enfoques en la resolución de problemas

La aparición del enfoque de resolución de problemas como preocupación didáctica, según Coronel y Curotto (2008: 464), se origina como resultado de estimar el *aprendizaje* como una *construcción social* que incorpora conjeturas, pruebas y refutaciones con base en un proceso creativo y generativo. Añaden, que la enseñanza desde este punto de vista persigue resaltar las *actividades que plantean situaciones problemáticas* cuya resolución precisa analizar, descubrir, elaborar hipótesis, confrontar, reflexionar, argumentar y comunicar ideas.

García Cruz (2008) intenta dar respuesta a la cuestión *¿Qué significa poner el enfoque en la resolución de problemas?* Para ello, da tres interpretaciones, similares a las que ofrece Blanco (1993:30) recogiendo también la propuesta de Gaulin (1986) y Schroeder y Lester (1989), resaltando que se pueden dar tres enfoques sobre el papel que desempeña la resolución de problemas en la enseñanza de la matemática:

1. *Enseñanza para la resolución de problemas.* Se pretende que los conocimientos que hayan sido previamente enseñados puedan tener una aplicación útil a través de la solución de problemas. En esta corriente se incluirían aquellos profesores que consideran que el principal propósito de la enseñanza de las Matemáticas debe ser conocer su utilidad. Adquiriendo pleno sentido la colocación de los problemas al final de cada capítulo o después de la introducción de algún concepto o algoritmo.
2. *Enseñanza sobre la resolución de problemas.* Se busca que los alumnos aprendan a encontrar estrategias para resolver problemas, adquiriendo ciertas técnicas que les lleven a ser buenos resolutores de problemas. En esta corriente se incluirían aquellos profesores que enseñan estrategias específicas sobre resolución de problemas y que favorecen la reflexión y discusión sobre el propio proceso.
3. *Enseñanza vía resolución de problemas.* Se plantea la enseñanza de las Matemáticas partiendo de proponer problemas que los alumnos irán resolviendo.

Stanic y Kilpatrick (1988) según Vilanova et al. (2001: 2-4), al referirse a la resolución de problemas, reconocen los siguientes enfoques o significados:

1. *Resolver problemas como contexto*: Desde este enfoque, los problemas son utilizados como vehículos al servicio de otros objetivos curriculares, jugando cinco roles principales: como una justificación para enseñar matemática; para proveer especial motivación a ciertos temas; como actividad recreativa; como medio para desarrollar nuevas habilidades; como práctica.
2. *Resolver problemas como habilidad*: En este caso la resolución de problemas se muestra como una habilidad más ofrecida en el currículo. Las técnicas de resolución de problemas son enseñadas como un contenido, con problemas de práctica relacionados, para que las técnicas puedan ser dominadas.
3. *Resolver problemas es "hacer matemática"*: Consiste en creer que el trabajo de los matemáticos es resolver problemas y que la matemática realmente consiste en problemas y soluciones.

Se puede afirmar que los enfoques dados por los distintos autores, Blanco (1993), Stanic y Kilpatrick (1988), y García Cruz (2008) son bastantes similares, llegando incluso a repetirse, excepto algunos cambios de palabras.

2.5 La resolución de problemas en el currículo

Desde hace más de dos décadas la resolución de problemas ha estado inmersa en el currículo de Matemáticas (Blanco, 2013: 137), generando algunos cambios en la enseñanza de dicha disciplina.

Gasco Txabarri (2013: 2) citando a varios autores (Arcavi y Friedlander, 2007; Yeap, Ferrucci, y Carter, 2006) recoge que a lo largo de la historia la resolución de problemas ha sido uno de los puntos principales de la educación matemática a nivel internacional. Añade, que por tanto es fácil entender que tenga una presencia importante en los currículos escolares de cualquier país del mundo tanto en Educación Primaria como en Secundaria. Es decir, la mayoría de los países han ido incorporando la resolución de problemas en sus currículos, en ocasiones como un contenido específico y en otros como un eje transversal.

Desde la década de los 60, según Castro (2008: 6), se percibe una preocupación creciente por incorporar la resolución de problemas en el currículo de las Matemáticas escolares y un esfuerzo por sustentar las innovaciones curriculares sobre trabajos de

investigación educativa. Además, indica que “las traducciones de trabajos de la escuela soviética de Educación Matemática (Kilpatrick y Wiszurp, 1969, 1972; Krutetskii, 1976) pusieron de manifiesto el enorme interés de este foco de investigación y los considerables avances que habían realizado”.

La mayoría de los autores, como Puig (2008: 2), consideran que varios son los factores nacionales e internacionales que colocan a la resolución de problemas como uno de los centros fundamentales de la reforma del currículo de Matemáticas. Éste indica, que en USA, el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) había llamado a centrar la educación matemática en la resolución de problemas en 1980 en el manifiesto *An Agenda for Action* (NCTM, 1980) y las recomendaciones hechas en el Reino Unido por el Informe Cockcroft también darían un importante empuje a las actividades de resolución de problemas. Concretamente, en el párrafo 249 del informe Cockcroft se establece que *la habilidad en resolver problemas es el núcleo central de las matemáticas* (Castro, 2008: 6).

Los Estándares Curriculares del NCTM (1989, 2000; cit. en Castro, 2008: 6) consideran la resolución de problemas como uno de los estándares que hay que desarrollar en el currículum escolar de Matemáticas. Con respecto a estos estándares, Gaulin (2001: 55) en su conferencia sobre las *Tendencias actuales de la resolución de problemas* recoge que “antes teníamos: Números, Álgebra, Geometría, Análisis de Datos, Medida, Resolución de Problemas, Conexiones, Comunicación, Razonamiento,..., había nueve. Ahora distinguen dos tipos de estándares: estándares de contenido y estándares de procesos. Y la resolución de problemas aparece en los estándares de procesos, lo que tiene mucho sentido, y entonces la resolución de problemas aparece aquí, Razonamiento y Prueba (Demostración)..., ahora hay mucho más sobre pruebas (demostraciones), lo que faltaba en la edición anterior, Comunicación, Conexiones....., y hay un nuevo estándar que se llama "Representación", el uso de varios tipos de representaciones en Matemáticas”.

El análisis de la *Resolución de Problemas en la investigación y el currículo*, ha sido debatido en el XII Simposio de Investigación en Educación Matemática desarrollado en Badajoz en 2008, resaltando algunos ponentes, como Castro (2008), la creciente importancia de la resolución de problemas en los currículos nacionales e internacionales, tanto desde un punto de vista de contenido como metodológico. Según

Blanco (2013: 139), citando a Puig (2008), “la resolución de problema como método facilitaría la consolidación de conceptos, técnicas y actitudes; y como contenido supondría la reflexión sobre procesos comunes en la resolución de problemas”.

Según Garret (1988: 225), citando a otros autores (Barnes, 1982, entre otros), indica que no sólo los teóricos del currículo predicán que la resolución de problemas es una destreza importante que debe ser fomentada, sino “que los investigadores del currículo (Eggleston, Galton & Jones, 1975) encuentran que es una característica fundamental del modo en que los profesores abordan su tarea y que los propios profesores la consideran como algo que debe ser incorporado en las actividades de aprendizaje de sus alumnos (Wilson, 1977, y Aylesworth, 1965)”.

Actualmente los currículos escolares se basan “en la pedagogía constructivista frente a la pedagogía tradicional que le precedía. Antes del cambio de paradigma, las matemáticas eran consideradas como una materia escolar basada en el rendimiento, en reglas estrictas, procedimientos eficientes y respuestas correctas (Schoenfeld, 1989). En este contexto, el/la profesor/a se colocaba en el centro de los métodos de enseñanza. En la nueva perspectiva constructivista, en cambio, el alumnado pasa a ser el núcleo del proceso de enseñanza-aprendizaje y se empiezan a plantear problemas más abiertos y menos rutinarios (Riordan y Noyce, 2001)”. (Gasco Txabarri, 2013: 2).

Como síntesis, destacar la visión que recoge Blanco (1991: 50), sobre el sentido por donde tendría que ir el currículo deseado: “por el sentido de facilitar la formación matemática, y las habilidades de los estudiantes. Consecuentemente los programas de Matemáticas deberían proporcionar experiencias suficientes a los alumnos para que estos llegaran a dominar distintas situaciones matematizables”.

En este trabajo de investigación que presentamos aquí se han analizado las propuestas curriculares de Matemáticas correspondientes a las Leyes de Educación de 1953 (LOEM), 1970 (LGE), 1990 (LOGSE) y 2006 (LOE), en relación a la resolución de problemas y en concreto a las ecuaciones de segundo grado, observando importantes coincidencias y diferencias que resaltamos en el apartado siguiente.

2.5.1 Comparativa de las propuestas curriculares de Matemática en la normativa educativa de 1953, 1970, 1990 y 2006

"Las cuatro dimensiones del concepto de currículum son los objetivos, contenidos, metodología y evaluación." (Steiner, 1980; cit. en Rico, 1998: 5).

Partiendo de estas cuatro componentes se pretende conocer los programas curriculares que marcan el desarrollo de los manuales escolares de Matemáticas en diferentes épocas.

Por tanto, este apartado muestra una comparativa de las propuestas curriculares de Matemáticas que hacen las distintas leyes de educación por las que se deben guiar los manuales que han sido objeto de estudio de este trabajo. En esta comparación se presta especial atención a la resolución de problemas y en concreto a las ecuaciones de segundo grado.

La siguiente tabla, a modo de síntesis, muestra los manuales escolares y la normativa legal estudiada para cada una de las épocas:

<i>Manuales escolares</i>	<i>Normativa legal</i>
1ª Época : LOEM 1953	
Matemáticas cuarto curso, Luis Vives (1965)	Ley de 26 de febrero de 1953 sobre Ordenación de la Enseñanza Media. (BOE nº 58, de 27 de febrero de 1953).
Matemáticas cuarto curso, S.M. (1965)	Decreto de 31 de mayo de 1957 por el que se establece reducción de asignaturas en el vigente Plan de Bachillerato. (BOE nº 158, de 18 de junio de 1957). Orden de 5 de junio de 1957 que aprueba los cuestionarios para el Bachillerato. (BOE nº 170, de 2 de julio de 1957). Orden de 28 marzo 1958 por la que se determinan las condiciones materiales de los textos para las asignaturas del Plan de Bachillerato de 1957. (BOE nº 99, de 25 de abril de 1958).
2ª Época : LGE 1970	
Matemáticas 8º E.G.B.: Guía didáctica, Santillana (1978)	Ley 14/1970, de 4 de agosto, General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa. (BOE nº 187, de 6 de agosto de 1970). Orden de 2 de diciembre de 1970 por la que se aprueban las orientaciones pedagógicas para la Educación General Básica. (BOE nº 293, de 8 de diciembre de 1970).
Matemáticas 8º E.G.B., ANAYA (1979)	Orden de 6 de agosto de 1971 por la que se prorrogan y completan las orientaciones pedagógicas para la Educación General Básica. (BOE nº 202, de 24 de agosto de 1971). Ministerio de Educación y Ciencia (1971). Educación General Básica. Nuevas Orientaciones, Segunda Etapa. Madrid: Magisterio Español.
3ª Época : LOGSE 1990	
Matemáticas 2º: Secundaria, Santillana (1997)	Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre de 1990, de Ordenación General del Sistema Educativo. (BOE nº 238, de 4 de octubre de 1990). Real Decreto 1007/1991, de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. (BOE nº 152, de 26 de junio de 1991). (Suplemento: ANEXO I). Real Decreto 1345/1991, de 6 de septiembre, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. (BOE nº 220, de 13 de septiembre de 1991). (Suplemento: ANEXO).

4ª Época : LOE 2006	
<p>Matemáticas 2: Educación Secundaria, ANAYA (2008)</p> <p>Matemáticas, 2 Secundaria: ábaco: [proyecto SM Secundaria], S.M. (2008)</p>	<p>Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. (BOE nº 106, de 4 de mayo de 2006).</p> <p>Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. (BOE nº 5, de 5 de enero de 2007).</p>

Fig. 2.6 Manuales escolares y normativa legal estudiada para cada una de las épocas.

Objetivos específicos de las Matemáticas:

A continuación, en forma de tabla, se muestran las referencias a los objetivos específicos de las Matemáticas que se recogen en los cuatro currículos para cada uno de las épocas estudiadas.

Específicos de las Matemáticas	
1ª Época: LOEM 1953	
No se han encontrado referencia a los objetivos específicos sobre el área de las matemáticas en la LOEM de 1953 ni en los Cuestionarios para el Bachillerato del Plan de 1957. Sin embargo, dicha Ley sí muestra en su artículo primero la finalidad de la Enseñanza Media, como "el grado de la educación que tiene por finalidad esencial la formación humana de los jóvenes y la preparación de los naturalmente capaces para el acceso a los estudios superiores".	
2ª Época: LGE 1970	
Nuevas Orientaciones Pedagógicas para la segunda etapa de la E.G.B. (MEC, 1971)	
Objetivos generales:	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Manejar los conceptos matemáticos, como medio de adquirir hábitos de claridad y de rigor en el pensamiento. 2. Adquisición de un vocabulario básico, científico, que dé precisión y concisión en la expresión de los conocimientos matemáticos. 3. Elaboración de sencillos esquemas mentales que permitan al alumno resolver problemas de la vida ordinaria y profesional. 4. Perfeccionamiento de los automatismos del cálculo. 5. Iniciación en el razonamiento lógico, mediante sencillas demostraciones matemáticas. 6. Manejar las estructuras algebraicas elementales, para una mejor comprensión y relación entre los elementos de los conjuntos estudiados. 7. Expresión matemática, oral y escrita, de los aspectos cuantitativos de la realidad material y de la comunidad humana. 8. Iniciar en el proceso de abstracción, matematización, partiendo de situaciones concretas, simples y de la vida ordinaria. 9. Desarrollo de la intuición espacial. 	
Objetivos para OCTAVO CURSO:	
<p>A.- Construcción rigurosa del conjunto Q de los números racionales.</p> <p>B.- Estructura algebraica de cuerpo.</p> <p>C.- Empleo correcto de las propiedades del cuerpo Q de las racionales.</p> <p>D.- Capacidad de abstraer lo esencial y relacionarlo con lo estudiado en cursos anteriores.</p> <p>E.- Asimilación del concepto de función, función polinómica y, en concreto, funciones polinómicas de segundo grado o cuadráticas.</p> <p>F.- Representación gráfica de la función cuadrática: parábola.</p> <p>G.- Resolución de ecuaciones de primer grado y segundo grado con una incógnita con coeficientes racionales. Automatización en los ejercicios correspondientes.</p>	
3ª Época: LOGSE 1990	
Real Decreto 1007/1991	Real Decreto 1345/1991
La enseñanza de las Matemáticas en la etapa de Educación Secundaria Obligatoria tendrá como objetivo contribuir a desarrollar en los alumnos y alumnas, las capacidades siguientes:	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Incorporar al lenguaje y modos de argumentación habituales las distintas formas de expresión matemática (numérica, gráfica, geométrica, lógica, algebraica, probabilística) con el fin de comunicarse de manera precisa y rigurosa. 2. Utilizar las formas de pensamiento lógico para formular y comprobar conjeturas, realizar inferencias y deducciones y organizar y relacionar informaciones diversas relativas a la vida cotidiana y a la resolución de problemas. 3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor, utilizando técnicas de recogida de datos, procedimientos de medida, las distintas clases de números y mediante la realización de los cálculos apropiados a cada situación. 4. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos, y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados. 5. Utilizar técnicas sencillas de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones diversas, y para representar esa información de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma. 6. Reconocer la realidad como diversa y susceptible de ser explicada desde puntos de vista contrapuestos y complementarios: determinista/aleatorio, finito/infinito, exacto/aproximado, etcétera. 	

<p>7. Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la realidad, analizando las propiedades y relaciones geométricas implicadas y siendo sensible a la belleza que generan.</p> <p>8. <u>Identificar los elementos matemáticos</u> (datos estadísticos, gráficos, planos, cálculos, etc.) presentes en las noticias, opiniones, publicidad, etc. analizando críticamente las funciones que desempeñan y sus aportaciones para una mejor comprensión de los mensajes.</p> <p>9. Actuar, en <u>situaciones cotidianas</u> y en la <u>resolución de problemas</u>, de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.</p> <p>10. Conocer y valorar las propias habilidades matemáticas para afrontar las situaciones que requieran su empleo o que permitan disfrutar con los aspectos creativos, manipulativos, estéticos o utilitarios de las matemáticas.</p>
<p>4ª Época: LOE 2006</p>
<p>Real Decreto 1631/2006</p>
<p>La enseñanza de las Matemáticas en esta etapa tendrá como finalidad el desarrollo de las siguientes capacidades:</p> <p>1. <u>Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático</u>, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.</p> <p>2. <u>Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.</u></p> <p>3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.</p> <p>4. <u>Identificar los elementos matemáticos</u> (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.</p> <p>5. Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la vida cotidiana, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.</p> <p>6. <u>Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos</u> (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.</p> <p>7. Actuar ante los <u>problemas</u> que se plantean en la <u>vida cotidiana</u> de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.</p> <p>8. <u>Elaborar estrategias personales</u> para el análisis de situaciones concretas y la identificación y <u>resolución de problemas</u>, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.</p> <p>9. <u>Manifiestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y adquirir un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.</u></p> <p>10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.</p> <p>11. Valorar las matemáticas como parte integrante de nuestra cultura, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual y aplicar las competencias matemáticas adquiridas para analizar y valorar fenómenos sociales como la diversidad cultural, el respeto al medio ambiente, la salud, el consumo, la igualdad de género o la convivencia pacífica.</p>

Fig. 2.7 *Objetivos específicos de las Matemáticas que se recogen en los cuatro currículos estudiados.*

Entre las invariantes que se pueden apreciar en los objetivos enumerados a lo largo de los programas estudiados, resalta la *capacidad para resolver problemas* (3 [LGE 1970], 2, 4, 9 [LOGSE 1990], 7, 8, 9 [LOE 2006]) y la *incorporación al vocabulario o lenguaje formas de expresión matemática* (2 [LGE 1970], 1 [LOGSE 1990], 1 [LOE 2006]). Además, la *vida ordinaria o cotidiana* del alumno se fija como un contexto importante para la resolución de problemas, que le va a permitir *actuar ante los problemas que se plantean en situaciones cotidianas de acuerdo con modos propios de la actividad matemática* (3, 8 [LGE 1970], 2, 9 [LOGSE 1990], 5, 7 [LOE 2006]). Entre los tipos de tareas que debe realizar el alumnado para una comprensión mejor de los mensajes, se mantiene en los programas de las dos últimas épocas la tarea de *identificar elementos matemáticos* (8 [LOGSE 1990], 4 [LOE 2006]). En relación a los procesos o modelos para la resolución de problemas, la *elaboración de esquemas*

mentales o estrategias permitirán al alumnado resolver problemas (3 [LGE 1970], 4 [LOGSE 1990], 2, 8 [LOE 2006]).

Por el contrario, de las variantes que se aprecian destaca la innovación que se introduce en el último programa de *utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores, etc.)* (6 [LOE 2006]), objetivo ausente en los programas anteriores.

El único programa que en los objetivos hace referencia a las ecuaciones de segundo grado es el de la LGE 1970, concretamente en los objetivos específicos para el curso octavo (G.- [LGE 1970]), recogidos en las *Nuevas Orientaciones Pedagógicas*.

Contenidos específicos de las Matemáticas:

En este apartado se recoge, en primer lugar, la estructura de los grados o etapas en la que se organizan los contenidos en cada uno de los cuatro programas. Mostrando además los enunciados de los temas según aparecen tratados en dichos programas.

Organización de los contenidos	Enunciados de los temas
1ª Época: LOEM 1953	
Artículo 78, 79 y 80	Orden de 5 de junio de 1957
<p>78.- El estudio del Bachillerato se divide, tanto para el plan general como para los especiales, en dos grados: elemental y superior.</p> <p>79.- El primer grado del Bachillerato: a) Durará cuatro cursos; d) No podrá comenzarse antes del año natural en que el alumno cumpla los diez de su edad. Al terminarlo, los alumnos practicarán las pruebas exigidas por el Estado para la colación del título de Bachiller elemental.</p> <p>80.- Las materias propias del grado elemental, pedagógicamente distribuidas en los programas y horarios de los cuatro cursos, serán: Religión, Lengua Española y Literatura, Matemáticas, Latín, Geografía e Historia, Ciencias Físicas, Químicas y Naturales, Dibujo y un idioma moderno.</p>	<p>CUARTO CURSO: (1) División de polinomios. División por x-a. (2) Factorización de polinomios. (3) Fracción algebraica. (4) Valor numérico. Radicación. (5) Cálculo de radicales. (6) Potencias de exponente negativo y fraccionario. (7) Ecuaciones de segundo grado. (8) Representación de las funciones de segundo grado. (9) Sistema de dos ecuaciones una de primer grado y otra de segundo, con dos incógnitas. (10) Introducción a la Geometría del espacio: conceptos generales. (11) Perpendicularidad y paralelismo. (12) Ángulos diedros. (13) Planos perpendiculares. (14) Simetrías. (15) Estudio de los prismas. (16) Pirámides. (17) Idea de los ángulos poliedros. (18) Poliedros regulares. (19) Superficies de los poliedros. (20) Los cuerpos de revolución: cilindros y conos. (21) Superficie esférica y esfera. (22) Noción de coordenadas geográficas. (23) Área de las figuras esféricas. (24) Secciones paralelas de las superficies prismáticas y de ángulos poliedros. (25) Volúmenes de los cuerpos geométricos. (26) Volúmenes de las figuras esféricas. (27) Nociones sobre las secciones cónicas. (28) Movimientos de la Tierra. (29) Ejercicios de aplicación de las teorías estudiadas.</p>
2ª Época: LGE 1970	
Artículo 15 y 17.1	Nuevas Orientaciones Pedagógicas
<p>15. La Educación General Básica tiene por finalidad proporcionar una formación integral, (...). Este nivel comprende ocho años de estudio y se cumple normalmente entre los seis y trece años de edad y está dividido en dos etapas: a) En la primera, para niños de seis a diez años, (...). b) En la segunda, para niños de once a trece años, (...).</p> <p>17. Uno. Las áreas de actividad educativa en este nivel comprenderán: (...); Las nociones acerca del mundo físico, mecánico y matemático; (...).</p>	<p>OCTAVO CURSO: (1)-Construcción del conjunto de los números racionales. (2)-Suma de números racionales. Grupo aditivo. Ordenación. (3)-Producto de números racionales. El cuerpo de números racionales. (4)-Funciones de variable racional. Gráficas. Ecuaciones. (5)-Funciones polinómicas. (6)-Funciones cuadráticas. (7)-La ecuación de segundo grado. Parábola.</p>

3ª Época: LOGSE 1990		
Artículo 17, a) y 20, 1 y 2.	Real Decreto 1007/1991	Real Decreto 1345/1991
<p>17. El nivel de educación secundaria comprenderá:</p> <p>a) La etapa de educación secundaria obligatoria, que completa la enseñanza básica y abarca cuatro cursos académicos, entre los doce y dieciséis años de edad.</p> <p>Artículo 20</p> <p>1. La educación secundaria obligatoria constará de dos ciclos, de dos cursos cada uno, y se impartirá por áreas de conocimiento.</p> <p>2. Serán áreas de conocimiento obligatorias en esta etapa las siguientes: (...) g) Matemáticas (...).</p>	<p>1. Números y operaciones: significados, estrategias y simbolización. (Resolución de ecuaciones de primer grado por transformación algebraica y de otras ecuaciones por métodos numéricos y gráficos).</p> <p>2. Medida, estimación y cálculo de magnitudes.</p> <p>3. Representación y organización en el espacio.</p> <p>4. Interpretación, representación y tratamiento de la información.</p> <p>5. Tratamiento del azar.</p>	
4ª Época: LOE 2006		
Artículo 22.1 y 24. 1 y 2	Real Decreto 1631/2006	
<p>22. 1. La etapa de educación secundaria obligatoria comprende cuatro cursos, que se seguirán ordinariamente entre los doce y los dieciséis años de edad.</p> <p>24. 1. Las materias de los cursos primero a tercero de la etapa serán las siguientes: (...) Matemáticas (...).</p> <p>2. Además, en cada uno de los cursos todos los alumnos cursarán las materias siguientes: (...) Matemáticas.</p>	<p>SEGUNDO CURSO:</p> <p>Bloque 1. Contenidos comunes.</p> <p>Bloque 2. Números.</p> <p>Bloque 3. Álgebra. (Para el SEGUNDO CURSO: Resolución de ecuaciones de primer grado. Transformación de ecuaciones en otras equivalentes. Interpretación de la solución; para el TERCER CURSO: Resolución de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas).</p> <p>Bloque 4. Geometría.</p> <p>Bloque 5. Funciones y gráficas.</p> <p>Bloque 6. Estadística y probabilidad.</p>	

Fig. 2.8 Estructura de los grados o etapas en la que se organizan los contenidos y los enunciados de los temas.

Se observan diferencias en cuanto a la estructura en la que se organizan los contenidos: grados (LOEM 1953) y etapas (LGE 1970, LOGSE 1990 y LOE 2006). Sin embargo, la edad del alumnado comprendida en cada uno de ellos es bastante similar (a partir de 10 años [LOEM 1953], entre 11 y 13 años [LGE 1970], y entre 12 y 16 años [LOGSE 1990 y LOE 2006]).

Una de las coincidencias en los programas curriculares de las distintas épocas es la consideración de las Matemáticas como *materia propia* u *obligatoria*.

En el caso de los contenidos, entre las invariantes que tienen presencia continuada en los cuatro programas destaca *la resolución de ecuaciones de segundo grado* (7 [LOEM 1953], 7 [LGE 1970]), puntualizando para la LOGSE 1990 y para la LOE 2006.

Teniendo en cuenta que la organización de contenidos de la LOGSE 1990, a diferencia de las otras leyes estudiadas, no establece contenidos por cursos y niveles sino que señala bloques de contenido para toda la educación secundaria. Comentar, que en ninguno de los dos Reales Decretos se recogen en los contenidos para el “supuesto segundo curso” referencias a las ecuaciones de segundo grado. Sin embargo, en las especificaciones para el cuarto curso opción B que recoge el Real Decreto 1345/1991

aparece la siguiente referencia a las ecuaciones de segundo grado: “*La capacidad de utilizar expresiones simbólicas se amplía con el manejo de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas, lo que lleva consigo la posibilidad de enfrentarse a problemas que los requieran, (...) como (...) la resolución algebraica de la ecuación de segundo grado*”.

Con respecto, a la LOE 2006 en el Real Decreto 1631/2006, se recogen las ecuaciones de segundo grado no en el segundo curso de la ESO sino en el tercero (Bloque 3).

Como variante, cabe subrayar la presencia notable de la *estadística y probabilidad* en los dos últimos programas (5 [LOGSE 1990], 6 [LOE 2006]).

Metodología general y específica de las Matemáticas:

La metodología está presente en los cuatro planes de estudio. Se indican las referencias que se hacen de ella de forma general en las propias leyes de educación y de forma más precisa, puntualizando en las Matemáticas, en las normativas específicas.

1ª Época: LOEM 1953
<i>General</i>
Artículos del 10 al 15 (Principios pedagógicos)
10.- <i>La educación de grado medio debe comprender, además del cultivo de los valores espirituales, la formación moral o del carácter, la formación intelectual y la fisicodeportiva. (...).</i>
11.- <i>La educación moral preparará a los jóvenes para el ejercicio de la libertad y la responsabilidad, (...).</i>
12.- <i>La educación intelectual debe disponer a los alumnos para el hábito de la observación y del estudio, del razonamiento y de la expresión verbal y escrita. (...).</i>
13.- <i>La educación física, (...).</i>
14.- <i>La aptitud pedagógica, además de la científica, será condición indispensable para ingresar en el Profesorado oficial. (...).</i>
15.- <i>En la Enseñanza Media se aplicará el principio de una educación separada para los alumnos de uno u otro sexo.</i>
<i>Específica de las Matemáticas</i>
Cuestionarios para el Bachillerato del Plan de 1957
No se ha encontrado referencia a la metodología específica de las Matemáticas.
2ª Época: LGE 1970
<i>General</i>
Artículo 18.1
<i>Los métodos didácticos en la Educación General Básica habrán de fomentar la originalidad y creatividad de los escolares, así como el desarrollo de aptitudes y hábitos de cooperación, mediante el trabajo en equipo de Profesores y alumnos. Se utilizarán ampliamente las técnicas audiovisuales.</i>
<i>Específica de las Matemáticas</i>
Nuevas Orientaciones Pedagógicas
Octavo curso
1. <i>Se puede hacer el estudio de Q a partir de la noción de operador, como se hizo en el primer año de esta etapa. (...). En líneas generales, parece aconsejable, dado el nivel de estos alumnos, continuar el proceso iniciado en sexto, revisando y ampliando lo allí estudiado. (...).</i>
2. <i>Es necesario definir bien la noción de función polinómica, para que cuando estudie los polinomios sepa distinguir ambos conceptos con precisión. Interesa hacer un estudio concreto y particular a partir de las funciones polinómicas de la función cuadrática y de la resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Hay que evitar que el objetivo formativo del tema anterior se reduzca a la automatización de una fórmula. En parte se puede conseguir, introduciendo al alumno en el tema, de un modo gradual con situaciones perfectamente graduadas y conexas, por ejemplo: ¿Qué es resolver una ecuación? Investigación personal del método para la resolución de determinadas ecuaciones que fácilmente se puedan reducir a otras de primer grado; ecuaciones de segundo grado incompletas, reducibles mediante la extracción de una raíz; ecuaciones completas.</i>
3. <i>La representación gráfica de la función cuadrática, es decir, la parábola, como es lógico sólo se puede hacer de un modo</i>

<i>aproximado, puesto que se manejan los números reales, y la curva es una función continua. Es importante hacer ver al alumno en qué sentido la gráfica que obtiene es sólo una aproximación.</i>	
3ª Época: LOGSE 1990	
<i>General</i>	
Artículo 21, parte 1	
<i>Con el fin de alcanzar los objetivos de esta etapa, la organización de la docencia atenderá a la pluralidad de necesidades, aptitudes e intereses del alumnado.</i>	
<i>Específica de las Matemáticas</i>	
Real Decreto 1007/1991	Real Decreto 1345/1991
<i>Conviene tener en cuenta por eso que en el desarrollo del aprendizaje matemático en el niño y el adolescente desempeña un papel de primer orden la experiencia y la inducción. A través de operaciones concretas como contar, comparar, clasificar, relacionar, el sujeto va adquiriendo representaciones lógicas, y matemáticas, que más tarde valdrán por sí mismas, de manera abstracta, y serán susceptibles de formalización en un sistema plenamente deductivo, independientes ya de la experiencia directa. Por otra parte la perspectiva histórica pone de manifiesto que las matemáticas han evolucionado en interdependencia con otros conocimientos y con la necesidad de resolver determinados problemas prácticos.</i>	
4ª Época: LOE 2006	
<i>General</i>	
Artículo 26. Principios pedagógicos.	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Los centros elaborarán sus propuestas pedagógicas para esta etapa desde la consideración de la atención a la diversidad y del acceso de todo el alumnado a la educación común. Asimismo, arbitrarán métodos que tengan en cuenta los diferentes ritmos de aprendizaje de los alumnos, favorezcan la capacidad de aprender por sí mismos y promuevan el trabajo en equipo. 2. En esta etapa se prestará una atención especial a la adquisición y el desarrollo de las competencias básicas y se fomentará la correcta expresión oral y escrita y el uso de las matemáticas. A fin de promover el hábito de la lectura, se dedicará un tiempo a la misma en la práctica docente de todas las materias. 5. Asimismo, (...) para la atención de aquellos alumnos que manifiesten dificultades especiales de aprendizaje o de integración en la actividad ordinaria de los centros, de los alumnos de alta capacidad intelectual y de los alumnos con discapacidad. 	
<i>Específica de las matemáticas</i>	
Real Decreto 1631/2006	
<i>Para que el aprendizaje sea efectivo, los nuevos conocimientos que se pretende que el alumno construya han de apoyarse en los que ya posee, tratando siempre de relacionarlos con su propia experiencia y de presentarlos preferentemente en un contexto de resolución de problemas. Algunos conceptos deben ser abordados desde situaciones preferiblemente intuitivas y cercanas al alumnado para luego ser retomados desde nuevos puntos de vista que añadan elementos de complejidad. La consolidación de los contenidos considerados complejos se realizará de forma gradual y cíclica, planteando situaciones que permitan abordarlos desde perspectivas más amplias o en conexión con nuevos contenidos.</i>	

Fig. 2.9 Criterios que marca la metodología en los cuatro planes de estudio.

La conclusión general que se extrae al comparar la metodología de los distintos planes es la acentuación en los dos últimos programas de la *importancia de la experiencia en el aprendizaje matemático* para aplicarla en un contexto de resolución de problemas. (*La experiencia y la inducción* [LOGSE 1990]; *los nuevos conocimientos que se pretende que el alumno construya han de apoyarse en los que ya posee, tratando siempre de relacionarlos con su propia experiencia y de presentarlos preferentemente en un contexto de resolución de problemas* [LOE 2006]).

Al igual que en el caso de los objetivos, el único programa que recoge en la metodología alguna referencia a las ecuaciones de segundo grado es el de la LGE 1970, concretamente en las *Nuevas Orientaciones Pedagógicas*, incluida en la metodología específica para el curso octavo (2 [LGE 1970]).

Evaluación general y específica de las Matemáticas:

La siguiente tabla muestra un resumen de los criterios de evaluación en los cuatro currículos para cada uno de los periodos estudiados.

No se han encontrado referencias a la evaluación específica para el área de Matemáticas en la LOEM de 1953, es decir, en concreto no aparece en los *Cuestionarios para el Bachillerato del Plan de 1957*; ni en la LGE 1970, en concreto, en las *Nuevas Orientaciones Pedagógicas para la segunda etapa de la E.G.B. (MEC, 1971)*. Sin embargo, tanto en la LOGSE 1990 como en la LOE 2006 si se incluyen unos criterios de evaluación específicos para cada una de las áreas. En concreto, se recogen en los Reales Decretos que establecen las enseñanzas mínimas.

1ª Época: LOEM 1953
<i>General</i>
Artículo del 86 al 95
<p>86.- Las pruebas de Bachillerato serán de tres clases: <i>a) De ingreso en el Bachillerato elemental, b) de curso, y c) de Grado. Sólo estas últimas habilitan para entrar en posesión de los títulos de Bachiller elemental o superior.</i></p> <p>87.- El examen de ingreso en el Bachillerato versará sobre conocimientos de los que se requieren para obtener el certificado especial de estudios primarios.</p> <p>88.- Los exámenes de ingreso (...), tendrán validez oficial para seguir los estudios en cualquier otro Centro docente.</p> <p>89.- Las pruebas de curso serán practicadas con carácter ordinario al finalizar el periodo lectivo, y con carácter extraordinario, en el mes de septiembre. (...).</p> <p>90.- Efectuarán sus exámenes de curso: <i>a) En los Institutos Nacionales, (...); b) En los Colegios reconocidos y ante personal titulado de los propios Centros, (...).</i></p> <p>91.- Las pruebas de Grado constarán de ejercicios escritos y orales, (...).</p> <p>92.- Las pruebas del Grado de Bachiller elemental versarán sobre todas las materias que comprenden los cuatro primeros años del plan cursado por el alumno. El título de Bachiller Elemental será expedido por los Directores de los Institutos Nacionales de Enseñanza Media.</p> <p>93.- Las pruebas del Grado de Bachiller superior se realizarán después de haber seguido el alumno los cursos que el plan señale.</p> <p>94.- Los alumnos que acrediten debidamente haber cursado con aprovechamiento el año preuniversitario, realizarán en las Facultades en que se inscriban pruebas de madurez que sustituirán al examen de ingreso en la Universidad, (...).</p> <p>95.- De todas las pruebas realizadas en cumplimiento de esta Ley quedará constancia en las actas del Centro donde curse el alumno, en los registros y expedientes del Instituto de la demarcación y en el libro de calificación escolar.</p>
2ª Época: LGE 1970
<i>General</i>
Artículo 11, parte 2, 3 y 4; Artículo 19, parte 1, 2 y 3.
<p>Artículo 11</p> <p>2. En la valorización del rendimiento de los alumnos se conjugarán las exigencias del nivel formativo e instructivo propio de cada curso o nivel educativo con un sistema de pruebas que tenderá a la apreciación de todos los aspectos de la formación del alumno y de su capacidad para el aprendizaje posterior.</p> <p>3. De cada alumno habrá constancia escrita, con carácter reservado, de cuantos datos y observaciones sobre su nivel mental, aptitudes y aficiones, rasgos de personalidad, ambiente, pertinentes para su educación y orientación. (...).</p> <p>4. La calificación final de cada curso se obtendrá fundamentalmente sobre la base de las verificaciones del aprovechamiento realizado a lo largo del año escolar. (...).</p> <p>Artículo 19</p> <p>1. En el período de Educación General Básica se tendrán en cuenta, sobre todo, los progresos del alumno en relación con su propia capacidad.</p> <p>2. La valoración final del curso la hará, en la primera etapa, el profesor respectivo, basándose en la estimación global de los resultados obtenidos por el alumno en su proceso educativo. Durante la segunda etapa habrá pruebas flexibles de promoción preparadas por un equipo de profesores del propio Centro.</p> <p>3. Aquellos alumnos que, sin requerir una educación especial, no alcanzaran una evolución satisfactoria al final de cada curso, pasarán al siguiente, pero deberán seguir enseñanzas complementarias de recuperación.</p>

3ª Época: LOGSE 1990	
General	
Artículo 22	
<p>1. La evaluación de la educación secundaria obligatoria será continua e integradora. El alumno que no haya conseguido los objetivos del primer ciclo de esta etapa podrá permanecer un año más en él, así como otro más en cualquiera de los cursos del segundo ciclo, (...).</p> <p>2. Los alumnos que al terminar esta etapa hayan alcanzado los objetivos de la misma, recibirán el título de Graduado en Educación Secundaria, que facultará para acceder al bachillerato y a la formación profesional específica de grado medio. (...).</p> <p>3. Todos los alumnos, en cualquier caso, recibirán una acreditación del centro educativo, (...).</p>	
Específicos de las Matemáticas	
Real Decreto 1007/1991	Real Decreto 1345/1991
<p>CRITERIOS DE EVALUACIÓN</p> <p>1.- Utilizar los números enteros, decimales y fraccionarios y los porcentajes para intercambiar información y resolver problemas y situaciones de la vida cotidiana. Se pretende garantizar con este criterio la adquisición de un rango amplio de destrezas en el manejo de los distintos tipos de números (...).</p> <p>2.- Resolver problemas para los que se precise la utilización de las cuatro operaciones, las potencias y las raíces cuadradas, con números enteros, decimales y fraccionarios, eligiendo la forma de cálculo apropiada y valorando la adecuación del resultado al contexto. A través de este criterio puede valorarse si el alumno es capaz de asignar a las distintas operaciones nuevos significados, e interpretar resultados diferentes a los que se obtienen habitualmente con números naturales. (...).</p> <p>3.- Utilizar convenientemente aproximaciones por defecto y por exceso de los números acotando el error, absoluto o relativo, en una situación de resolución de problemas, (...).</p> <p>4.- Interpretar relaciones funcionales dadas en forma de tabla o a través de una expresión algebraica sencilla (...).</p> <p>5.- Resolver problemas de la vida cotidiana por medio de la simbolización de las relaciones que puedan distinguirse en ellos y, en su caso, de la resolución de ecuaciones de primer grado. Este criterio va dirigido a comprobar que el alumno es capaz de utilizar las herramientas algebraicas básicas en la resolución de problemas. (...).</p> <p>6.- Asignar e interpretar la frecuencia y probabilidad en fenómenos aleatorios de forma empírica, (...).</p> <p>7.- Presentar e interpretar informaciones estadísticas (...).</p> <p>8.- Estimar la medida de superficies y volúmenes (...).</p> <p>9.- Utilizar los conceptos de incidencia, ángulos, movimientos, semejanza y medida, (...).</p> <p>10.- Interpretar representaciones planas de espacios y objetos (...).</p> <p>11.- Identificar relaciones de proporcionalidad numérica y geométrica en situaciones diversas (...).</p> <p>12.- Identificar y describir regularidades, pautas y relaciones conocidas en conjuntos de números y formas geométricas (...).</p> <p>13.- Utilizar estrategias sencillas, tales como la reorganización de la información de partida, la búsqueda de ejemplos, contraejemplos y casos particulares o los métodos de "ensayo y error" sistemático, en contextos de resolución de problemas. Este criterio se refiere a la manera de enfrentarse a la resolución de problemas, así como a alguna de las posibles estrategias que se puede poner en práctica. Debería tenerse en cuenta a la hora de aplicar este criterio la familiaridad del alumno con los objetos de los que trata, la disponibilidad de información explícita y no excesivamente abundante o la facilidad de codificación u organización de la información.</p> <p>Nota: En el Real Decreto 1345/1991, además de recoger los puntos anteriores recoge el siguiente: 6.- Resolver problemas en los que se precise el planteamiento y resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Este criterio trata de garantizar la adquisición de una cierta destreza en la utilización del lenguaje algebraico. (...).</p>	
4ª Época: LOE 2006	
General	
Artículo 28; Artículo 29	
<p>Artículo 28. Evaluación y promoción</p> <p>1. La evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado de la educación secundaria obligatoria será continua (...).</p> <p>2. Las decisiones sobre la promoción del alumnado de un curso a otro, dentro de la etapa, serán adoptadas de forma colegiada por el conjunto de profesores del alumno respectivo, atendiendo a la consecución de los objetivos. (...).</p> <p>3. (...), los alumnos promocionarán de curso cuando hayan superado los objetivos de las materias cursadas o tengan evaluación negativa en dos materias, como máximo y repetirán curso cuando tengan evaluación negativa en tres o más materias. (...).</p> <p>4. Con el fin de facilitar a los alumnos la recuperación de las materias con evaluación negativa, las Administraciones educativas regularán las condiciones para que los centros organicen las oportunas pruebas extraordinarias (...).</p> <p>5. Quienes promocionen sin haber superado todas las materias seguirán los programas de refuerzo (...).</p> <p>6. El alumno podrá repetir el mismo curso una sola vez y dos veces como máximo dentro de la etapa. (...).</p> <p>7. En todo caso, las repeticiones se planificarán de manera que las condiciones curriculares se adapten a las necesidades del alumno y estén orientadas a la superación de las dificultades detectadas.</p> <p>8. Los alumnos que al finalizar el cuarto curso de educación secundaria obligatoria no hayan obtenido la titulación establecida en el artículo 31.1 de esta Ley podrán realizar una prueba extraordinaria de las materias que no hayan superado.</p> <p>9. Los alumnos que cursen los programas de diversificación curricular a los que se refiere el artículo 27, serán evaluados de conformidad con los objetivos de la etapa y los criterios de evaluación fijados en cada uno de los respectivos programas.</p> <p>Artículo 29. Evaluación de diagnóstico.</p> <p>Al finalizar el segundo curso de la educación secundaria obligatoria todos los centros realizarán una evaluación de diagnóstico de las competencias básicas alcanzadas por sus alumnos. Esta evaluación (...) tendrá carácter formativo y orientador para los centros e informativo para las familias y para el conjunto de la comunidad educativa. (...).</p>	

<i>Específicos de las Matemáticas</i>
Real Decreto 1631/2006
<p>SEGUNDO CURSO. Criterios de evaluación</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Utilizar números enteros, fracciones, decimales y porcentajes sencillos, sus operaciones y propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria. Se trata de valorar la capacidad de identificar y emplear los números y las operaciones (...). 2. Identificar relaciones de proporcionalidad numérica y geométrica y utilizarlas para resolver problemas en situaciones de la vida cotidiana. Se pretende comprobar la capacidad de identificar, en diferentes contextos, (...). 3. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar, generalizar e incorporar el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado como una herramienta más con la que abordar y resolver problemas. Se pretende comprobar la capacidad de utilizar el lenguaje algebraico (...). 4. Estimar y calcular longitudes, áreas y volúmenes de espacios (...). 5. Interpretar relaciones funcionales sencillas dadas en forma de tabla, gráfica, a través de una expresión algebraica o mediante un enunciado, (...). Este criterio pretende valorar el manejo de los mecanismos que relacionan los distintos tipos de presentación de la información, (...). 6. Formular las preguntas adecuadas para conocer las características de una población y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas, utilizando los métodos estadísticos apropiados y las herramientas informáticas adecuadas. (...). También se pretende valorar la capacidad para utilizar la hoja de cálculo, (...). 7. Utilizar estrategias y técnicas de resolución de problemas, tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error sistemático, la división del problema en partes, así como la comprobación de la coherencia de la solución obtenida, y expresar, utilizando el lenguaje matemático adecuado a su nivel, el procedimiento que se ha seguido en la resolución. Con este criterio se valora la forma de enfrentarse a tareas de resolución de problemas para los que no se dispone de un procedimiento estándar que permita obtener la solución. Se evalúa desde la comprensión del enunciado a partir del análisis de cada una de las partes del texto y la identificación de los aspectos más relevantes, hasta la aplicación de estrategias de resolución, así como el hábito y la destreza necesaria para comprobar la corrección de la solución y su coherencia con el problema planteado. Se trata de evaluar, asimismo, la perseverancia en la búsqueda de soluciones y la confianza en la propia capacidad para lograrlo y valorar la capacidad de transmitir con un lenguaje suficientemente preciso, las ideas y procesos personales desarrollados, de modo que se hagan entender y entiendan a sus compañeros. También se pretende valorar su actitud positiva para realizar esta actividad de contraste.

Fig. 2.10 Criterios evaluación que recogen los cuatro programas curriculares.

Al observar la evaluación recogida en los distintos programas educativos, se percibe un cambio importante en esta componente del currículo, ya que se han especificado y aumentado cada vez más los criterios de evaluación, haciéndose notar en ellos la resolución de problemas. Prueba de ello, son, entre otros, los criterios que valoran la forma de enfrentarse a tareas de resolución de problemas que se recoge en el criterio de evaluación 13 del Real Decreto 1007/1991 o Real Decreto 1345/1991 (LOGSE 1990), exponiendo: *“Utilizar estrategias sencillas, tales como la reorganización de la información de partida, la búsqueda de ejemplos, contraejemplos y casos particulares o los métodos de “ensayo y error” sistemático, en contextos de resolución de problemas”*. Al igual, en el criterio de evaluación 7 presente en el Real Decreto 1631/2006 (LOE 2006), se recoge: *“Utilizar estrategias y técnicas de resolución de problemas, tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error sistemático, la división del problema en partes, así como la comprobación de la coherencia de la solución obtenida, y expresar, utilizando el lenguaje matemático adecuado a su nivel, el procedimiento que se ha seguido en la resolución”*.

En los criterios de evaluación la presencia de las ecuaciones de segundo grado en los cuatros programas es bastante escasa. Sólo el programa de la LOE 2006, es el que las recoge, concretamente en el Real Decreto 1631/2006, incluida en los criterios de

evaluación para el tercer curso: “Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado o de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas”.

2.6 El libro de texto o manual escolar y su misión

Significación del libro de texto

El concepto de libro de texto o manual escolar ha sido definido en más de una ocasión, acentuando cada definición un rasgo determinado.

Para el Diccionario de términos clave de ELE (2014), el libro de texto es “una de las posibles formas que pueden adoptar los materiales curriculares para facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Se trata de un documento impreso concebido para que el docente desarrolle su programa: habitualmente, diseña y organiza de manera precisa la práctica didáctica, esto es, la selección, la secuencia y organización temporal de los contenidos, la elección de los textos de apoyo, el diseño de las actividades y de los ejercicios de evaluación”.

Gómez Alfonso (2009: 22-23) matiza entre libro de texto y manual escolar, puntualizando que con la implantación del sistema público de enseñanza es cuando surge el manual. Según este autor, “un manual es un libro de texto que es utilizado en la Escuela, que es recomendado por los profesores y que nace en respuesta a las necesidades del sistema de enseñanza. Además es un libro de texto que tiene una estructura, un diseño editorial y un sistema de comercialización específico”.

No se debe pasar por alto la definición recogida en el artículo 2 del *Real Decreto 1744/1998, de 31 de julio, sobre uso y supervisión de libros de texto y demás materiales curriculares correspondientes a las enseñanzas de Régimen General*:

Artículo 2. Concepto y clases de materiales curriculares

1. A los efectos de lo dispuesto en este Real Decreto, se entiende por materiales curriculares aquellos libros de texto y otros materiales editados que profesores y alumnos utilicen en los centros docentes públicos y privados para el desarrollo y aplicación del currículo de las enseñanzas de régimen general establecidas por la normativa académica vigente.

2. Se entiende por libro de texto el material impreso, de carácter duradero y autosuficiente, destinado a ser utilizado por los alumnos y que desarrolla, atendiendo a las orientaciones metodológicas y criterios de evaluación correspondientes, los contenidos establecidos por la normativa académica vigente para el área o materia y el ciclo o curso de que en cada caso se trate. Deberán incluir las orientaciones que se consideren necesarias para su utilización personal por el alumno.

4. Entre los otros materiales curriculares a que se hace referencia en el apartado 1 de este artículo, quedan comprendidos tanto los materiales complementarios para uso del alumno como los de apoyo para el profesor.

5. No tendrán el carácter de materiales curriculares aquellos que no desarrollen específicamente el currículo de una materia aunque sirvan de complemento o ayuda didáctica para su enseñanza, como pueden ser diccionarios, atlas, libros de lecturas, medios audiovisuales y otros medios o instrumental científico.

Canals i Roig (1992; cit. en Parcerisa, 1996: 53) señala que los libros de texto deberían cumplir las siguientes características:

- Rigor y actualización de la información.
- Secuencia didáctica y lógica en la presentación de los contenidos y en el uso del lenguaje.
- Máxima adecuación a las características del alumnado y a su vocabulario.
- Buen tratamiento de los valores de una sociedad democrática.
- Planteamiento de actividades que abran nuevos campos de conocimiento y de práctica en el alumnado.
- Presentación de los temas que despierte el interés.
- Ilustración cuidada al servicio de los contenidos.
- Cuidado del diseño, tipología y presentación en general.
- Ofrecimiento de la posibilidad de modificar, escoger y readaptar los materiales.

Con respecto a los orígenes de los libros de texto, Martínez (2006: 1-2) expresa que son la concreción de una pedagogía nacida en la Edad Media, en los monasterios de los jesuitas y salesianos, y que posteriormente, se universalizó por el desarrollo del capitalismo y las revoluciones que condujeron a los estados nacionales entre los siglos XVII y XIX.

Según Cajaraville y Guisande (1999), los libros de texto desempeñan un papel relevante en educación, fueron desde su aparición un medio básico en la enseñanza e “incluso hoy día a pesar de la proliferación de medios posibles a utilizar continúa primando en las escuelas el uso de los libros de texto como material didáctico” (Prendes, 1997). A finales del siglo pasado, ya se veía que en el mundo de la educación aunque “el computador se empezará a convertir en el instrumento popular de ese siglo”, lo era “obviamente después del material escrito, dado que éste mantiene la supremacía en el proceso de enseñanza-aprendizaje” (Escotet, 1992; cit. en Prendes, 1997). Actualmente se continúa con la misma tendencia, lo que lleva a afirmar que los libros de texto son actualmente el material curricular más utilizado en las aulas.

Para reforzar la afirmación anterior se puede destacar como la relevancia de este material es puesta en clara evidencia en estas palabras de Martínez (1992; cit. en Prendes, 1997): “la práctica totalidad del tiempo de trabajo del escolar se realiza sobre o en relación con un tipo específico de material, el libro de texto. Gran parte del trabajo del profesorado en la planificación, desarrollo y evaluación se realiza sobre o en relación con un libro de texto. El mercado editorial mueve todos los años cientos de millones de pesetas en la publicación y venta de libros de texto. Y las familias valoran a menudo lo que se enseña a sus hijos por el avance en el temario del libro de texto”. Además, en el informe Cockcroft (1985: 114), se afirma que “los libros de texto constituyen una ayuda inestimable para el profesor en el trabajo diario del aula”.

Según la *Asociación Nacional de Editores de Libros y material de Enseñanza* (ANELE, 2013: 2) el libro de texto es la principal herramienta de los docentes. El 81,3% de ellos reconocen emplearlo bastante o mucho en su labor diaria. También los padres consideran imprescindible el libro de texto en la educación de sus hijos, tanto en los centros educativos como en el hogar (71,9%). A su juicio, ocupa el primer lugar entre los recursos didácticos más importantes que tienen en el hogar, a mucha distancia del segundo, que es Internet.

Sobre el papel que desempeña el profesor en cuanto al uso de los libros de texto se referencia también en Rico (1990: 22). Para este autor, “el profesor conserva, mantiene y transmite el saber institucionalizado en los manuales, donde aparece seleccionado y adecuadamente estructurado. El libro proporciona seguridad y continuidad en los puntos de vista, (...). Como el libro supone un gran esfuerzo de

síntesis, planificación, estructuración y acomodación de contenidos, por encima de la capacidad del profesor medio, se considera el paradigma del conocimiento que hay que transmitir. (...) El profesor tiene que facilitar a sus alumnos la tarea de asimilar el conocimiento que aparece en el libro de la materia correspondiente, ya que ese ése es el conocimiento oficialmente prescrito en un programa (...)"

El apoyo que le da el libro de texto al profesorado lo resalta Aamotsbakken (2007: 118), asignando una dependencia del uso del libro de texto a la mayoría del profesorado, tanto de educación primaria como secundaria, llegando a ser tan fuerte, que el docente "se aferra al libro". Añade, que esta situación puede generarse por la gran cantidad de tareas que un profesor debe realizar cada día: él o ella debe enseñar y ayudar a los alumnos a resolver problemas prácticos o intelectuales durante el día; debe además, prepararse para el siguiente día de clases, etc. Esta actividad excede el marco de un día normal de trabajo, lo que lleva a que los docentes busquen ideas y soluciones en el libro de texto, ahorrándole mucho tiempo de preparación.

Por tanto, el profesorado a pesar de tener a su disposición diversos recursos y materiales didácticos para facilitar el aprendizaje del alumnado, termina siempre decantándose por el libro de texto. El profesorado se decanta por el uso de este material porque refuerza su trabajo diario, ya que en esos manuales, como muestra González y Macías (2001: 208), se:

- *Resalta lo más importante de los contenidos curriculares.*
- *Refuerza las explicaciones del profesor.*
- *Favorece la comprensión y el recuerdo.*
- *Reduce el tiempo de explicaciones no imprescindibles.*
- *Puede ajustar al ritmo de asimilación de los alumnos.*
- *Pueden utilizar en otras situaciones y no necesariamente escolares.*

Misión del libro de texto

Ortiz de Haro (2002: 16) señala que los libros de texto tienen varias misiones. Por un lado, son depósito de informaciones tanto para el profesorado como para el alumnado, ya que guían o estructuran el proceso de enseñanza-aprendizaje sugiriendo actividades, resaltando informaciones y guiando el proceso de desarrollo de una unidad. Llegan incluso a proponer las actividades de evaluación del alumnado.

Para la Asociación Nacional de Editores de Libros y material de Enseñanza (ANELE, 2013: 2), el libro de texto tiene dos misiones. Por un lado, es una herramienta de aprendizaje y de trabajo en el ámbito de la educación actuando como transmisor del conocimiento y guía de los docentes y alumnado. Pero también es un objeto cultural que plasma una sociedad y su tiempo, reflejando en sus páginas concepciones del mundo que varían a lo largo de la historia.

Zuev (1988; cit. en Borja, 2005: 3-4), atribuyó al manual escolar una serie de funciones didácticas:

- *Informativa*. Presentación de toda la información indicada por el programa de la respectiva asignatura.
- *Transformadora*. Reelaboración didáctica de los contenidos para que sea comprensible por el alumnado.
- *Sistematizadora*. Exposición del contenido del material docente de acuerdo a una secuencia rigurosa sistematizada, para que el estudiante domine los procedimientos de la sistematización científica.
- *De consolidación y de control*. Contribución para que los estudiantes se orienten en el conocimiento adquirido y se apoyen en él para realizar la actividad práctica.
- *De autopreparación*. Fomentar en los estudiantes el deseo de aprender por sí mismos.
- *Integradora*. Ayuda a los estudiantes a asimilar y seleccionar los conocimientos como un todo único.
- *Coordinadora*. Asegura el empleo más efectivo y funcional de todos los medios de enseñanza.
- *Desarrolladora y educadora*. Contribuye a la formación activa de la personalidad armónica y desarrollada.

Para concluir y en forma de síntesis, ya que se empieza este apartado con una definición de libro de texto, teniendo en cuenta lo aquí expuesto, se puede formular la siguiente definición:

El manual o libro escolar es un material curricular impreso, creado intencionadamente para ser usado prioritariamente en las aulas facilitando y enriqueciendo el proceso de enseñanza-aprendizaje del alumnado. Organiza los

conocimientos en lecciones, unidades y/o temas, que se ven complementadas con los ejercicios y problemas.

2.6.1 Características de los manuales escolares de Matemáticas (1953-2006)

El manual escolar ha protagonizado un papel fundamental en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas a los largo de los años. A través de los manuales escolares utilizados para realizar este trabajo de investigación, se muestran las características fundamentales que han presentado en distintas épocas.

En esta investigación, para hacer el análisis del tratamiento de los problemas incluidos en los manuales escolares, se han revisado siete libros de texto de Matemáticas correspondientes a las Leyes de Educación de 1953 (LOEM, Plan 1957), 1970 (LGE), 1990 (LOGSE) y 2006 (LOE). Estos libros están redactados para alumnos de 13-14 años, concretamente para el 4º curso del primer grado del Bachillerato Elemental, 8º curso de EGB y 2º curso de ESO.

En la siguiente tabla se sintetizan las principales características bibliográficas de cada uno de los manuales seleccionados y la época a la que corresponde:

Curso	Título	Autor	Editorial	Año	Páginas	Dimensiones en cm.
1ª Época: LOEM 1953						
4º curso del primer grado de Bachillerato Elemental	<i>Matemáticas cuarto curso</i>	Constantino Marcos, Jacinto Martínez Ugartemendía.	SM	1965	238	21 x 15,5
4º curso del primer grado de Bachillerato Elemental	<i>Matemáticas cuarto curso</i>	Editorial Luis Vives [Edelvives]	Luis Vives	1965	233	21 x 16
2ª Época: LGE 1970						
8º EGB	<i>Matemáticas 8º E.G.B.: Guía didáctica</i>	Carmen Vázquez, José Caruncho, María Gutiérrez.	Santillana	1978	395	26 x 19
8º EGB	<i>Matemáticas 8º E.G.B.</i>	Leandro Jiménez Garcés, Antonio González Castillo	Anaya	1979	304	26 x 19
3ª Época: LOGSE 1990						
2º ESO	<i>Matemáticas 2º: Secundaria</i>	José A. Almodóvar, Pilar García, José Gil, Andrés Nortés Checa.	Santillana	1997	256	29 x 21

4ª Época: LOE 2006						
2º ESO	<i>Matemáticas 2: Educación Secundaria</i>	J. Colera, I. Gaztelu	Anaya	2008	255	29 x 23
2º ESO	<i>Matemáticas, 2 Secundaria: ábaco : [proyecto SM Secundaria]</i>	José R. Vizmanos, Máximo Anzola, Javier Barqueño, Javier Peralta.	SM	2008	271	30 x 22

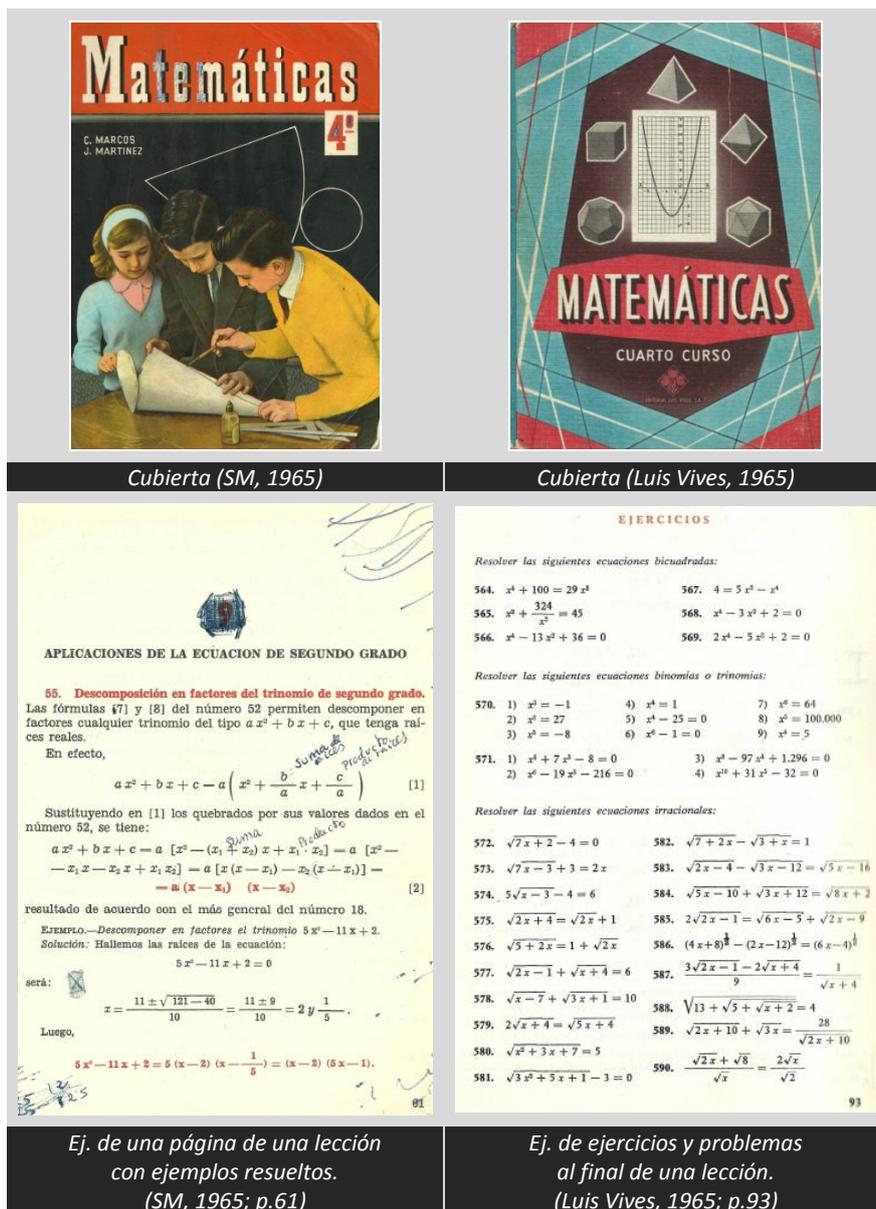
Fig. 2.11 Características bibliográficas de los manuales escolares analizados.

De la tabla anterior, es interesante resaltar las diferencias que se aprecian entre los manuales analizados, con respecto a los autores, las páginas y el tamaño que presentan. En la primera época, existen libros que carecen de autor personal y el número de páginas y tamaño es inferior a los del resto de épocas. Es decir, en las demás, los libros presentan características bibliográficas más uniformes, aunque también se aprecian ciertas diferencias aunque menos pronunciadas. Se aprecia, sobre todo, conforme se avanza en las épocas un aumento del tamaño del libro y los títulos se redactan de forma más completa, llegando a tener varios subtítulos.

A continuación, se hace un breve análisis de cada uno de los manuales escolares revisados, mostrando las características principales y generales de la organización del contenido que poseen en cada una de las épocas analizadas.

Primera época: LOEM 1953 (Plan 1957)

Los libros de esta primera época se organizan por *lecciones*. A lo largo de cada lección se imparte una o varias nociones sobre un tema con ejemplos resueltos. La mayoría de los ejemplos resueltos van en letra más pequeña, distinguiéndose del resto del texto. Los ejercicios y problemas propuestos se incorporan al final de cada lección, con el fin de perfeccionar la teoría aprendida antes de pasar a la siguiente.



Cubierta (SM, 1965)

Cubierta (Luis Vives, 1965)

APLICACIONES DE LA ECUACION DE SEGUNDO GRADO

55. **Descomposición en factores del trinomio de segundo grado.** Las fórmulas [7] y [8] del número 52 permiten descomponer en factores cualquier trinomio del tipo $ax^2 + bx + c$, que tenga raíces reales.

En efecto,

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \quad [1]$$

Sustituyendo en [1] los quebrados por sus valores dados en el número 52, se tiene:

$$ax^2 + bx + c = a [x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2] = a [x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2] = a [(x - x_1)(x - x_2)] \quad [2]$$

resultado de acuerdo con el más general del número 18.

Ejem. — Descomponer en factores el trinomio $5x^2 - 11x + 2$.

Solución: Hallemos las raíces de la ecuación:

$$5x^2 - 11x + 2 = 0$$

será:

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 40}}{10} = \frac{11 \pm 9}{10} = 2y \frac{1}{5}$$

Luego,

$$5x^2 - 11x + 2 = 5(x - 2)(x - \frac{1}{5}) = (x - 2)(5x - 1)$$

Ej. de una página de una lección con ejemplos resueltos. (SM, 1965; p.61)

EJERCICIOS

Resolver las siguientes ecuaciones bicuadradas:

- 564. $x^4 + 100 = 29x^2$
- 565. $x^4 + \frac{324}{x^2} = 45$
- 566. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
- 567. $4 = 5x^2 - x^4$
- 568. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$
- 569. $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$

Resolver las siguientes ecuaciones binomias o trinomias:

- 570. 1) $x^2 = -1$ 4) $x^4 = 1$ 7) $x^6 = 64$
- 2) $x^2 = 27$ 5) $x^4 - 25 = 0$ 8) $x^6 = 100,000$
- 3) $x^2 = -8$ 6) $x^6 - 1 = 0$ 9) $x^6 = 5$
- 571. 1) $x^4 + 7x^2 - 8 = 0$ 3) $x^4 - 97x^2 + 1,296 = 0$
- 2) $x^6 - 19x^3 - 216 = 0$ 4) $x^6 + 31x^2 - 32 = 0$

Resolver las siguientes ecuaciones irracionales:

- 572. $\sqrt{7x+2} - 4 = 0$
- 573. $\sqrt{7x-3} + 3 = 2x$
- 574. $5\sqrt{x-3} - 4 = 6$
- 575. $\sqrt{2x+4} = \sqrt{2x} + 1$
- 576. $\sqrt{5+2x} = 1 + \sqrt{2x}$
- 577. $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+4} = 6$
- 578. $\sqrt{x-7} + \sqrt{3x+1} = 10$
- 579. $2\sqrt{x+4} = \sqrt{5x+4}$
- 580. $\sqrt{x^2+3x+7} = 5$
- 581. $\sqrt{3x^2+5x+1} - 3 = 0$
- 582. $\sqrt{7+2x} - \sqrt{3+x} = 1$
- 583. $\sqrt{2x-4} - \sqrt{3x-12} = \sqrt{5x-16}$
- 584. $\sqrt{5x-10} + \sqrt{3x+12} = \sqrt{8x+2}$
- 585. $2\sqrt{2x-1} = \sqrt{6x-5} + \sqrt{2x-9}$
- 586. $(4x+8)^{\frac{1}{2}} - (2x-12)^{\frac{1}{2}} = (6x-4)^{\frac{1}{2}}$
- 587. $\frac{3\sqrt{2x-1} - 2\sqrt{x+4}}{9} = \frac{1}{\sqrt{x+4}}$
- 588. $\sqrt{13+\sqrt{5+\sqrt{x+2}}} = 4$
- 589. $\sqrt{2x+10} + \sqrt{3x} = \frac{28}{\sqrt{2x+10}}$
- 590. $\frac{\sqrt{2x+\sqrt{8}}}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2}}$

Ej. de ejercicios y problemas al final de una lección. (Luis Vives, 1965; p.93)

Fig. 2.12 Manuales escolares de 4º curso de Bachillerato Elemental.

Matemáticas cuarto curso, SM (1965):

Se estructura en dos bloques bien diferenciados Álgebra y Geometría Espacial. En ambos bloques se alternan las definiciones sobre los contenidos matemáticos con los ejemplos matemáticos o a través de dibujos.

El primer bloque está compuesto de once temas que aborda desde las operaciones racionales con expresiones enteras, hasta los sistemas de ecuaciones y representación gráfica de trinomio de segundo grado. Destacar que predominan los ejemplos matemáticos, existiendo pocos con dibujos. Deja para el final de cada tema la realización de ejercicios y problemas.

El segundo bloque se organiza en dieciséis temas comenzando por el plano y terminando con el movimiento de la Tierra. A lo largo de los temas se compaginan las definiciones con ejemplos, principalmente a través de dibujos y con la vida cotidiana. Al final de cada tema se procede a la realización de ejercicios y problemas.

Matemáticas cuarto curso, Luis Vives (1965):

Se compone de dos bloques de contenido, uno perteneciente a Álgebra y otro a la Geometría del Espacio. En ambos bloques se compaginan las definiciones teóricas correspondiente a los diferentes contenidos desarrollados y los ejemplos matemáticos, que permiten comprender las definiciones.

El primer bloque está compuesto por once temas, empezando con las operaciones con polinomios y finalizando con las ecuaciones y sistema de ecuaciones. Se aprecia un predominio de los ejemplos matemáticos. La realización de ejercicios y problemas es delegada al final de cada tema.

El segundo bloque se estructura en diecinueve temas, comienza por el plano pasando a profundizar en la geometría espacial y terminando con el movimiento de la Tierra. Destacar que predominan los ejemplos con dibujos. Aborda al final de cada tema los ejercicios, cuestiones y problemas.

Segunda época: LGE 1970

Los manuales escolares de la LGE finalizan con la división en *lecciones* y la sustituyen por *unidades* que constan de varios temas. En algunos manuales, los ejemplos que acompañan las explicaciones de conceptos se complementan con la propuesta de ejercicios para que practique el alumnado, aunque al final de la unidad es donde aparece el listado completo de ejercicios y problemas planteados. La distinción de los ejemplos en el texto se realiza incluyendo el término *ejemplo* de otro color (rojo) o aplicándole el formato de cursiva. También, algunos incluyen al final de cada unidad una visión global de la misma en forma de resumen, donde quedan reflejados los contenidos fundamentales que la integran.

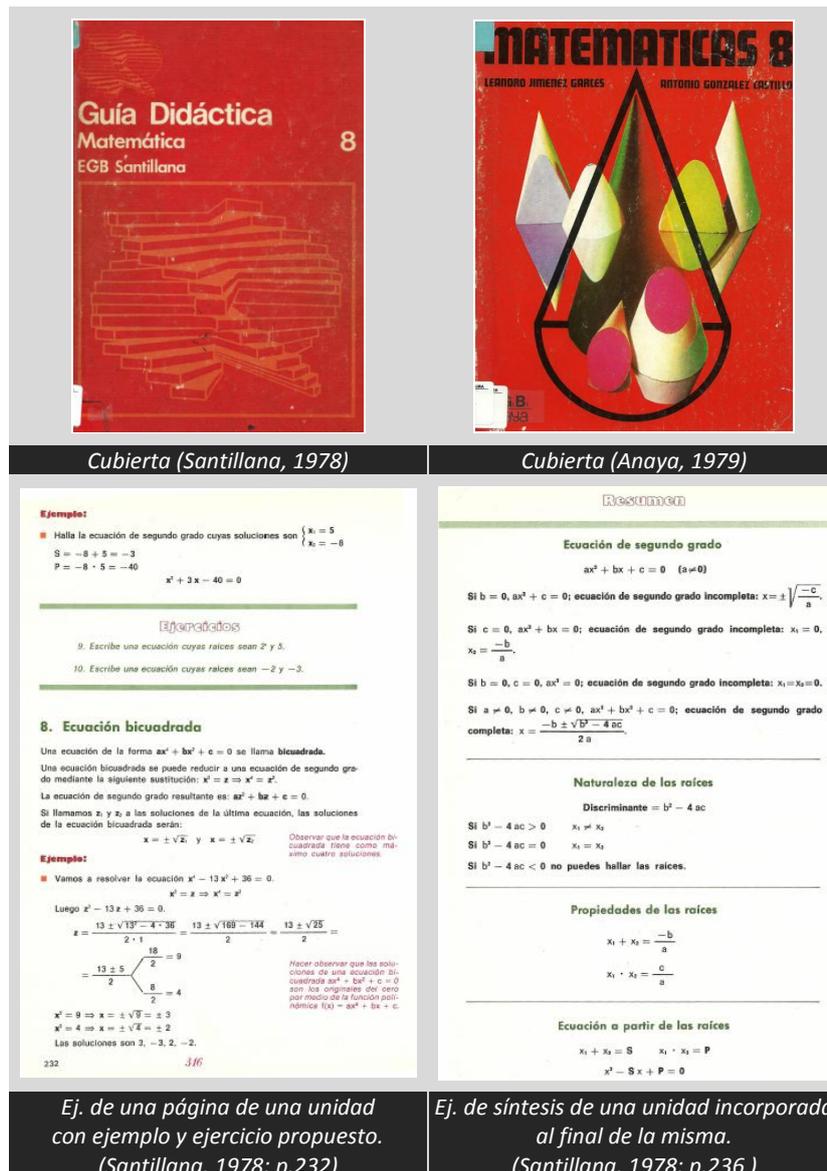


Fig. 2.13 Manuales escolares de 8º de EGB.

Matemáticas 8º EGB: Guía didáctica, Santillana (1978):

Se organiza en cuatro bloques o unidades temáticas, donde se abordan diferentes contenidos, conviviendo las aportaciones teóricas con los ejemplos matemáticos, dibujos y representaciones. A lo largo de cada tema se realizan ejercicios, concluyendo el tema con un resumen final y una actividad de aplicación con ejercicios y problemas en relación a los contenidos abordados.

El primer bloque o unidad se centra en los Conjuntos, desarrollándose en dos temas. Predominan los ejemplos a través de dibujos y los ejercicios.

El segundo bloque corresponde a los Número Racionales, se compone de cinco temas donde se desarrolla la construcción de los Números Racionales a través de la Teoría de Conjunto. Predominan los ejercicios.

El tercer bloque es el de los polinomios, está formado por cuatro temas, abordando incluso el Anillo de polinomios. Predominan los ejemplos matemáticos y los ejercicios.

Finalmente, el cuarto bloque está enfocado a las Ecuaciones, se estructura en cinco temas, donde se desarrollan las ecuaciones en \mathbb{Q} , complementándose con problemas resueltos.

Matemáticas 8º EGB, Anaya (1979):

Se compone de treinta temas comenzando por la construcción numérica desde la Teoría de Conjuntos, centrándose finalmente en el Álgebra. En todos los temas se alternan la incorporación de definiciones teóricas con ejemplos matemáticos y dibujos, dejando la realización de ejercicios para la parte final de cada tema.

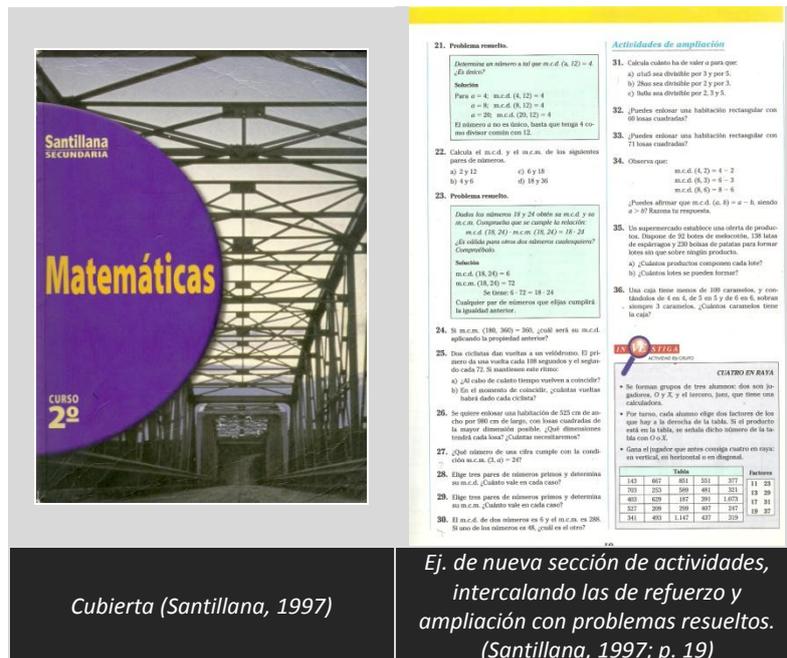
En los primeros catorce temas se procede a la definición y construcción del Conjunto de números enteros y racional. Predominan al final de cada tema los ejercicios sobre los problemas.

Los siguientes dieciséis temas corresponden al Álgebra, comenzando con las Ecuaciones de primer grado, Polinomios, Sistema de ecuaciones y las Ecuaciones de segundo grado, finalizando con la Parábola e Hipérbola. Destacar que al final de cada tema predominan los problemas sobre los ejercicios.

Tercera época: LOGSE 1990

Los manuales de esta época empiezan a reservar sus primeras páginas a mostrar un esquema explicativo de una unidad, dando a conocer de forma detallada cada una de las partes de las que consta. Las actividades que incluye, son de dos tipos: actividades a pie de página, que junto con los ejemplos que intercala, sirven para consolidar los conocimientos adquiridos en la unidad, y actividades al final de la misma. En estos manuales, se comprueba lo que afirma Gómez Alfonso (2000: 4) cuando dice que los manuales de la LOGSE reemplazan la página de problemas que se ponía al final de cada

tema por una nueva sección de *Actividades*, con un sentido diferente al tradicional de método, “son una agrupación de ejercicios para entrenarse, problemas para resolver, problemas resueltos, cuestiones o preguntas para aclararse”. Añade, que en estas actividades es donde se considera la resolución de problemas como contenido, “ya que lo que se busca es la reflexión sobre las estrategias comunes, sobre las fases de la resolución, sobre las formas de argumentar”. Además, se empieza a observar un mayor uso del color y de las imágenes que contextualizan la teoría, ejemplos, y actividades, ayudando a clarificar y fijar conceptos.



Cubierta (Santillana, 1997)

Ej. de nueva sección de actividades, intercalando las de refuerzo y ampliación con problemas resueltos. (Santillana, 1997; p. 19)

Fig. 2.14 Manual escolar de 2º de la ESO.

Matemáticas 2º: Secundaria, Santillana (1997):

Se compone de cinco bloques, divididos cada uno de ellos en diferentes temas hasta completar un total de quince. Todos los temas o unidades didácticas comienzan haciendo una introducción de los contenidos a desarrollar y su relación con la vida cotidiana, estableciendo una serie de cuestiones en relación al enunciado. En cada tema se alternan las definiciones teóricas con los ejemplos matemáticos y dibujos. Al finalizar cada contenido a desarrollar se establecen una serie de ejercicios relacionados con el mismo. Al final de cada unidad didáctica hay un banco de actividades y problemas propuestos.

También destacar que todos los temas concluyen con curiosidades de la vida cotidiana relacionadas con las Matemáticas, así como los pasos a seguir a la hora de resolver un problema, mostrando un problema resuelto y proponiendo dos similares.

El primer bloque corresponde a la Aritmética, se estructura en cinco temas, donde se procede a la construcción numérica de números naturales, enteros, fracciones, números decimales, así como potencias y raíces cuadradas, se alternan ejemplos matemáticos con ejemplos a través de dibujos. Predominan los ejercicios sobre los problemas.

El segundo bloque centrado en el Álgebra está formado por tres temas, donde se muestran una iniciación al álgebra, así como a la resolución de ecuaciones de primer grado y proporcionalidad numérica. Predominan los problemas sobre los ejercicios.

En el tercer bloque se aborda la Geometría, está organizado en cinco temas, comenzando con figuras planas para continuar con cuerpos geométricos en el espacio. Predominan los ejemplos a través de dibujos y los problemas sobre los ejercicios.

En el cuarto bloque trata el Análisis, está constituido por un tema donde se procede a la interpretación de gráficas lineales. Predominan los ejercicios sobre los problemas.

El quinto bloque está dedicado a la Estadística y la Probabilidad, con un solo tema donde predominan los ejercicios sobre los problemas.

Cuarta época: LOE 2006

En esta época los manuales escolares comienzan a “estar vivos”, incorporando un CD-ROM para ampliar la información recogida en el impreso y otros ofrecen, mediante la inserción de un código, una extensión del manual escolar en Internet. En estos manuales aumenta el número de actividades que se incluyen a pie de página, intercalando ejemplos y ejercicios resueltos. Las actividades al final de la unidad se refuerzan con la incorporación nueva de la *autoevaluación*, con ejercicios y problemas propuestos para que los trabaje el alumnado. Todas las actividades que se proponen en estos manuales especifican su grado de dificultad en tres niveles, sencillo, medio y difícil, distinguiéndolos de una forma característica, como por ejemplo marcando cada

nivel con un color diferente. Además, al finalizar cada unidad se incluyen unas páginas donde se pueden encontrar lecturas, artículos de investigación, juegos de ingenio, consejos o informaciones para reforzar algunas competencias básicas adquiridas a lo largo de los estudios.

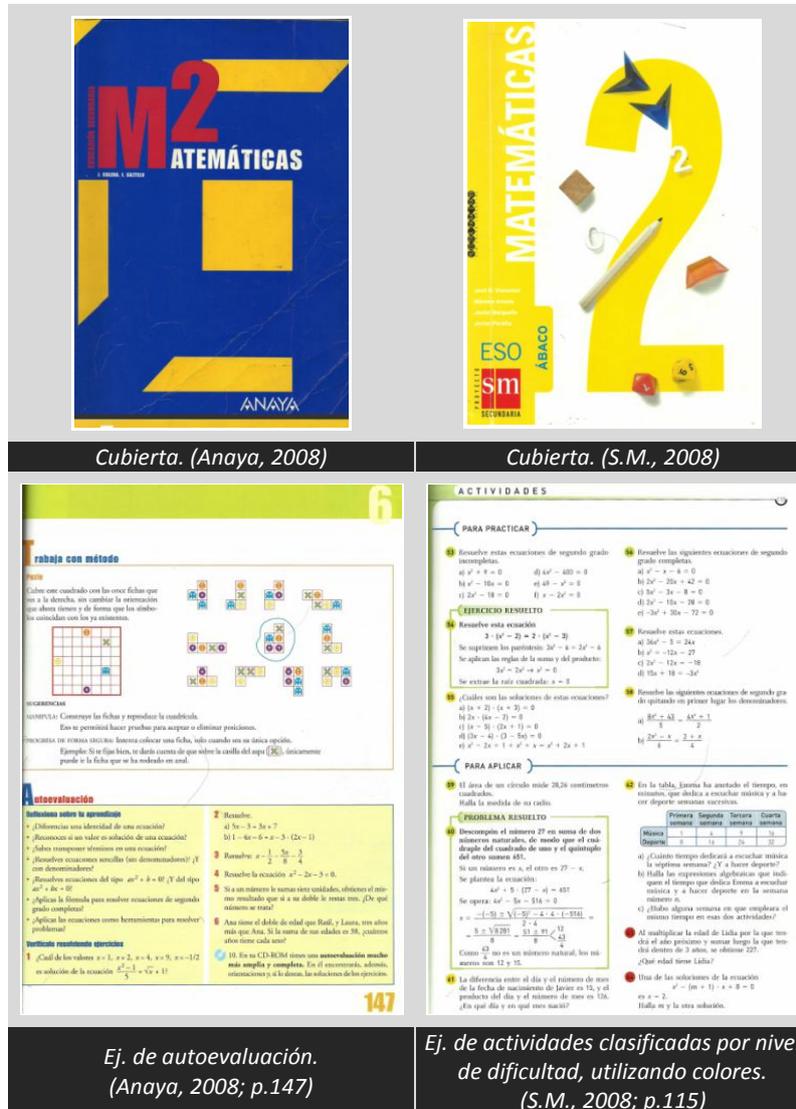


Fig. 2.15 Manuales escolares de 2º de la ESO.

Matemáticas 2: Educación Secundaria, Anaya (2008):

Abre con un tema dedicado a la resolución de problemas, estableciendo los pasos a seguir y posteriormente proponiendo diferentes problemas. A continuación desarrolla doce temas o unidades didácticas, comenzando cada una con una representación visual de algún dibujo de la vida cotidiana relacionada con el tema en cuestión, así como un repaso de conocimientos previos. A lo largo de las diferentes unidades didácticas se alternan las definiciones teóricas, los ejemplos matemáticos y los dibujos, así como los ejercicios. Al finalizar cada tema aparece un listado con ejercicios

y problemas en relación al mismo. También destacan curiosidades, así como problemas de Matemáticas recreativas y una autoevaluación. Todos los conocimientos se pueden ampliar con un CD-ROM que incluye el libro.

Las cuatro primeras unidades corresponden a los sistemas de numeración entero, decimal y fracciones, así como proporcionalidad. Predominan los ejercicios.

Las tres siguientes unidades se centran en el Álgebra, abordando ecuaciones y sistema de ecuaciones. Sobresalen los problemas sobre los ejercicios.

Las tres sucesivas unidades muestran la Geometría, abordando desde la geometría plana hasta la geometría espacial. Destacan los ejemplos con dibujos.

La unidad once está dedicada a la Función. Predominan los ejemplos con dibujos.

La unidad doce aborda la Estadística. Abundan los ejemplos con dibujos.

Matemáticas, 2 Secundaria: ábaco: [proyecto SM Secundaria], SM (2008):

Se compone de cuatro bloques, divididos cada uno de ellos en temas hasta completar un total de quince. Cada uno de los temas o unidades didácticas, comienzan con una fotografía de la vida cotidiana y el planteamiento de una situación relacionada con dicha fotografía y con los contenidos que vamos a desarrollar. Además, incluye un apartado de “Recuerda” mostrando las herramientas que se van a utilizar. A lo largo de los temas se alternan las definiciones teóricas con ejemplos y dibujos. Tras desarrollar un contenido se exponen una serie de ejercicios y actividades complementarias con problemas, algunos resueltos. Al final del tema se plantea y resuelve un problema de la vida cotidiana, y se muestra un resumen con lo más importante, para reforzar los contenidos. A continuación, hay un banco de ejercicios y problemas concluyendo con una autoevaluación y algunos problemas de Matemática recreativa.

El primer bloque se centra en la Aritmética, está organizado por seis temas donde se procede con los sistemas numéricos. Predominan los ejercicios sobre los problemas.

El segundo bloque corresponde al Álgebra, está formado por tres temas, se aborda el lenguaje algebraico, ecuaciones de primer y segundo grado, así como sistema de ecuaciones y proporcionalidad. Predominan los problemas sobre los ejercicios.

En el tercer bloque se aborda la Geometría y Medida, se estructura en cuatro temas donde se parte de las medidas, para después abordar el plano, en especial el triángulo y para concluir la geometría espacial. Predominan los ejemplos con dibujos y los problemas sobre los ejercicios.

El cuarto bloque está dedicado a las Funciones y Estadística, se compone de dos temas comenzando con la representación de funciones directas e inversas y concluyendo con la estadística y un poco de proporcionalidad. Predominan los ejemplos con dibujos y abundan más los ejercicios que los problemas.

Como síntesis, se puede afirmar que a lo largo de los años el manual escolar de Matemáticas ha experimentado una transformación tanto en el contenido como en el continente. Prueba de ello, es su aspecto físico, aumentando su número de páginas y las dimensiones. Lo que permite introducir nuevas secciones, como la inclusión en las primeras páginas de la detallada descripción de las unidades del manual. Además, la organización del contenido abandona la división en *lecciones* dejando paso a unas *unidades* temáticas más completas, ayudando a fijar los conocimientos en el alumno y a reforzar las competencias básicas. Al igual, se intensifica cada vez más el uso del color y de las imágenes. Finalmente, en la última época, como hemos visto, se aprecia la introducción de las Nuevas Tecnologías en los manuales escolares, permitiendo ampliar su contenido bien a través del CD-ROM que se adjunta en el propio manual o bien a través de una página de Internet.

2.7 Análisis de los modelos de valoración de textos escolares

De los apartados anteriores se puede deducir que el principal material didáctico que utilizan los profesores en la planificación de su trabajo diario en el aula es el libro de texto o manual escolar. La consideración del libro de texto, como recurso didáctico para el docente, se plasma en el conjunto de investigaciones que en torno a él se han llevado a cabo. Por ello, en este apartado, se muestra una visión general sobre las investigaciones realizadas en el campo del análisis de los libros de texto, diferenciando

entre trabajos que se centran en modelos de valoración de carácter general aplicables a cualquier área, y estudios más concretos planteados para la valoración de libros de texto del área de Matemáticas.

Propuestas de modelos de valoración para el análisis del libro de texto en general

Para el análisis de los manuales escolares en general han sido propuestos diferentes modelos de valoración, una muestra de ellos se recogen a continuación. Sin embargo, hay que tener en cuenta, que no es tarea fácil, prueba de ello es la respuesta dada por Richaudeau (1981) cuando la UNESCO le encargó un estudio para elaborar una guía práctica para la creación y producción de manuales escolares en general. Este autor llegó a considerar "difícil -o imposible- concebir un mismo cuestionario que permita calificar a la vez un manual de historia y un manual de matemáticas, un curso tradicional y un curso programado" (Richaudeau, 1981; cit. en Prendes, 2001).

Bernad Mainar (1979; cit. en Prendes, 2001) sugiere una guía para la valoración de manuales escolares en general. Realizó una encuesta a 25 centros escolares, comprobando que la mayoría del profesorado consideraba difícil la tarea de seleccionar los manuales. Los criterios de evaluación, en su opinión, deben ser "objetivos", "flexibles" ("los generales se han de aplicar a cualquier texto, pero habrá una serie de criterios específicos adaptables en función de las materias") y "operables" ("expresados en normas concretas de aplicación"). Proponiendo los siguientes criterios básicos de análisis: *postulados educativos generales, programación del proceso de aprendizaje y cumplimiento de la normativa legal vigente*. Según Prendes (2001), esta guía es aceptable como trabajo teórico, sin embargo, es poco útil para ser utilizada por el profesorado, ya que su uso requiere un estudio previo de los conceptos y principios que rigen su aplicación.

Martínez (1992) para la evaluación del material curricular presenta un instrumento práctico. Se trata de un *esquema-cuestionario* que ayuda a analizar y elegir el material curricular con un criterio de cambio y de renovación. El propio autor indica que "el instrumento que se ofrece tiene la función de favorecer la discusión, y esto en diferentes planos. Por un lado el esquema-cuestionario nos ayuda a interrogar al material, buscando su potencial pedagógico más allá de lo meramente técnico. Por otro lado, nos ayuda a interrogarnos a nosotros mismos respecto a las estrategias didácticas que podemos poner en funcionamiento con el material. Finalmente, ayuda al debate

profesional en el equipo docente –ya sea de seminario, de ciclo, o cualquier otro agrupamiento en el centro–”.

Parcerisa (1996), para la valoración de los materiales curriculares utiliza un instrumento basado en una serie de cuestiones, planteadas en forma de afirmaciones, respecto a las que se debe valorar el grado de certeza o falsedad dependiendo del material que se analice. “Se trata de un instrumento de análisis cualitativo aunque, para simplificar su uso, se cuenta con la ayuda de una escala valorativa simple. En todo caso, si se deseara reconvertir el instrumento en cuantitativo, se podría ponderar el valor de cada ítem y sumar o multiplicar el valor asignado por la puntuación otorgada al ítem”. Se trata de un análisis en un primer momento cualitativo pero, posteriormente, puede interpretarse cuantitativamente simplificando el análisis numérico final para cada uno de los manuales escolares valorados. Su diseño permite extraer conclusiones globales de manera “relativamente fácil y rápido”.

Prendes (2001) muestra un modelo de valoración de textos escolares, conseguido sintetizando las aportaciones de distintos autores. Se trata de una plantilla de evaluación que recoge en forma de ítems los diferentes aspectos básicos que se tendrían que considerar para la evaluación de los manuales escolares. Estos aspectos son:

1. *Formato del libro*: encuadernación (solidez); manejabilidad (tamaño); costo; estructura interna (compaginación).
2. *Análisis de contenidos*: información; texto; Ilustraciones; ejercicios y actividades; índices, sumarios, síntesis, organizadores previos.
3. *Aspectos generales*: Análisis ideológico/axiológico (currículum oculto); carácter abierto o cerrado (flexibilidad de uso); modelo de enseñanza; recursos motivadores (conectar con los intereses del alumno o utilizar recursos específicos de motivación didáctica como sorpresas, adivinanzas, humor, cómics,...); guía del profesor (orientaciones didácticas).

Al analizar estos modelos de valoración se puede concluir que todos tienen posiciones diferentes, algunos llevan a cabo estudios bastante minuciosos frente a otros que se centran en aspectos de carácter más generales, cuyo estudio se puede realizar desde diferentes perspectivas. Además, se comprueba que en las investigaciones se han empleado para su desarrollo análisis tanto de tipo cuantitativo como cualitativos.

Muestra de ello, entre otros, son los trabajos de Parcerisa (1996) y de Martínez (1992), respectivamente.

Modelos de valoración para el análisis del libro de texto de Matemáticas

Hay bastantes estudios con respecto a la valoración de los libros de texto del área de Matemáticas. En este apartado se analiza una muestra de ellos, con el fin de extraer los métodos y aspectos necesarios que sirvan de apoyo para el desarrollo de esta investigación.

Con respecto a la valoración de textos de Matemáticas, Vea Muniesa (1995: 37) resalta, “la importancia que el estudio de los libros de texto tiene para el conocimiento específico, interno y formal de la educación matemática impartida en cada momento, no sólo en cuanto a los contenidos y su ordenación, sino en cuanto a métodos de exposición, orientaciones pedagógicas, carácter teórico-práctico, lenguaje matemático utilizado, predominio de unos contenidos sobre otros, y tantos otros parámetros que nos descubre la observación de cualquier obra impresa”.

Entre las investigaciones que se han realizado en torno al libro escolar de Matemáticas, a continuación se recoge una muestra de ellas, que tratan los siguientes aspectos:

- Lenguaje matemático y la organización y estructura del contenido.
- Coherencia con el contenido curricular.
- Ejercicios y problemas.
- Instrumentos de valoración.

Lenguaje matemático y la organización y estructura del contenido:

Cuando se trabaja con los libros de textos matemáticos al leer su contenido se necesitan en ciertas ocasiones técnicas de lectura especializadas para su interpretación. Por ello, existen estudios sobre el lenguaje matemático empleado en los libros de texto. Como el trabajo realizado por Konior (1993), que tras analizar las estructuras de varios cientos de textos matemáticos, propone que los estudiantes de textos matemáticos deben de ser formados en estas técnicas de lectura especializadas para sacar el máximo provecho a dichas lecturas.

En el trabajo de Ortiz de Haro, Batanero y Serrano (2001) se analiza el lenguaje específico, que en torno al azar y la probabilidad se presenta en los libros de texto. Realizan un estudio empírico de los términos y expresiones en dos libros de primer curso del Bachillerato Unificado Polivalente. En este estudio se pone de manifiesto la importancia que tiene el lenguaje en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, y concretamente el lenguaje empleado en las nociones de experimento aleatorio y de probabilidad.

Azcárate y Serradó (2006) en su trabajo se centran en la organización y estructura del contenido de los libros de texto de Matemáticas para la ESO. Estudian las unidades didácticas que tratan sobre el tratamiento del azar de los libros de texto de cuatro editoriales (Bruño, Santillana, Guadiel y McGraw-Hill), correspondiente a los cuatro años de ESO (1º ciclo: 1º y 2º curso de ESO; 2º ciclo: 3º y 4º de ESO; en 4º se diferencian los dos niveles A y B). El estudio se centra en analizar la presentación, el desarrollo y el cierre de las unidades didácticas. Primero analiza los objetivos, contenidos y las actividades previas que recogen las unidades. Posteriormente, estudia las formas de organización y secuenciación de los contenidos y la estructura del discurso. Por último, se centran en el análisis del resumen final de la unidad y de las actividades finales que se incluyen como refuerzo y evaluación de los contenidos aprendidos. El método de investigación empleado para analizar los libros de texto es un análisis de contenido tanto exploratorio como descriptivo. Entre las conclusiones, destacan cómo las distintas editoriales fomentan diferentes formas de organización y secuenciación de contenidos y de actividades.

Coherencia con el contenido curricular:

La reciprocidad entre lo que recogen los libros de texto y el currículo marcado por las distintas normativas oficiales han sido objeto de estudio de algunos trabajos de investigación. Prueba de ello, es el realizado por McGinty y cols. (1986; cit. en Ortiz de Haro, 2002: 19-20). Estos autores se cuestionaron si los libros de texto de Matemáticas plasmaban lo que se planteaba en el currículo de su país: Estados Unidos. Sin embargo, los libros de texto estudiados por McGinty y cols., recomendaban todo lo contrario. Por otra parte, para la mejora de los problemas recogidos en los libros de texto, estos autores sugieren reducir las páginas destinadas a ejercicios repetitivos, ampliando las aplicaciones, y la cantidad y calidad de las situaciones de resolución de problemas.

Proponen realzar los problemas verbales, alcanzando así que los alumnos sean buenos lectores de problemas matemáticos.

García y Guillén (2008) analizan la presencia de distintos contenidos del currículo en los libros de texto. Concretamente, analizan los textos de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) editados para la Comunidad Valenciana centrandose la atención en la geometría. Para su análisis, aprovechan la reforma realizada en el currículo de Secundaria, introducida con el cambio en el plan de estudios de la LOGSE a la LOE. Se proponen determinar, por una parte, las características generales de las unidades didácticas, como la estructura, la presencia de ejemplos o actividades para introducir los temas transversales, la presencia de las nuevas tecnologías y el estudio de las ilustraciones e imágenes; y por otra, se fijan en las competencias específicas que se favorecen con el desarrollo de las actividades propuestas. Esta investigación es tanto de carácter descriptivo cualitativo como cuantitativo, según el criterio que se esté estudiando en ese momento.

Ejercicios y problemas:

Cerdán y Puig (1983) analizaron desde diferentes puntos de vistas los problemas de Matemáticas en el currículo de EGB, concretamente los dirigidos a los alumnos entre 8 y 11 años de edad. Se trata de un estudio cuantitativo-descriptivo desde el punto de vista de su potencial heurístico. Los objetivos fundamentales de este trabajo eran: “Primero, estudiar la distribución del número de problemas que se proponen en el ciclo medio según cursos y tipos de problemas (...). Segundo, estudiar la distribución por temas y cursos de cada uno de estos tipos de problemas. Tercero, identificar las herramientas heurísticas implícitamente contenidas en los problemas, así como su distribución por temas”.

En el trabajo de Pino y Blanco (2008) se analizan los problemas que se proponen en los libros de texto de Matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad, de la Comunidad Autónoma de Extremadura y de Chile, en relación con los contenidos de proporcionalidad y teniendo en cuenta los marcos curriculares correspondientes. Para ello, se analizan 8 libros de texto de Matemáticas (cuatro de Chile y cuatro de España). Se describen y analizan los libros de texto en relación a la resolución de problemas de proporcionalidad numérica, utilizando para ello una serie de categorías: *tipos de problemas, el soporte, el contexto, la tarea matemática, y las heurísticas*. Además, se

analiza la coherencia entre lo que marcan los currículos y lo que plantea la teoría, con el contenido de los libros de texto. Esta investigación se inscribe en el paradigma cualitativo de investigación y el método que se utiliza es el análisis de contenido.

Indicar que, esta investigación y la anterior, tienen cierta similitud con el trabajo que aquí se presenta, a excepción que ésta se centra en el estudio de las ecuaciones de segundo grado.

En el campo de la probabilidad hay que destacar el estudio de Ortiz de Haro, Batanero y Serrano (1996). En su trabajo se analiza la muestra del concepto de frecuencia relativa en 11 textos de Primer Curso de Bachillerato publicados durante el período 1975-1991. Se detallan aspectos para la exposición del tema en futuros libros de texto y para la acción didáctica en el aula de Matemáticas. En primer lugar, hacen una distinción del tipo de tratamiento que en los libros se da del tema de estudio, pudiendo estar explícito, implícito o no tratarse. Su análisis se basa en el modelo teórico que se ofrece en Godino y Batanero (1994), en el cual se postula “que la génesis de los conocimientos del sujeto tiene lugar como consecuencia de su interacción con situaciones-problemas, mediatizada por los contextos institucionales en los que desarrolla su actividad”.

Otro trabajo interesante dentro de este campo es el realizado por Gea, Batanero, Arteaga y Cañadas (2013) sobre las justificaciones usadas en el tema de correlación y regresión. Trabajan con una muestra de dieciséis libros de texto españoles de Bachillerato de las dos especialidades en que se incluye el tema. Siguen el mismo método utilizado en la investigación de Cobo y Batanero (2004), que se desarrolla en los siguientes puntos:

- 1. Seleccionados los libros, y el capítulo correspondiente a la correlación y regresión, se efectuaron varias lecturas cuidadosamente, para determinar los párrafos que constituirían la primera unidad de análisis.*
- 2. Mediante un proceso cíclico e inductivo se analizaron las justificaciones utilizada en dichos párrafos, que constituirían nuestras unidades secundarias de análisis.*
- 3. Seguidamente se categorizan estas justificaciones siguiendo la clasificación propuesta por Recio (2002), quien realiza una revisión de los estudios más importantes relacionados con el tema de la demostración.*

4. Se elaboran tablas indicando la presencia o ausencia de cada tipo de justificación en los textos, con el fin de resumir los resultados.

A continuación se describen los resultados del análisis; se comienza describiendo las características de los diferentes tipos de justificación encontrados y posteriormente se realiza una síntesis y discusión de la presencia de los diferentes tipos de justificaciones en los textos, comparando los de las dos modalidades de Bachillerato. Se finaliza con algunas implicaciones para la docencia y la investigación.

Por tanto, el análisis de contenido ha sido la metodología empleada en este estudio, la cual se ha analizado minuciosamente para tenerla en cuenta en la investigación que aquí se presenta.

Instrumentos de valoración:

González y Sierra (2004) proponen un instrumento para el análisis de libros de texto de Matemáticas e indican cómo han evolucionado los conceptos relativos a los puntos críticos en los libros de texto españoles publicados a lo largo del siglo XX. Para ello, agrupan los libros en periodos que, en líneas generales, corresponden a los planes de estudio de 1934-1992. Primero contextualizan cada uno de los periodos, estudiando las normativas oficiales, sobre todo las elaboradas por el Ministerio de Educación. Su propuesta de análisis de libros se basa en los modos de representación siguientes: *descripciones verbales*, *tablas de datos*, *representaciones gráficas* y *expresiones simbólicas*. También proponen estudiar el sistema matemático de signos a través de las siguientes categorías: *Sintáctico* (estructura del problema, descripciones teóricas, símbolos utilizados en las tablas, tipos de expresiones simbólicas); *semántico* (fenomenología, tipos de descripciones, tipos de tablas, tipos de gráficas y significado de las expresiones simbólicas); *pragmático* (función de los ejercicios, papel de las definiciones, actividades relacionadas con las tablas, actividades gráficas y papel de las expresiones simbólicas) y *sociocultural* (influencia social y adaptación al currículo, influencias didácticas, aplicación de las tablas, presentación de las gráficas (estática/dinámica) y complejidad de las expresiones simbólicas). Obteniendo una tabla con 20 celdas que les permite clasificar los libros en tres categorías: *expositivo*, *tecnológico* y *comprensivo*.

Señalar, que para el trabajo de investigación que aquí se presenta se ha tenido en cuenta la metodología seguida en este trabajo para contextualizar los periodos a los que pertenecen los libros de textos analizados.

Para la valoración de textos escolares de Matemáticas, Ortega (1996) presenta unas pautas de valoración general de textos matemáticos para que el profesorado las emplee de guía a la hora de seleccionar el texto más adecuado para un Centro de Enseñanza, teniendo en cuenta la singularidad que pueda tener el alumnado y los objetivos de la asignatura. El instrumento de valoración se configura con diez organizadores: *entorno; sobre la teoría; ilustraciones; enfatización; ejercicios, cuestiones y problemas; motivación; metodología; actividades; nuevas tecnologías; y otras*. Cada uno de los organizadores contiene una serie de cuestiones, a las cuales se les asignan unos pesos que reflejan la importancia de la pregunta planteada. Este modelo se ha llevado a la práctica y, curiosamente, se ha dado la paradoja de obtener puntuaciones menores algunos libros que, a priori, eran considerados por el profesorado como los mejores, sobre todo cuando se contrastaban los textos que utilizaban en clase.

El modelo de valoración propuesto por Ortega (1996) ha sido ampliado posteriormente por Monterrubio y Ortega (2009, 2011, 2012) elaborando tres modelos de análisis y valoración de textos escolares de Matemáticas. Para su diseño parten de los modelos ya existentes: de los que tratan aspectos generales de la educación y de los específicos del área de las Matemáticas. Este instrumento de evaluación se basa en una serie de organizadores. Dentro de cada organizador, incluyen una serie de indicadores de análisis en forma de categorías y subcategorías. Estos indicadores los obtienen a través del análisis de contenido de otros modelos realizados anteriormente. A continuación, analizan varios libros de texto de Matemáticas con la finalidad de añadir los indicadores de análisis necesarios no recogidos, además de tener en cuenta las opiniones del profesorado. Una vez concluido el modelo, y dado su carácter, se denominó *Modelo Exhaustivo de análisis de valoración de textos escolares de Matemáticas*. Sin embargo, para valorar textos escolares de Matemáticas más rápidamente crearon un *Modelo Reducido*, fundamental sobre todo cuando es necesario analizar varios manuales escolares para seleccionar uno de ellos como libro de texto. Por otra parte, para realizar un análisis de los aspectos considerados de forma transversal, propusieron el *Modelo Transversal*. Por tanto, ofrecen tres modelos para poner en práctica según la necesidad de aplicación.

Finalmente, después de analizar estos trabajos de investigación se puede concluir que algunos se dedican simplemente a dar indicaciones acerca de los aspectos que deben recoger los contenidos de los manuales escolares, frente a otros que presentan auténticos modelos de valoración de gran utilidad para evaluar los manuales empleados por el profesorado y alumnado en los centros de enseñanza.

3. METODOLOGÍA

3.1 Recopilación de fuentes bibliográficas

Toda investigación parte de una experiencia acumulada que es necesario considerar. La revisión bibliográfica tenía un doble objetivo: contextualizar de forma teórica la investigación que aquí se presenta y conocer las experiencias, tanto nacionales como internacionales, llevadas a cabo para la valoración de los manuales escolares con el fin de obtener información de carácter metodológico, para poder desarrollar el método de valoración.

En conjunto, las fuentes usadas se pueden agrupar en seis categorías para su análisis: revistas científicas, actas de congresos, monografías, documentos electrónicos, informes técnicos y fuentes normativas.

La localización de las revistas científicas, actas de congresos, monografías, documentos electrónicos e informes técnicos se descubren fundamentalmente en catálogos colectivos de carácter general y especializados (*REBIUN*), en repositorios científicos (*RECOLECTA*) e institucionales (*DEHESA*), en plataformas de recursos y servicios documentales (*DIALNET*) y en bases de datos como el ICYC *Ciencia y Tecnología* o ERIC (*Education Resources Information Center*).

Una fuente de especial relevancia para el desarrollo del trabajo, que, por esta razón, merece ser destacada, ha sido la fuente de carácter normativo. Dado que uno de los objetivos específicos de este trabajo hace necesario conocer las propuestas curriculares vigentes en diferentes épocas, ha sido preciso identificar y analizar distintas

fuentes de carácter normativo. Fundamentalmente la fuente usada para conocer los currículos ha sido la base de datos sobre legislación que ofrece la *Agencia Estatal Boletín Oficial del Estado*.

3.2 Aspectos generales de la investigación

Una vez analizados minuciosamente los diferentes estudios que los distintos investigadores han realizado sobre los modelos de valoración y análisis de los manuales escolares, de carácter general y específico del área de Matemáticas, se han recopilado los indicadores necesarios para el desarrollo de esta investigación.

Entre la diversidad de investigaciones sobre el manual escolar, como se comprueba a través del marco teórico, se han ido empleando para el desarrollo metodológico estudios tanto de tipo cuantitativo (*Cerdán y Puig, 1983*) como cualitativo (*Martínez, 1992; Pino y Blanco, 2008*), o incluso la combinación de ambos tipos (*Parcerisa, 1996*). Además, con respecto a las estrategias de evaluación, se recogen bastantes estudios que emplean el análisis de contenido como método de valoración (*Monterrubio y Ortega, 2009, 2011, 2012; Pino y Blanco, 2008*).

Por tanto, considerando lo expuesto, el estudio que aquí se presenta se enmarca en el **paradigma cualitativo de investigación**, empleando como método el **análisis de contenido**. Se trata de describir, analizar e interpretar los manuales escolares en relación con la resolución de problemas de las ecuaciones de segundo grado, y para conseguir este fin la mejor opción es una metodología cualitativa. Finalmente, los resultados se podrán presentar de manera **cuantitativa**.

Según Bardin (1996; cit. en Abela, 2002: 3), el análisis de contenido es “un conjunto de técnicas de análisis de las comunicaciones tendentes a obtener indicadores (cuantitativos o no) por procedimientos sistemáticos y objetivos de descripción del contenido de los mensajes permitiendo la inferencia de conocimientos relativos a las condiciones de producción/recepción (contexto social) de estos mensajes”. Además, la metodología del análisis de contenido, como recoge el trabajo de Zapico (2006: 150), es una técnica de investigación “aplicada en múltiples ocasiones dentro del marco de la investigación educativa, especialmente en el universo de análisis de los libros de texto”. “Puede poseer un corte descriptivo e inferencial, de tal modo que, por una parte, permite

describir exhaustivamente el contenido del material, la forma en que se presentan texto e imagen y el fondo de los temas abordados, realizando comparaciones entre los diversos manuales objeto de estudio”. Añade, que “la estrategia de análisis de contenido permite la utilización de técnicas cuantitativas y cualitativas que se complementarían y enriquecerían mutuamente a lo largo de todo el proceso de indagación”. Esta combinación de técnicas se ha puesto en práctica en la investigación que aquí se presenta.

Además, en esta investigación, se han tenido en cuenta los siguientes parámetros que sugiere Castiello (2002; cit. en Zapico, 2006: 151) a lo largo de todo el proceso del análisis de contenido:

- *localizar y seleccionar, en primer lugar, las partes de las unidades de muestreo que presenten datos sobre el fenómeno a estudiar;*
- *convertir tales datos en unidades de registro, (...);*
- *establecer un sistema de categorías de registro enmarcado en un proceso de codificación que implicaría la transformación de los datos brutos en categorías y permitiría la descripción precisa de las características más relevantes del contenido. (...);*
- *y, finalmente, se procedería a codificar el conjunto de textos seleccionados, (...), efectuando una interpretación de los datos obtenidos, (...), (...) desarrollando una construcción teórica de relaciones entre los datos y su contexto.*

Entre estos parámetros que sugiere Castiello (2002; cit. en Zapico, 2006: 151) se encuentra el establecimiento de un *sistema de categorías*, de lo que se deduce la relevancia que adquiere en el análisis de contenido de los manuales escolares.

Los sistemas de categorías empleados en los estudios sobre los manuales escolares de Matemáticas, y que ya se han citado anteriormente (González y Sierra, 2004; Monterrubio y Ortega, 2009, 2011, 2012; Pino y Blanco, 2008), han sido de gran utilidad para configurar las categorías empleadas en esta investigación. En este caso, las categorías están vinculadas al tipo de problema, el soporte, el contexto, y la tarea matemática, basando su diseño en las categorías recogidas en el trabajo de Pino y Blanco (2008), y que se desarrollarán en el apartado siguiente.

A la hora de establecer estas categorías se tendrán en cuenta las recomendaciones de Berelson (cit. en López Noguero, 2002: 176-177), que recoge que deben ser: “homogéneas, exhaustivas (agotar la totalidad del texto), exclusivas (un mismo elemento del contenido no puede ser clasificado de manera aleatoria en otras categorías diferentes), objetivas (dos codificadores diferentes deben llegar a los mismos resultados) y adecuadas o pertinentes (adaptadas al contenido y al objetivo)”.

Entre las investigaciones realizadas en el campo de los manuales escolares de Matemáticas, existen estudios que centran su atención en el análisis de la organización y estructura de su contenido, como el trabajo de Azcárate y Serradó (2006) que ya ha sido citado en el marco teórico de esta investigación. En el trabajo que se presenta aquí, también se pretende realizar un análisis con respecto a este aspecto, con el fin de conocer los principales elementos que caracterizan cada una de las partes de una lección o unidad didáctica. Para ello, se pretende realizar un análisis semejante al recogido en el trabajo de Pino y Blanco (2008: 76). Estos autores, basándose en el trabajo de Valverde et al. (2002; cit. en Sebastian, 2006) realizan un *análisis microestructural* del contenido de las unidades de proporcionalidad recogidas en ocho libros de texto, generando las siguientes categorías de análisis: presentación o introducción de la unidad o capítulo, objetivos de la unidad, secuenciación de los contenidos, actividades (ejemplos y problemas propuestos) y evaluación.

En esta investigación se realizará un análisis *microestructural* del contenido de las lecciones y unidades didácticas de las ecuaciones de segundo grado recogidas en siete manuales escolares, pertenecientes al mismo nivel y a diferentes épocas, concretamente dos de 4º de Bachillerato Elemental, dos de 8º de EGB y tres de 2º de ESO.

Por otra parte, cuando se repasan los estudios sobre manuales escolares se comprueba que algunos autores, como Howson (1995; cit. en González y Sierra, 2004: 390), distinguen entre investigaciones realizadas sobre textos escolares *a posteriori* y *a priori*. Otros, como Van Dormolen (1986; cit. en Bruno y Cabrera, 2006: 127), diferencian en el análisis de textos, tres tipos: análisis *a priori*, *a posteriori* y *a tempo*. El **análisis a priori** lo define como “el estudio del texto como posible medio de instrucción”, el análisis *a posteriori*, como “el que se sirve para comparar los resultados del aprendizaje con el texto y, el análisis *a tempo*, como “el que estudia la manera en la

que los estudiantes y profesores lo manejan durante el proceso de enseñanza aprendizaje”. A la hora de hacer un análisis *a priori* Van Dormolen (1986; cit. en Bruno y Cabrera, 2006: 128), plantea estas preguntas:

- ¿Hay algo erróneo que el profesor debería corregir?
- ¿Hay alguna carencia? Si la hay, ¿debería el profesor tener cuidado y dar la información suplementaria en el aula?
- ¿Es “claro” el texto desde el punto de vista matemático?
- ¿Es el texto tan exhaustivo que no provoca ninguna actividad mental en los estudiantes? Si ése es el caso, ¿debería el profesor mantener esa parte del texto fuera del alcance de los estudiantes?
- ¿Es genuina la matemática?

Por tanto, teniendo en cuenta estos tipos de análisis, se debe indicar que la investigación que aquí se presenta se trata de un análisis *a priori*, que se centra en el estudio del manual escolar como medio de instrucción. Con este trabajo, se intentará poder dar respuesta a alguna de las cuestiones que plantea Dormolen (1986; cit. en Bruno y Cabrera, 2006: 128), analizando cómo estos libros de texto esbozan la resolución de problemas con respecto a las ecuaciones de segundo grado.

Finalmente, a modo de síntesis se puede concluir que la perspectiva metodológica de esta investigación se enmarca en un **paradigma cualitativo de investigación**, empleando como método el **análisis de contenido**, teniendo en cuenta, entre otros aspectos, los **sistemas de categorías**, y complementándose con un **análisis microestructural**. Además, es un estudio de **análisis a priori**, ya que no se tiene en cuenta como el profesorado y alumnado utilizan los manuales escolares. Finalmente, ciertos resultados se podrán mostrar de manera **cuantitativa**.

3.3 Perfil de las categorías de análisis

Partiendo de que la *categorización* es “el proceso mediante el cual el contenido de la información cualitativa, transcrita en el texto de campo, se descompone o divide en unidades temáticas que expresan una idea relevante del objeto de estudio” (Mejía, 2011: 51), se han establecido las categorías y subcategorías para el tratamiento de los problemas que se presentan en los manuales escolares analizados. Éstas son:

- A. Tipos de problemas
- B. El soporte
- C. El contexto
- D. La tarea matemática

A. *Tipos de problemas*

Esta categoría se apoya en las clasificaciones que realizan Blanco (1993: 39) y Borasi (1986; cit. en Blanco, 1991: 62). Las subcategorías que engloba son:

A.1. Ejercicios de reconocimiento.

Son ejercicios que pretenden *resolver, reconocer o recordar un factor específico, una definición o una proposición de un teorema* (Blanco, 1993: 41).

A.2. Ejercicios algorítmicos o de repetición.

Son ejercicios que pueden ser resueltos con un proceso algorítmico, a menudo un algoritmo numérico. *En estos ejercicios se trata de reforzar alguna expresión matemática determinada, o potenciar las habilidades de cálculo* (Blanco, 1993: 42).

A.3. Problemas de traducción simple o compleja.

Son problemas *formulados en un contexto concreto y cuya resolución supone una traducción del enunciado a una expresión matemática. En el enunciado del problema aparece toda la información necesaria para la resolución del mismo y suele, implícitamente, indicar la estrategia a seguir. Son los típicos problemas de los libros de texto en los que el método de solución se reduce a interpretar correctamente el problema, es decir, a elegir el algoritmo adecuado* (Blanco, 1993: 43).

A.4. Problemas de procesos

Estos problemas *se diferencian de los anteriores en que la forma de cálculo no aparece claramente delimitada, dándose la posibilidad de conjeturar varios caminos para encontrar la solución. Este tipo de problemas intenta ejemplificar los procesos inherentes a su solución. Ayudan a desarrollar estrategias generales de comprensión, planificación y de solución de problemas. En ellos no aparece claramente una estructura del mismo que posibilite, como en el caso anterior, la traducción fácil a una expresión matemática* (Blanco, 1993: 45).

A.5. Problemas sobre situaciones reales.

Se trata de plantear actividades lo más cercanas posibles a situaciones reales que requieran el uso de habilidades, conceptos y procesos matemáticos. Estos problemas dan oportunidad a la construcción de diagramas, a la realización de estimaciones, cálculo de las medidas, procesos de análisis y síntesis, pero sobre todo ayudan a comprender el significado de las Matemáticas y su relación con la realidad (Blanco, 1993: 47).

A.6. Problemas de investigación matemática.

Son problemas directamente relacionados con contenidos matemáticos, cuyas proposiciones pueden no contener ninguna estrategia para representarlos, y sugieren la búsqueda de algún modelo para encontrar la solución. En estas actividades son usuales las expresiones como “Probar que...”, “Encontrar todos los...”, “Para que... es...?”, etc. (Blanco, 1993: 48).

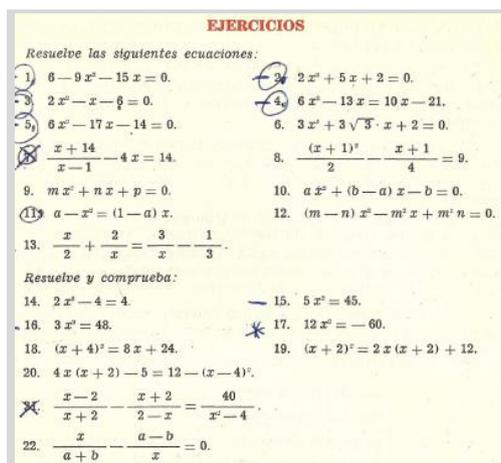


Fig. 3.1 Ej. de ejercicios algorítmicos,
(Manual escolar de 4º de Bachillerato Elemental, SM, 1965; p.58).

B. El soporte

Esta categoría se ha configurado en base a lo propuesto por Chamorro (2003: 285), refiriéndose al modo en que se representa la información en el enunciado de un problema. Teniendo en cuenta, que uno de los objetivos de la resolución de problemas es, justamente, que *el alumno sepa pasar de un tipo de representación a otro*, y que *sepa utilizar las diferentes organizaciones del problema*.

Se añaden las siguientes subcategorías:

B.1. Texto escrito (enunciado narrado en lenguaje natural, numérico y/o lógico).

B.2. Imagen. Diferenciando entre imagen independiente e imagen dependiente.

- Imagen independiente: No aporta información al enunciado del ejercicio o problema.
- Imagen dependiente: Aporta información relevante para el desarrollo del ejercicio o problema.

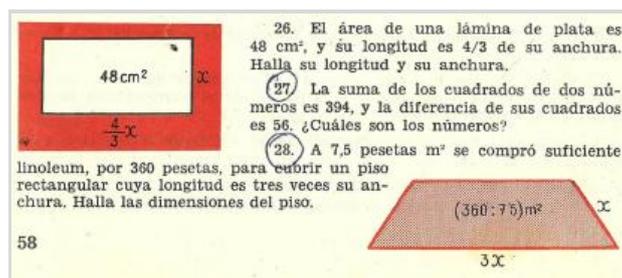


Fig. 3.2 Ej. de enunciado de problema dado a través de un soporte imagen dependiente, (Manual escolar de 4º de Bachillerato Elemental, SM, 1965; p.58).

C. El contexto

Siguiendo de nuevo a Chamorro (2003: 285), se configura esta categoría. Toma como referencia las prácticas sociales de los alumnos.

En ella, se tienen en cuenta las subcategorías que se presentan aquí:

- C.1. Contextos efectivos (donde la situación descrita permite una acción o representación concreta).
- C.2. Simulación (de prácticas sociales que no pertenecen al entorno familiar del alumno).
- C.3. Contexto matemático.

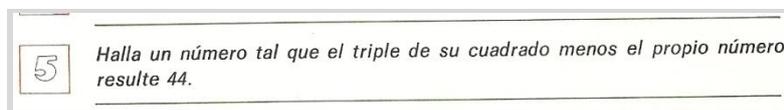


Fig. 3.3 Ej. de problema dado en un contexto matemático, (Manual escolar de 8º de EGB, Santillana, 1978; p.237).

D. La tarea matemática

Esta categoría hace referencia al tipo de tarea matemática que debe llevar a cabo el resolutor del problema para descubrir la solución. A menudo, la pregunta del enunciado del problema refleja la tarea necesaria a aplicar, sin embargo, en otras ocasiones está implícita. Las *preguntas* constituyen el *desafío de la actividad*. Es decir,

según la naturaleza del procedimiento de respuesta, pueden considerarse *varios tipos de preguntas*: la respuesta se obtiene por simple lectura del enunciado o por verificación de una información presente, explícitamente, en el texto; la respuesta se obtiene reflexionando, sin calcular; la respuesta se obtiene calculando; la respuesta es imposible por falta de informaciones en el enunciado. (Chamorro, 2003: 285).

En este caso, las subcategorías que se consideran son:

D.1. Identificar

Trata de reconocer algún concepto o propiedad en una expresión numérica.

D.2. Completar

Se basa en integrar los datos en una tabla o en una expresión numérica.

D.3. Aplicar

Consiste en aplicar un algoritmo, una propiedad o un teorema para resolver la tarea implícita en el enunciado del problema.

D.4. Investigar

En la resolución del problema se precisa manipular la información disponible para generar nuevos datos, descubrir alguna regularidad o para verificar una conjetura.

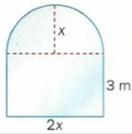
<p>72 Halla los valores de x para los cuales son cero las expresiones algebraicas.</p> <p>a) $(x - 2) \cdot (x + 4)$ b) $5x \cdot (x - 1) \cdot (x + 6)$</p>	<p>91 El área de esta ventana es de 18,28 metros cuadrados. Halla x.</p> 
<p><i>Ej. de problema con la tarea matemática de identificar.</i> (S.M. 2008; p.118)</p>	<p><i>Ej. de problema con la tarea matemática de aplicar.</i> (S.M. 2008; p.119)</p>

Fig. 3.4 Varios ejemplos de problemas de un manual escolar de 2º de la ESO.

Codificación de las categorías y subcategorías

Teniendo en cuenta que la *codificación* es “la operación que asigna a cada unidad categorial una determinada notación, etiqueta o palabra que expresa el contenido conceptual”, y que los *códigos* son “principalmente términos o abreviatura de palabras, son marcas que corresponden a los significados de las categorías definidas de un texto” (Mejía, 2011: 52), se procede a codificar las categorías y subcategorías planteadas.

Categorías	Subcategorías	Códigos	
TIPOS DE PROBLEMAS	Ejercicios de reconocimiento	TP-ER	
	Ejercicios algorítmicos o de repetición	TP-EA	
	Problemas de traducción simple o compleja	TP-PT	
	Problemas de procesos	TP-PP	
	Problemas sobre situaciones reales	TP-PS	
	Problemas de investigación matemática	TP-PI	
SOPORTE	Texto escrito	S-TX	
	Imagen	Independiente	S-IN
		Dependiente	S-DE
CONTEXTO	Contextos efectivos	C-CE	
	Simulación	C-S	
	Contexto matemático	C-CM	
TAREA MATEMÁTICA	Identificar	TM-I	
	Completar	TM-C	
	Aplicar	TM-A	
	Investigar	TM-IN	

Fig. 3.5 Codificación de las categorías y subcategorías.

3.4 Selección de la muestra y recogida de datos

Para llevar a cabo una investigación es primordial tener en cuenta los materiales indispensables para su desarrollo, que en este caso son los manuales escolares del área de Matemáticas.

Para la selección de estos manuales escolares de Matemáticas se tuvo en cuenta el cumplimiento de las siguientes características:

- haber sido de uso bastante generalizado y pertenecer a editoriales importantes,
- editados conforme a las Leyes de Educación comprendidas en el periodo 1953-2006,
- y destinados para un alumnado de edad comprendida entre los 13 y 14 años.

Por tanto, teniendo en cuenta los criterios anteriores, se seleccionó una muestra de siete manuales de Matemáticas, pertenecientes al mismo nivel pero a diferentes épocas. Concretamente se seleccionaron dos manuales de 4º curso del primer grado de Bachillerato Elemental (LOEM 1953), dos de 8º curso de EGB (LGE 1970) y tres de 2º curso de ESO (LOGSE 1990 y LOE 2006). Estos manuales han sido utilizados por los escolares de Extremadura durante su época de vigencia. Sus características bibliográficas y de contenido se recogen en el apartado 2.6.1.

Una vez seleccionados los manuales, el siguiente paso fue iniciar el proceso de recogida de datos.

Este proceso de recogida se ha centrado en dos actividades:

1. Establecimiento de una tabla previa de clasificación de contenidos.
2. Elección del tema objeto de estudio.

1. *Establecimiento de una tabla previa de clasificación de contenidos.*

Para cada uno de los manuales escolares seleccionados se ha llevado a cabo un análisis previo de los contenidos que recoge. Para ello, se han detallado los títulos de cada lección o unidad, puntualizando para cada uno de ellos los siguientes aspectos: descripción de epígrafes del tema, definiciones teóricas o propiedades de los diferentes contenidos, ejemplos simples, ejemplos con dibujos, y los ejercicios y problemas que proponen.

Con el fin de facilitar este análisis se confecciona una tabla que recoge todos estos aspectos de forma sintetizada.

LIBRO

CONTENIDOS	EPÍGRAFES	Definición	Ejemplos	Ej. Dibujo	Ejercicios	Problemas	Observación

Fig. 3.6 *Tabla previa de clasificación de contenidos.*

Para facilitar este trabajo de recopilación de información, se utilizó el programa Excel para trabajar con hojas de cálculo (tablas). En el anexo I se recoge una muestra de estas tablas.

2. *Elección del tema objeto de estudio.*

Con la recopilación y equiparación de información recogida en la tabla descrita anteriormente, se elabora una nueva tabla donde descubrir los bloques de contenidos más uniformes de los siete manuales escolares, facilitando la selección del tema de estudio de esta investigación. En el anexo II se muestra la tabla que recoge la puesta en común de los contenidos recogidos en los distintos manuales estudiados.

Finalmente, estas dos actividades han permitido seleccionar el tema de las ecuaciones de segundo grado como tema de estudio, sobre el que se realizará la exploración del tratamiento de los problemas y el análisis organizativo y estructural de cada lección o unidad didáctica.

A continuación, se describe el procedimiento seguido en el análisis microestructural y en el análisis de contenido.

3.5 Procedimientos de análisis de datos

3.5.1 Procedimiento de análisis microestructural

El análisis microestructural implica capturar la información necesaria de las unidades temáticas de los manuales escolares de Matemáticas de 4º de Bachillerato Elemental, 8º de EGB y 2º de ESO, correspondientes a las ecuaciones de segundo grado.

Como bien recogen en su trabajo Azcárate y Serradó (2006: 350), los diferentes aspectos implicados en la planificación de un proceso de enseñanza y aprendizaje se concretan en los libros de texto en tres partes diferenciadas: *la presentación, el desarrollo y el cierre de la unidad*. Teniendo en cuenta esto, en esta investigación se analiza concretamente, la información incluida en:

- *la presentación*:
 - Introducción de la lección o unidad y objetivos.
- *el desarrollo*:
 - Sucesión de los contenidos y actividades (ejemplos y problemas resueltos y propuestos)
- *el cierre de la lección o unidad*:
 - Síntesis y actividades de evaluación.

3.5.2 Procedimiento de análisis de contenido

El análisis de contenido se focaliza en cada uno de los problemas recogidos en los manuales escolares que son objeto de estudio. Su análisis se realiza de acuerdo a las categorías y subcategorías descritas en el apartado anterior.

Se analizaron los *problemas propuestos sin resolver*, que debe averiguar el alumnado poniendo en práctica los conceptos y procedimientos teóricos y prácticos presentados en los propios manuales e impartidos por el profesor. Además, de analizar los *problemas presentados como ejemplos resueltos* sobre los contenidos que se van exponiendo en cada parte de la lección o unidad didáctica. Igualmente, se analizaron las *actividades planteadas como evaluación* del alumnado, pero en menor proporción, ya que no todos los manuales introducen actividades de evaluación.

Con respecto al número de problemas, se han tratado un total de 315 *problemas propuestos*, 105 *problemas de ejemplos* y 5 *problemas planteados como evaluación*.

Como ya se había hecho anteriormente para la selección del bloque temático que iba ser objeto de análisis, en este caso también se utilizó el programa Excel para trabajar con hojas de cálculo (tablas). Tenía el mismo objetivo, facilitar la recopilación y comparación de información, en este caso la extraída de los problemas analizados. Estas hojas de cálculo (tablas) permitían sintetizar la información acerca de estos problemas analizados de una manera clara y sencilla. En el anexo III se recoge una muestra de las plantillas completadas con los datos obtenidos de la exploración de los problemas estudiados, según las categorías y las subcategorías establecidas.

Finalmente, una vez concluida la recogida de datos, se procede a su estudio.

Resaltar que el análisis se hace por separado para cada grupo de manuales, es decir, primero se analizan los de Bachillerato Elemental, posteriormente los de EGB, y finalmente los de ESO, para hacer posteriormente las valoraciones comparativas correspondientes entre los tres grupos (Bachillerato Elemental, EGB y ESO).

4. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN RECOGIDA, PRESENTACIÓN Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

4.1 Análisis descriptivo de los manuales escolares de 4º de Bachillerato Elemental

4.1.1 Análisis microestructural

En los manuales estudiados las *lecciones* que se centran en las ecuaciones de segundo grado se presentan con nombres diferentes, aunque a la misma vez comparten ciertas semejanzas: “**Ecuación de segundo grado** con una incógnita”, “Aplicaciones de la ecuación de segundo grado” “Representación gráfica de Trinomio de segundo grado” (SM, 1965); y “**Ecuaciones de segundo grado** o cuadráticas”, “Propiedades de las raíces”, “Trinomio de segundo grado”, “Ecuaciones y sistemas reducibles a ecuaciones cuadráticas” (Luis Vives, 1965).

En la introducción a la lección no se incorpora ningún texto ni ilustración que contextualice su situación. Además, no incluyen actividades relacionadas con los conocimientos previos.

Ninguno de los manuales recoge de forma explícita los objetivos que intenta conseguir. Por tanto, no se puede comprobar directamente si los objetivos que pretende alcanzar van en consonancia con lo reflejado en el currículo para 4º de Bachillerato Elemental.

La siguiente tabla (Fig. 4.1) muestra los contenidos, con respecto a las ecuaciones de segundo grado, que se presentan en los manuales de 4º curso. Se observa

que algunos contenidos son exactamente iguales (marcados en negrita), aunque distribuidos en lecciones diferentes. Sin embargo, también se aprecian algunas diferencias de un manual a otro, sobresaliendo la ausencia de la *resolución gráfica de las ecuaciones de segundo grado incompleta* en uno de ellos (Luis Vives, 1965). En ambos manuales, el inicio de la unidad se reserva prácticamente para las ecuaciones de segundo grado.

(SM, 1965)	(Luis Vives, 1965)
- [Lección] 8 -	- [Lección] 8 -
Definición.	Formas de la ecuación de segundo grado con una incógnita .
Resolución de la ecuación de segundo grado con una incógnita .	Resolución de las ecuaciones incompletas .
Naturaleza de las raíces.	Resolución de la ecuación general.
Caso particular importante.	Discusión .
Ecuaciones incompletas .	- [Lección] 9 -
Relaciones entre las raíces y los coeficientes.	Suma de las raíces de una ecuación de segundo grado.
Aplicación del conocimiento previo de la suma y del producto de raíces de una ecuación de segundo grado.	Producto de las raíces .
Discusión de las raíces reales.	Determinación de una ecuación de segundo grado, conocidos el producto y la suma o diferencia de sus raíces.
- [Lección] 9 -	Formación de una ecuación de segundo grado, conocidas sus raíces .
Descomposición en factores del trinomio de segundo grado .	Aplicación al estudio de las raíces reales en relación con los coeficientes.
Trinomio de segundo grado , cuadrado perfecto.	- [Lección] 10 -
Resolución de ecuaciones irracionales reduciéndolas a racionales.	Trinomio de segundo grado .
Problemas de segundo grado .	Representación gráfica del trinomio de segundo grado .
Ecuación bicuadrada .	Resolución gráfica de la ecuación de segundo grado .
- [Lección] 11 -	- [Lección] 11 -
Trinomio de segundo grado .	Ecuaciones bicuadradas .
Representación gráfica de la función $y = ax^2$	Ecuaciones binomias y ecuaciones trinomias.
Representación gráfica de la función $y = ax^2 + c$	Resolución de ecuaciones irracionales .
Representación gráfica de la función $y = a(x-h)^2 + c$	Empleo de una incógnita auxiliar.
Representación gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$	Sistemas formados por una ecuación de primer grado y otra de segundo.
Signo del trinomio de segundo grado .	Sistemas formados por dos ecuaciones de segundo grado.
Resolución gráfica de la ecuación de segundo grado .	Problemas de segundo grado .
	Problemas imposibles e indeterminados.
	Problemas que dan lugar a un sistema sencillo de ecuaciones de segundo grado.

Fig. 4.1 Contenidos sobre las ecuaciones de segundo grado incluidos en los manuales escolares de 4º de Bachillerato Elemental.

Con el objeto de aclarar conceptos, se intercalan los contenidos teóricos con los ejercicios y problemas resueltos a modo de ejemplo. Estos ejemplos simulan algún contexto real y aplican un algoritmo para su resolución. A continuación, recogen un listado de ejercicios y problemas propuestos para que el alumnado pueda completar y mejorar sus conocimientos sobre la lección.

Finalmente, ninguno de los manuales incorpora un resumen que sintetice los contenidos de la lección ni actividades de evaluación.

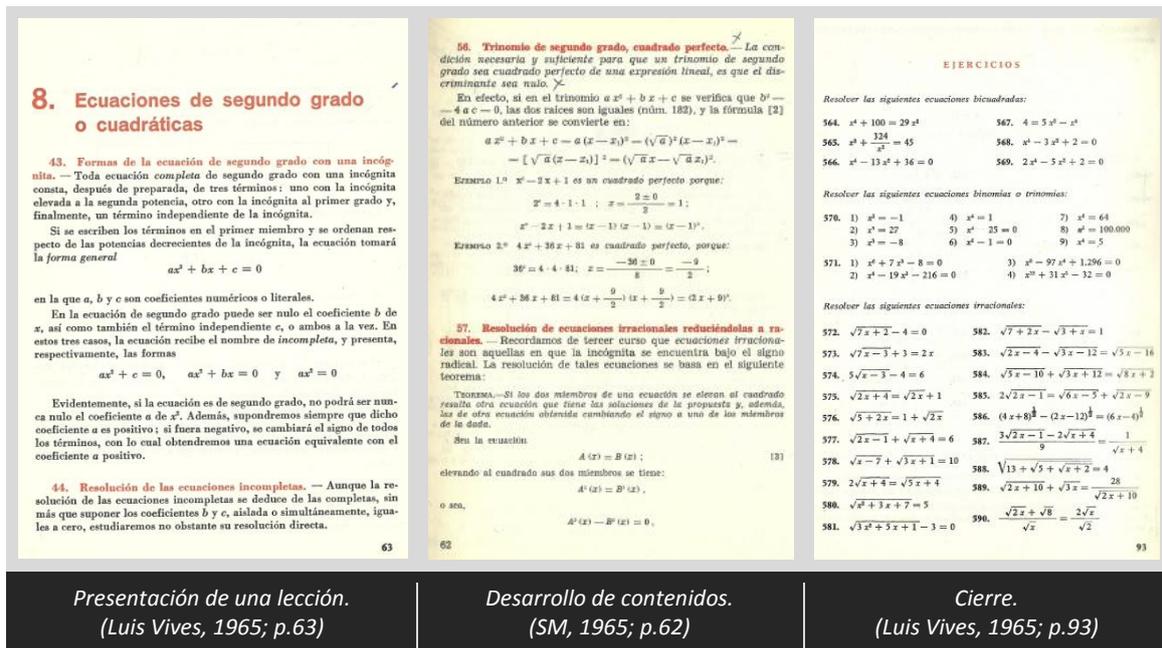


Fig. 4.2 Organización y estructura de una sección de la “presentación”, “desarrollo” y “cierre” de una lección de 4º de Bachillerato Elemental.

4.1.2 Análisis de los problemas propuestos

Los problemas de los manuales escolares centrados en las ecuaciones de segundo grado se han analizado de acuerdo a las cinco categorías consideradas en esta investigación. Las categorías se refieren a los tipos de problemas, al soporte en que está escrito, al contexto en que se presenta, y a la tarea matemática empleada para resolver el problema.

De los manuales escolares de Matemáticas analizados para el nivel de 4º de Bachillerato Elemental, se han estudiado 68 problemas propuestos del manual de Luis Vives (1965) y 75 del de SM (1967).

En la siguiente tabla se recogen las cifras para el análisis de categorías y subcategorías de los problemas propuestos que aparecen en las lecciones abordadas en los dos manuales de 4º de Bachillerato Elemental analizados:

Categorías	Subcategorías	Códigos	Luis Vives (1965)	SM (1967)	
			N= 68	N= 75	
TIPOS DE PROBLEMAS	Ejercicios de reconocimiento	TP-ER	0	2	
	Ejercicios algorítmicos o de repetición	TP-EA	25	17	
	Problemas de traducción simple o compleja	TP-PT	27	50	
	Problemas de procesos	TP-PP	16	6	
	Problemas sobre situaciones reales	TP-PS	0	0	
	Problemas de investigación matemática	TP-PI	0	0	
SOPORTE	Texto escrito	S-TX	68	63	
	Imagen	Independiente	S-IN	0	0
		Dependiente	S-DE	0	12
CONTEXTO	Contextos efectivos	C-CE	15	6	
	Simulación	C-S	0	0	
	Contexto matemático	C-CM	53	69	
TAREA MATEMÁTICA	Identificar	TM-I	25	19	
	Completar	TM-C	0	0	
	Aplicar	TM-A	43	56	
	Investigar	TM-IN	0	0	

Fig. 4.3 Tabla de distribución de las categorías y subcategorías de los problemas propuestos (1ª época).

En cuanto a los *tipos de problemas*, en ambos manuales sobresalen los “problemas de traducción simple o compleja”, siendo en Luis Vives de un 40% y en SM de un 66%. Los “ejercicios algorítmicos o de repetición” aparecen en Luis Vives con un porcentaje del 37%, frente a 23% de SM. Además, tan solo en SM aparecen “ejercicios de reconocimiento” con un 3%; careciendo ambos manuales de “problemas sobre situaciones reales” y de “investigación matemática”. Los “problemas de procesos” aparecen en un 23% en Luis Vives, frente a un porcentaje del 8% en SM.

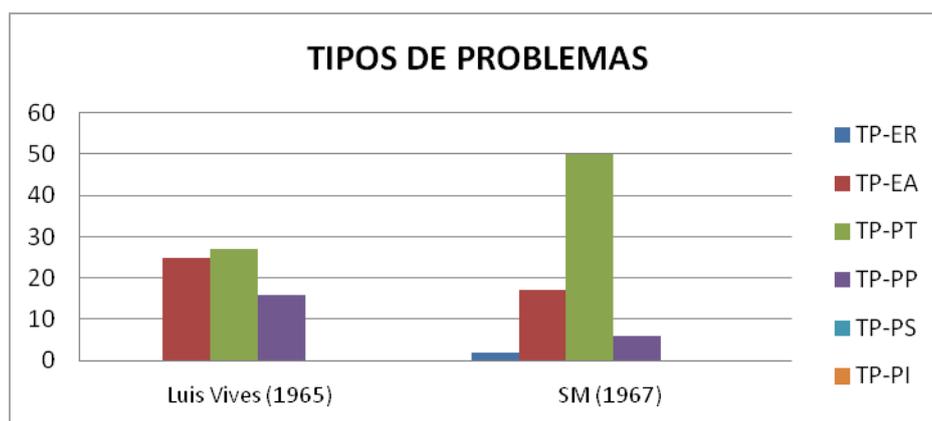


Fig. 4.4 Gráfico de distribución de las subcategorías de los “tipos de problemas” de los problemas propuestos (1ª época).

En relación al *soporte* indicar que la mayoría de los enunciados de los problemas se presentan a través de un “texto escrito”, en Luis Vives el 100% y en SM el 84%. Sin embargo, tan solo un 16% en SM aparecen con “imagen dependiente”.

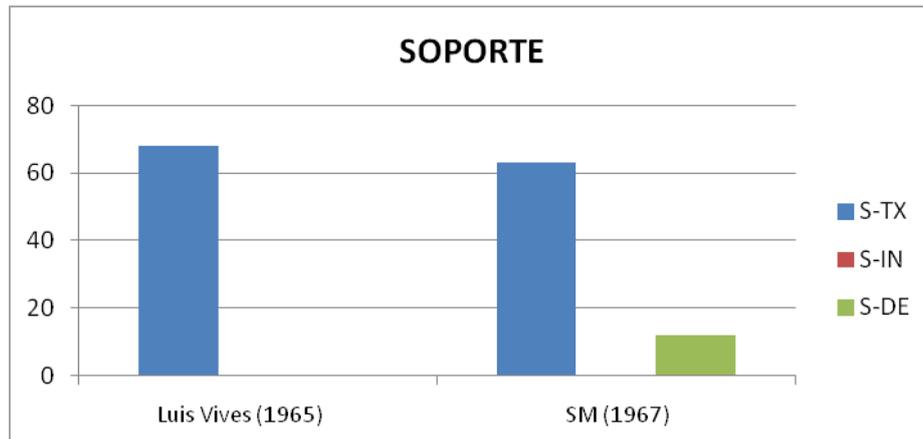


Fig. 4.5 Gráfico de distribución de las subcategorías del “soporte” de los problemas propuestos (1ª época).

Respecto al *contexto* en el que se presentan los problemas, predomina el “contexto matemático”, con un 78% en Luis Vives y un 92% en SM. En ningún manual aparece “contexto de simulación” pero sí “efectivos”, siendo del 22% en Luis Vives y de un 8% en SM.

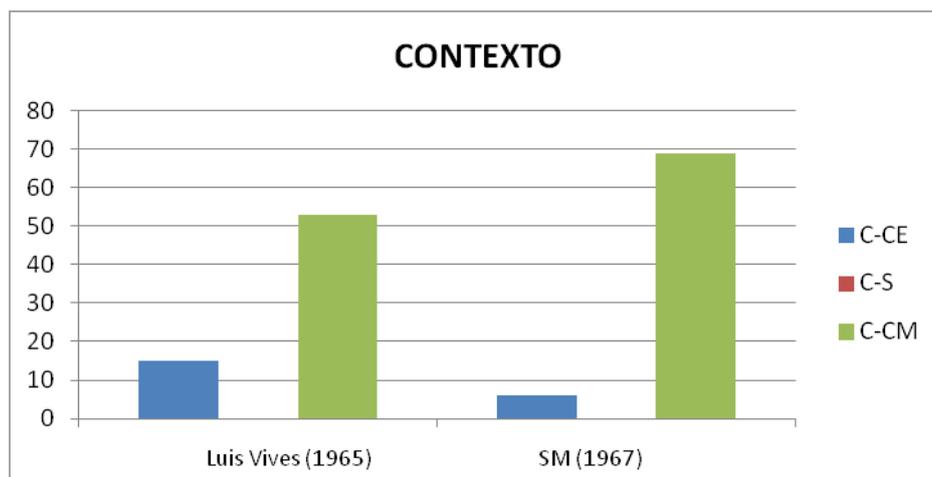


Fig. 4.6 Gráfico de distribución de las subcategorías del “contexto” de los problemas propuestos (1ª época).

En cuanto a la *tarea matemática* que permite resolver el problema, se alterna la de “identificar” algún concepto o propiedad con un 37% en Luis Vives y un 25% en SM, con la tarea de “aplicar” algún algoritmo conocido, siendo la más abundante, con un 63% en Luis Vives y un 75% en SM.

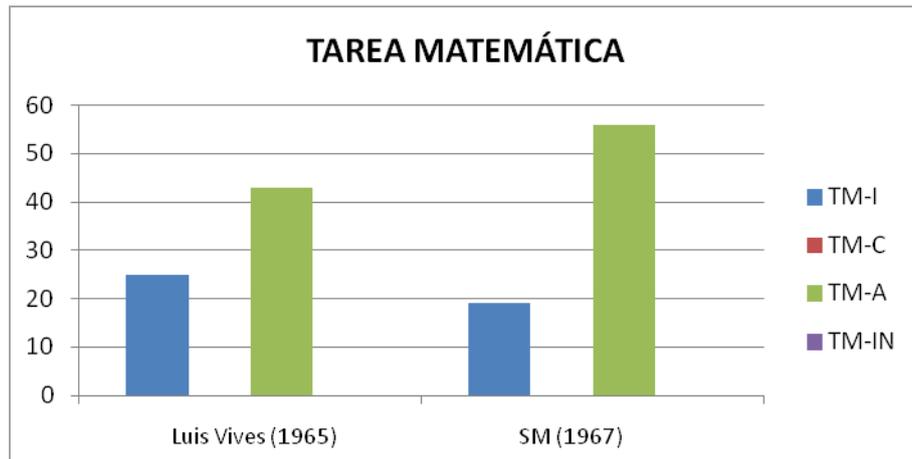


Fig. 4.7 Gráfico de distribución de las subcategorías de la “tarea matemática” de los problemas propuestos (1ª época).

4.1.3 Análisis de los problemas de ejemplo

El número de problemas presentados como ejemplo que aparece en ambos manuales escolares analizados, es bastante inferior al de los problemas propuestos. Siendo 28 en el manual de Luis Vives y 18 en el de SM.

Categorías	Subcategorías	Códigos	Luis Vives (1965)	SM (1967)	
			N= 28	N= 18	
TIPOS DE PROBLEMAS	Ejercicios de reconocimiento	TP-ER	0	6	
	Ejercicios algorítmicos o de repetición	TP-EA	24	9	
	Problemas de traducción simple o compleja	TP-PT	3	1	
	Problemas de procesos	TP-PP	1	2	
	Problemas sobre situaciones reales	TP-PS	0	0	
	Problemas de investigación matemática	TP-PI	0	0	
SOPORTE	Texto escrito	S-TX	27	18	
	Imagen	Independiente	S-IN	0	0
		Dependiente	S-DE	1	0
CONTEXTO	Contextos efectivos	C-CE	1	0	
	Simulación	C-S	0	0	
	Contexto matemático	C-CM	27	18	
TAREA MATEMÁTICA	Identificar	TM-I	24	16	
	Completar	TM-C	0	0	
	Aplicar	TM-A	4	2	
	Investigar	TM-IN	0	0	

Fig. 4.8 Tabla de distribución de las categorías y subcategorías de los problemas de ejemplo (1ª época).

En relación a los *tipos de problemas*, predominan los “ejercicios de algoritmos o de repetición” con un 86% en Luis Vives y un 50% en SM. Además, en este manual de SM también aparece un 33% de “ejercicios de reconocimiento”, ausente en Luis Vives. Los “problemas de traducción simple o compleja” y los “problemas de proceso” se intercambian los porcentajes en ambos manuales, siendo respectivamente, en Luis Vives

de un 11% y un 3% frente al 5% y 12% de SM. En ninguno de los manuales aparece otro tipo de problemas.

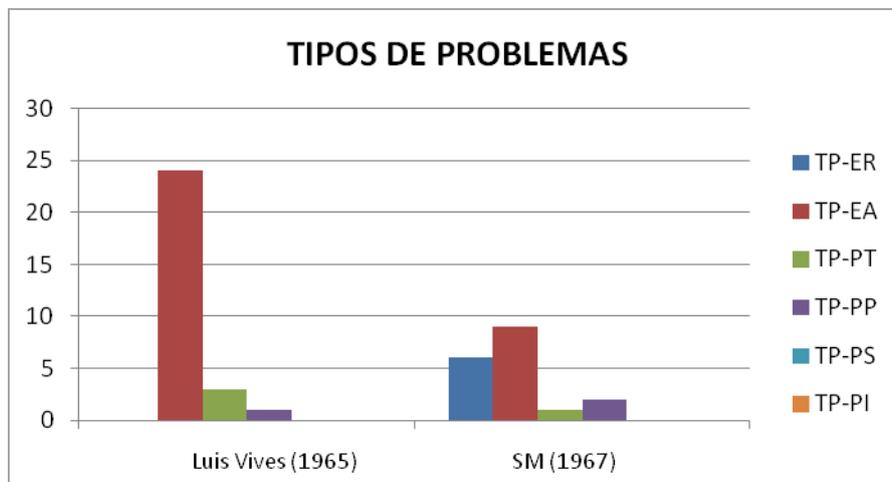


Fig. 4.9 Gráfico de distribución de las subcategorías de los “tipos de problemas” de los problemas de ejemplo (1ª época).

El soporte predominante en ambos manuales, es el “texto escrito”, prevaleciendo en casi la totalidad de problemas analizados. Tan solo en Luis Vives aparece un 4% con “imagen dependiente” del enunciado del problema.

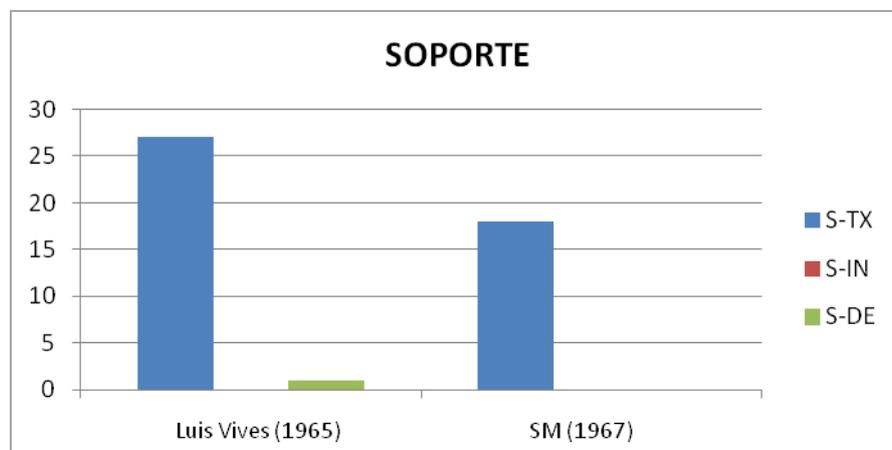


Fig. 4.10 Gráfico de distribución de las subcategorías del “soporte” de los problemas de ejemplo (1ª época).

El contexto que destaca es el “matemático”, tan solo en Luis Vives aparece un 4% de “efectivos”.

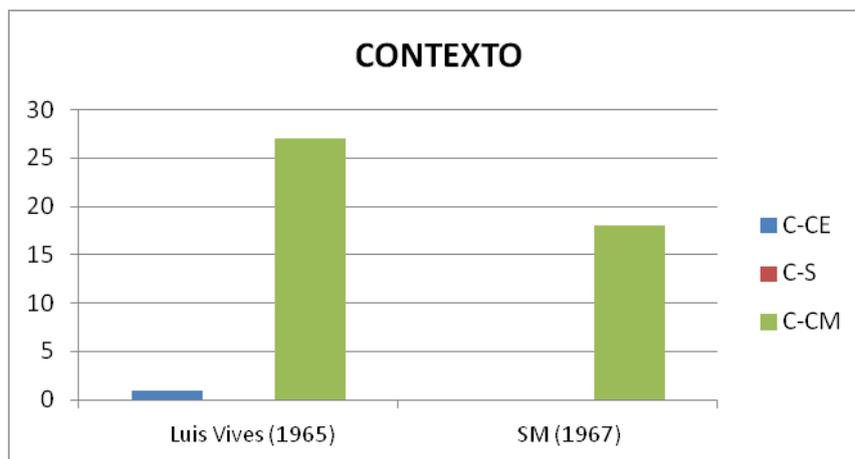


Fig. 4.11 Gráfico de distribución de las subcategorías del “contexto” de los problemas de ejemplo (1ª época).

Respecto a la *tarea matemática* empleada para la resolución de los problemas, la de “identificar” se presenta con un porcentaje alto en ambos manuales, siendo del 86% para Luis Vives y del 88% para SM. Sin embargo, la de “aplicar” alguna técnica o algoritmo para encontrar la solución, luce en tan solo un 14% en Luis Vives y un 12% en SM.

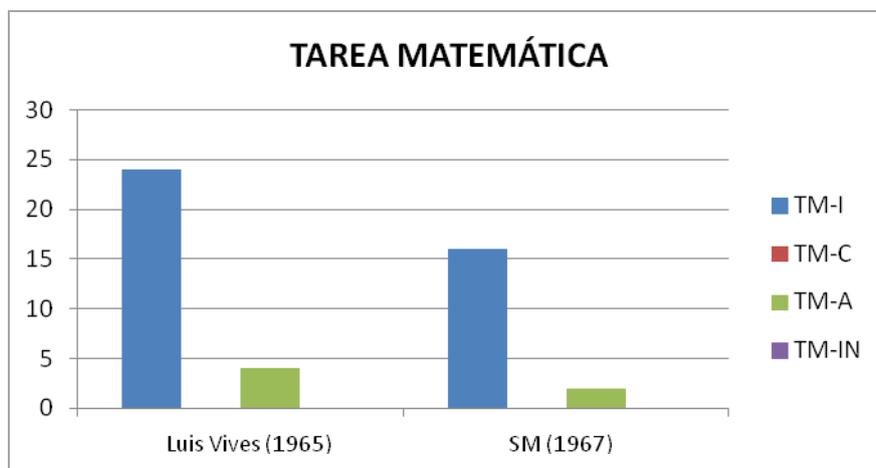


Fig. 4.12 Gráfico de distribución de las subcategorías de la “tarea matemática” de los problemas de ejemplo (1ª época).

4.2 Análisis descriptivo de los textos escolares de 8º EGB

4.2.1 Análisis microestructural

Aunque uno de los manuales dedica más *unidades didácticas* a las ecuaciones de segundo grado, en ambos se presentan con nombres prácticamente iguales: “**Ecuaciones de segundo grado**”, “Propiedades de las raíces de una ecuación de segundo grado”, “**La parábola**”, “Resolución gráfica de las ecuaciones de segundo grado”,

“**Aplicaciones** de las ecuaciones de segundo grado a la resolución de problemas. Ecuaciones bicuadradas” (Anaya, 1979); y “**Ecuación de segundo grado. Aplicaciones**” y “**La parábola**” (Santillana, 1978).

En la introducción a la unidad no se incorpora ningún texto ni ilustración que contextualice el desarrollo de dicha unidad. Sin embargo, de los dos manuales, concretamente el de la editorial Anaya (1979), en una de las unidades estudiadas, si incluye a modo de ejemplo actividades relacionadas con los conocimientos previos, marcado con el titular “**Recuerda**”.

Los objetivos que pretende alcanzar la unidad, se incorporan únicamente en uno de los manuales estudiados (Santillana, 1978). Siendo la lista de objetivos que recoge congruente con lo expresado en el currículo para 8º de EGB.

A continuación se recogen los contenidos que se presentan en los manuales de 8º de EGB con respecto a las ecuaciones de segundo grado. En el manual de Anaya (1979) el contenido de las cinco unidades es el que se equipara prácticamente, a los dos de la editorial Santillana (1978). Se observa que algunos contenidos son exactamente iguales, sin embargo, en uno de los manuales (Anaya, 1979), al dedicarle más unidades al tema, los contenidos son bastantes más amplios y completos. La diferencia principal que se observa es la ausencia de la *resolución gráfica* en uno de los manuales (Santillana, 1978). Ambos, inician la unidad con el desarrollo de las ecuaciones de segundo grado, aunque con alguna puntualización que ya ha sido indicada.

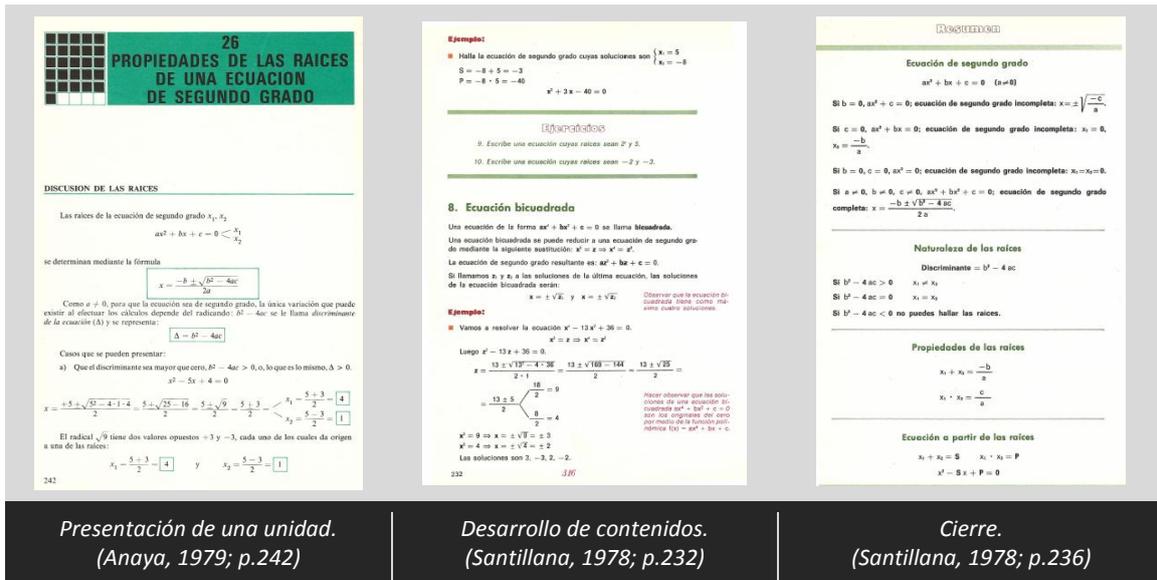
(Anaya, 1979)	(Santillana, 1978)
- [Unidad] 25 -	- Tema 14, de la Unidad 4: Ecuaciones -
La función cuadrática. (“ Recuerda ”).	Ecuación de segundo grado.
Ecuación de segundo grado.	Ecuaciones de segundo grado, completas e incompletas.
Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas.	Resolución de una ecuación de segundo grado incompleta.
Resolución de la ecuación de segundo grado completa en su forma general.	Ecuación de segundo grado completa.
Resolución de la ecuación de segundo grado completa.	Naturaleza de las raíces.
Descomposición en factores.	Propiedades de las raíces de una ecuación de segundo grado.
Actividades.	Determinación de la ecuación de segundo grado a partir de la suma y el producto de sus raíces.
- [Unidad] 26-	Ecuaciones bicuadradas.
Discusión de las raíces.	Aplicaciones de la ecuación de segundo grado.
Suma de las raíces de un ecuación de segundo grado.	Resumen.
Producto de las raíces de una ecuación de segundo	Actividades de aplicación.

grado.	
Determinación de una ecuación de segundo grado, conocidos el producto y la suma o diferencia de sus raíces.	- Tema 15, de la Unidad 4: Ecuaciones -
Formación de la ecuación de segundo grado conocidas sus raíces.	Representación gráfica de la función $y = ax^2$
Actividades	Observaciones generales sobre la parábola.
- [Unidad] 27-	Representación gráfica de la función $y = ax^2 + c$
Estudio de las funciones cuadráticas.	Representación gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$
Estudio y representación gráfica de la función cuadrática incompleta $f(x) = ax^2$	Resumen
Estudio y representación gráfica de la función cuadrática incompleta $f(x) = ax^2 + c$	Actividades de aplicación.
Estudio y representación gráfica de la función cuadrática incompleta $f(x) = ax^2 + bx$	
Estudio y representación gráfica de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$	
Ejes de simetría y vértices de la parábola.	
Expresión general de las coordenadas del vértice de la parábola.	
- [Unidad] 29-	
Resolución gráfica de la ecuación de segundo grado.	
Otra resolución gráfica de la ecuación de segundo grado.	
- [Unidad] 30 -	
[Aplicaciones de las ecuaciones de segundo grado a la resolución de problemas].	
Ecuaciones bicuadradas.	
Actividades.	

Fig. 4.13 *Contenidos sobre las ecuaciones de segundo grado incluidos en los manuales escolares de 8º de EGB.*

Los contenidos teóricos explican conceptos y/o procedimientos y se combinan con los ejemplos. Estos ejemplos aplicando un algoritmo para su resolución intentan aclarar los conceptos explicados. En uno de los manuales (Santillana, 1978) a estos ejemplos se le acompaña de la propuesta de ejercicios, para que practique el alumnado. Finalmente, se recoge una lista de actividades, que incluye ejercicios y problemas planteados para que el alumnado pueda desarrollar y perfeccionar sus conocimientos sobre la unidad. Sin embargo, no todas las unidades didácticas de los manuales (Anaya, 1979) incluyen estas actividades finales. Además, en uno de los manuales (Santillana, 1978), a modo de síntesis, antes de incluir estas actividades propuestas se recoge un pequeño resumen de los principales contenidos conceptuales tratados.

Finalmente, ninguno de los manuales incorpora actividades de evaluación para esta unidad.



Presentación de una unidad.
(Anaya, 1979; p.242)

Desarrollo de contenidos.
(Santillana, 1978; p.232)

Cierre.
(Santillana, 1978; p.236)

Fig. 4.14 Organización y estructura de una sección de la “presentación”, “desarrollo” y “cierre” de una unidad de 8º de EGB.

4.2.2 Análisis de los problemas propuestos

Los manuales escolares de Matemáticas analizados para el nivel de 8º EGB recogen 36 problemas propuestos en el de Santillana (1978) y 89 en el de Anaya (1979).

La tabla siguiente muestra la síntesis del estudio de los problemas propuestos de ambos manuales según las categorías y subcategorías.

Categorías	Subcategorías	Códigos	Santillana (1978)	Anaya (1979)	
			N= 36	N= 89	
TIPOS DE PROBLEMAS	Ejercicios de reconocimiento	TP-ER	3	13	
	Ejercicios algorítmicos o de repetición	TP-EA	23	52	
	Problemas de traducción simple o compleja	TP-PT	10	21	
	Problemas de procesos	TP-PP	0	2	
	Problemas sobre situaciones reales	TP-PS	0	0	
	Problemas de investigación matemática	TP-PI	0	1	
SOPORTE	Texto escrito	S-TX	34	88	
	Imagen	Independiente	S-IN	0	0
		Dependiente	S-DE	2	1
CONTEXTO	Contextos efectivos	C-CE	0	2	
	Simulación	C-S	0	0	
	Contexto matemático	C-CM	36	87	
TAREA MATEMÁTICA	Identificar	TM-I	28	52	
	Completar	TM-C	0	0	
	Aplicar	TM-A	8	34	
	Investigar	TM-IN	0	3	

Fig. 4.15 Tabla de distribución de las categorías y subcategorías de los problemas propuestos (2ª época).

Los *tipos de problemas* predominantes son los “ejercicios de algorítmicos o de repetición” con un 64% en Santillana y un 59% en Anaya. Sin embargo, tan sólo un 8% en Santillana y un 15% en Anaya, corresponden a “ejercicios de reconocimiento”. Los “problemas de traducción simple o compleja” aparecen con un 28% en Santillana y con un 23% en Anaya, apareciendo también en ese mismo manual “problemas de proceso” en un 2% y “problemas de investigación matemática” en un 1%.

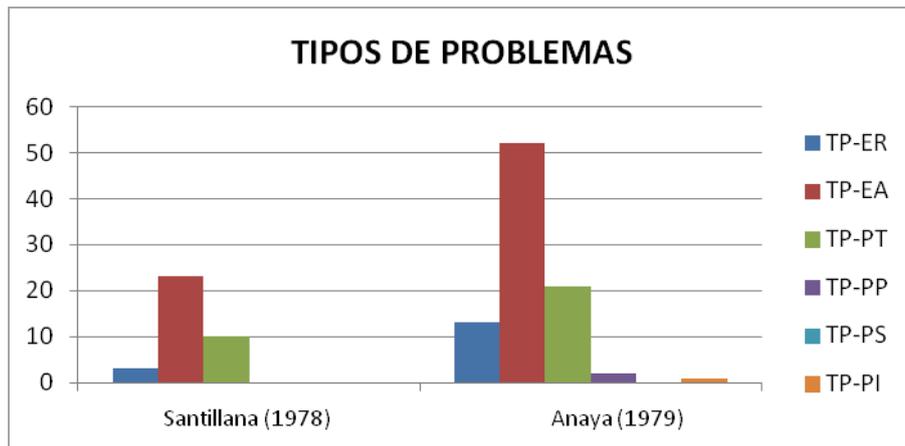


Fig. 4.16 Gráfico de distribución de las subcategorías de los “tipos de problemas” de los problemas propuestos (2ª época).

El *soporte* empleado en ambos manuales es el de “texto escrito”, con un 94% en Santillana y 99% en Anaya, tan sólo un 6% de los problemas analizados en Santillana y un 1% en Anaya están en soporte “imagen dependiente”.

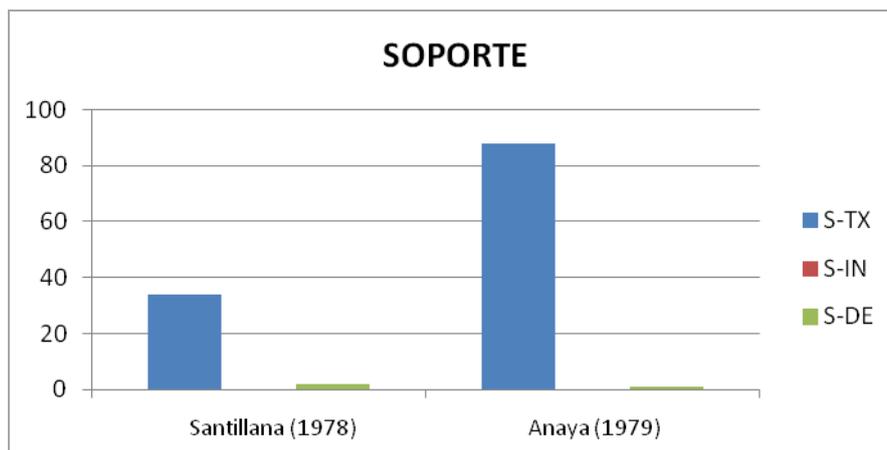


Fig. 4.17 Gráfico de distribución de las subcategorías del “soporte” de los problemas propuestos (2ª época).

Con respecto a los *contextos* en que son formulados los problemas, indicar que en ambos manuales predomina el “matemático” con un 100% en Santillana y un 98% en Anaya, presentando éste último un 2% en “contextos efectivos”.

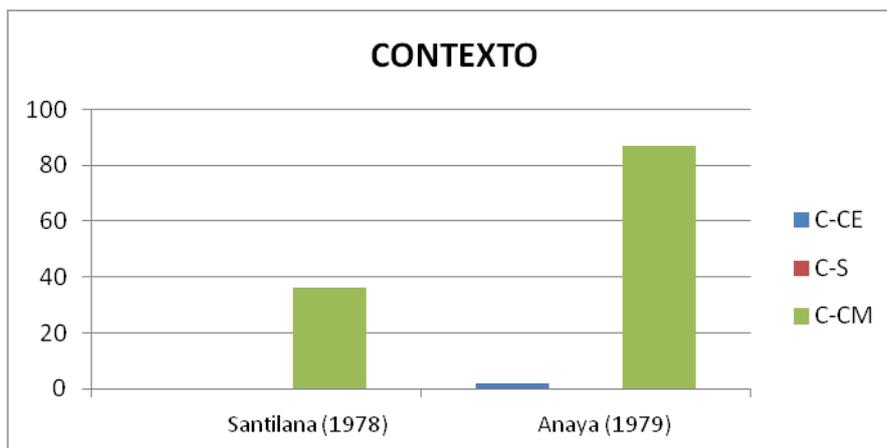


Fig. 4.18 Gráfico de distribución de las subcategorías del “contexto” de los problemas propuestos (2ª época).

La *tarea matemática* que más se emplea en ambos manuales escolares es la de “identificar” con un 78% en Santillana y un 59% en Anaya. Aunque destaca también la tarea de “aplicar” con un 22% en Santillana y un 38% en Anaya. Haciéndose notar igualmente, con un 3% en Anaya, la tarea de “investigar”.

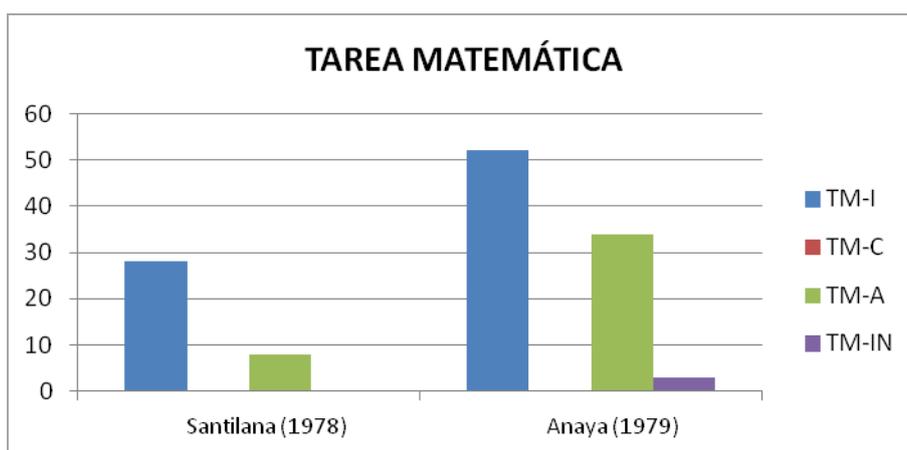


Fig. 4.19 Gráfico de distribución de las subcategorías del “tarea matemática” de los problemas propuestos (2ª época).

4.2.3 Análisis de los problemas de ejemplo

Al igual que en la época anterior, los problemas que aparecen como ejemplo es inferior al de los propuestos. Incluyéndose 18 en el manual de Santillana y 29 en el del Anaya.

Categorías	Subcategorías	Códigos	Santillana (1978)	Anaya (1979)	
			N= 18	N= 29	
TIPOS DE PROBLEMAS	Ejercicios de reconocimiento	TP-ER	2	0	
	Ejercicios algorítmicos o de repetición	TP-EA	11	22	
	Problemas de traducción simple o compleja	TP-PT	5	5	
	Problemas de procesos	TP-PP	0	2	
	Problemas sobre situaciones reales	TP-PS	0	0	
	Problemas de investigación matemática	TP-PI	0	0	
SOPORTE	Texto escrito	S-TX	17	29	
	Imagen	Independiente	S-IN	0	0
		Dependiente	S-DE	1	0
CONTEXTO	Contextos efectivos	C-CE	0	2	
	Simulación	C-S	0	0	
	Contexto matemático	C-CM	18	27	
TAREA MATEMÁTICA	Identificar	TM-I	13	22	
	Completar	TM-C	0	0	
	Aplicar	TM-A	5	7	
	Investigar	TM-IN	0	0	

Fig. 4.20 Tabla de distribución de las categorías y subcategorías de los problemas de ejemplo (2ª época).

Con respecto a los *tipos de problemas* que abundan en ambos manuales, destacan principalmente los “ejercicios algorítmicos o de repetición” con un 61% en Santillana y un 76% en Anaya. Asimismo, “los problemas de traducción simple o compleja” aparecen con un 28% en Santillana y con un 17% en Anaya. En menor proporción se recogen los “ejercicios de reconocimiento” y los “problemas de procesos”, haciéndose notar los primeros con un 11% en Santillana y con un 7% en Anaya los segundos.

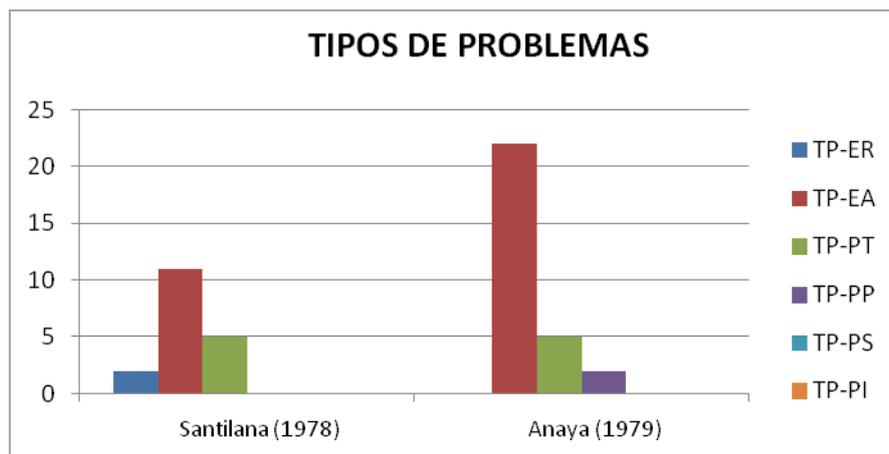


Fig. 4.21 Gráfico de distribución de las subcategorías de los “tipos de problemas” de los problemas de ejemplo (2ª época).

El *soporte* empleado en ambos manuales es el “texto escrito” con un 100% en Anaya y un 95% en Santillana, apareciendo un 5% de “imagen dependiente” en este último manual.

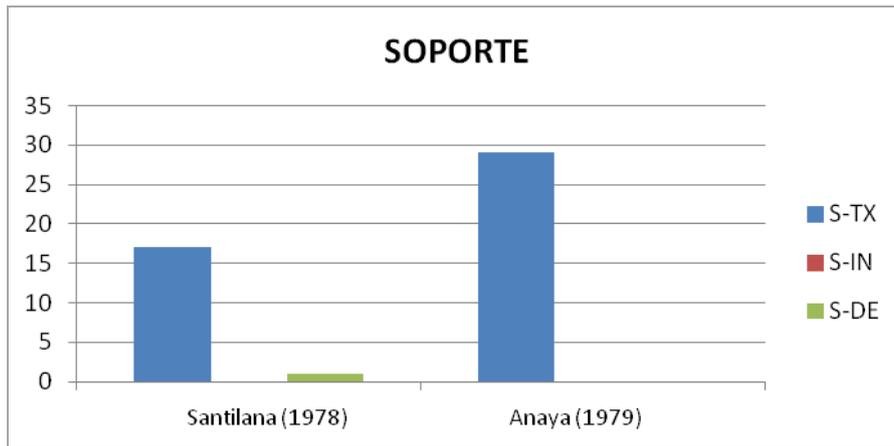


Fig. 4.22 Gráfico de distribución de las subcategorías del “soporte” de los problemas de ejemplo (2ª época).

El *contexto* predominante en los problemas como ejemplos es el “matemático” con un 100% en Santillana y un 93% en Anaya. Asimismo, tiene presencia el “contexto efectivo” con un 7% en Anaya.

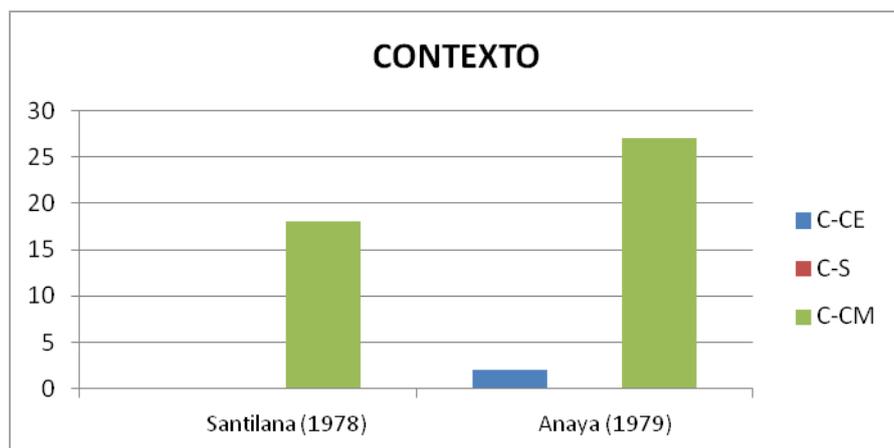


Fig. 4.23 Gráfico de distribución de las subcategorías del “contexto” de los problemas de ejemplo (2ª época).

La *tarea matemática* que sobresale en ambos manuales es la de “identificar”, con un 72% en Santillana y un 76% en Anaya. De igual modo, aunque en menor proporción, se hace notar la tarea de “aplicar”, con un 28% en Santillana y un 24% en Anaya.

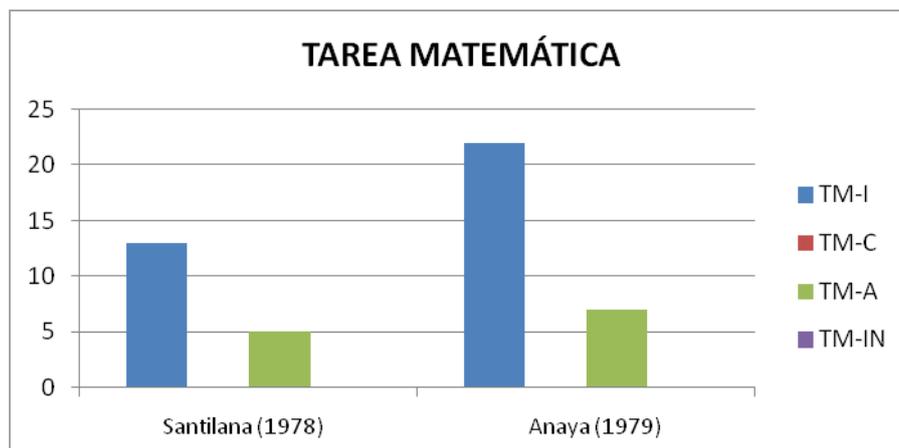


Fig. 4.24 Gráfico de distribución de las subcategorías de la “tarea matemática” de los problemas de ejemplo (2ª época).

4.3 Análisis descriptivo de los textos escolares de 2º de ESO

4.3.1 Análisis microestructural

A pesar de analizar tres manuales escolares referentes a 2º de ESO, este análisis se ha centrado solamente en dos de ellos, ya que el tema de las ecuaciones de segundo grado no es planteado en uno. Concretamente, en el de *Matemáticas 2º: Secundaria* de la editorial Santillana (1997), utilizado durante la época de vigencia de la LOGSE 1990. Sin embargo, el tema 6 (“Iniciación al álgebra”) de este manual, aunque sin ser su cometido, recoge siete problemas sobre las ecuaciones de segundo grado, que sí se han tenido en cuenta para realizar el análisis de contenido.

En los manuales estudiados los *temas* tratados se presentan con nombres prácticamente iguales: “**Ecuaciones**” (Anaya, 2008); y “El lenguaje algebraico. **Ecuaciones**” (SM, 2008).

En la introducción del tema, para contextualizar su exposición, se incorpora un pequeño texto que relaciona los contenidos con la vida diaria. Además, en esa introducción se presenta una ilustración motivadora, ocupando prácticamente toda la primera página que da comienzo al tema, e incluso abarcando parte de la siguiente. Esa ilustración hace referencia a situaciones de la vida cotidiana. En uno de los manuales (Anaya, 2008) la ilustración se acompaña de una actividad sencilla relacionada con los contenidos del tema y que podrá ser resuelta con los conocimientos que ya posee el alumnado.

En ambos manuales se comienza el tema incluyendo actividades relacionadas con conocimientos ya aprendidos, resaltado con el titular “Antes de comenzar, recuerda” (Anaya, 2008), y “Recuerda” (SM, 2008).

Ninguno de los manuales recoge de forma expresa los objetivos que persigue conseguir el tema. Con lo cual, se imposibilita la equiparación inmediata de los objetivos que busca lograr con lo plasmado en el currículo de 2º de ESO.

Los contenidos que se presentan en los manuales de 2º de ESO que hacen referencia a las ecuaciones de segundo grado se recogen en el siguiente cuadro (Fig. 4.24). Percibiéndose que los contenidos específicos sobre estas ecuaciones son prácticamente iguales, aunque los más generales difieren de un manual a otro, según la importancia que le ha otorgado la editorial. El inicio del tema no se reserva para las ecuaciones de segundo grado, que se desarrollan, prácticamente a la mitad.

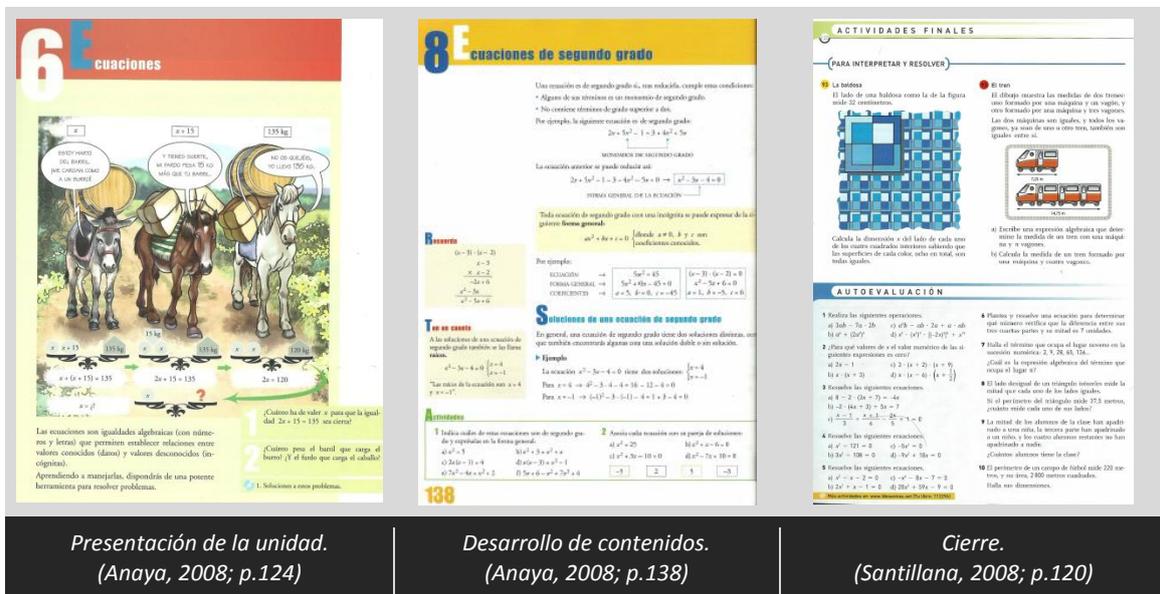
(Anaya, 2008)	(SM, 2008)
- [Unidad] 6 -	- [Unidad] 7 -
Antes de comenzar, recuerda.	Recuerda.
Ecuaciones: significado y utilidad.	Pautas y regularidades.
Ecuaciones: elementos y nomenclatura.	Expresiones algebraicas.
Transposición de términos.	Monomios. Operaciones con monomios.
Resolución de ecuaciones sencillas.	Ecuaciones de primer grado.
Ecuaciones con denominadores.	Ecuaciones de segundo grado.
Procedimiento general para la resolución de ecuaciones de primer grado.	Matemáticas cotidianas.
Resolución de problemas con ecuaciones.	Lo más importante.
Ecuaciones de segundo grado.	Actividades finales.
Resolución de ecuaciones de segundo grado.	Autoevaluación.
Ejercicios y problemas.	Matemáticas a tu alrededor.
Desarrolla tus competencias.	
Autoevaluación.	

Fig. 4.24 Contenidos sobre las ecuaciones de segundo grado incluidos en los manuales escolares de 2º de la ESO.

En estos manuales los contenidos teóricos se alternan con ejemplos. Estos ejemplos, en uno de los manuales (Anaya, 2008) se refuerzan con la proposición de actividades planteadas para que trabaje el alumnado. En el otro manual (Santillana, 2008) los ejemplos se refuerzan, además de con la propuesta de actividades para practicar y aplicar el alumnado, con problemas y ejercicios resueltos. En ambos manuales, se incluyen en el margen izquierdo de las páginas ciertas recomendaciones para facilitar el aprendizaje de los contenidos conceptuales y/o procedimentales explicados. Además, para resaltar ciertos contenidos los enmarcan con recuadros de color. Por último, antes de incluir las actividades finales, en uno de los manuales

(Santillana, 2008) se incluye un apartado dedicado a las *Matemáticas cotidianas*. Se centra en plantear y resolver un supuesto práctico de la vida cotidiana, acompañado de dibujos que contextualizan la situación. Después, este mismo manual, recoge en forma de síntesis lo más importante, resumiendo y resaltando lo fundamental del tema. A continuación, en ambos manuales se exponen las actividades finales, que incluyen los ejercicios y problemas propuestos para que los trabaje el alumnado. En uno de los manuales (Anaya, 2008) se intercalan con problemas resueltos, y en el otro, con aclaraciones y ejemplos (Santillana, 2008). En los temas de estos manuales también se reserva un apartado para presentar las Matemáticas de una manera divertida y práctica, a través de referencias históricas y situaciones curiosas y diarias de la vida cotidiana. Aparecen con el titular “Desarrolla tus competencias” (Anaya, 2008) y “Matemáticas a tu alrededor” (Santillana, 2008).

Finalmente, ambos manuales cierran la unidad incorporando actividades de autoevaluación con ejercicios y problemas para resolver. Además, ambos ofrecen la posibilidad de ampliar y completar esta autoevaluación, mediante las actividades que se recogen en un CD-ROM (Anaya, 2008) o a través de una página de Internet, mediante la introducción de un código que posee el libro (Santillana, 2008).



Presentación de la unidad.
(Anaya, 2008; p.124)

Desarrollo de contenidos.
(Anaya, 2008; p.138)

Cierre.
(Santillana, 2008; p.120)

Fig. 4.25 Organización y estructura de una sección de la “presentación”, “desarrollo” y “cierre” de una unidad de 2º de la ESO.

4.3.2 Análisis de los problemas propuestos

Los manuales escolares analizados referentes a 2º de ESO cuentan con un menor número de actividades que en las épocas anteriores, concretamente se han explorado 7 actividades propuestas del manual de Santillana (1997), 23 del manual de SM (2008) y 17 de Anaya (2008).

A continuación se expone el resumen del análisis de los problemas propuestos de estos manuales indicados, según las distintas categorías y subcategorías.

			Santillana (1997)	SM (2008)	Anaya (2008)	
Categorías	Subcategorías	Códigos	N= 7	N= 23	N= 17	
TIPOS DE PROBLEMAS	Ejercicios de reconocimiento	TP-ER	0	0	1	
	Ejercicios algorítmicos o de repetición	TP-EA	3	12	9	
	Problemas de traducción simple o compleja	TP-PT	0	5	3	
	Problemas de procesos	TP-PP	3	6	3	
	Problemas sobre situaciones reales	TP-PS	0	0	0	
	Problemas de investigación matemática	TP-PI	1	0	1	
SOPORTE	Texto escrito	S-TX	4	21	15	
	Imagen	Independiente	S-IN	0	0	0
		Dependiente	S-DE	3	2	2
CONTEXTO	Contextos efectivos	C-CE	0	5	2	
	Simulación	C-S	0	0	0	
	Contexto matemático	C-CM	7	18	15	
TAREA MATEMÁTICA	Identificar	TM-I	1	2	1	
	Completar	TM-C	2	1	1	
	Aplicar	TM-A	3	16	15	
	Investigar	TM-IN	1	4	0	

Fig. 4.26 Tabla de distribución de las categorías y subcategorías de los problemas propuestos (3ª época).

Los tipos de problemas predominantes en estos manuales escolares son “los ejercicios algorítmicos”, con un 43% en Santillana y un 52% en SM y en Anaya. Siguiéndole de cerca, los “problemas de proceso”, con un 43% en Santillana, un 26% en SM y un 18% en Anaya. Además, aunque no en todos los manuales, también tienen presencia los “problemas de traducción simple o compleja” y los “problemas de investigación matemática”, los primeros, con un 22% en SM y un 18% en Anaya, y los segundo, con un 14% en Santillana y un 6% en Anaya. También con un 6% se hacen notar los “ejercicios de reconocimiento”, pero únicamente en el manual de Anaya.

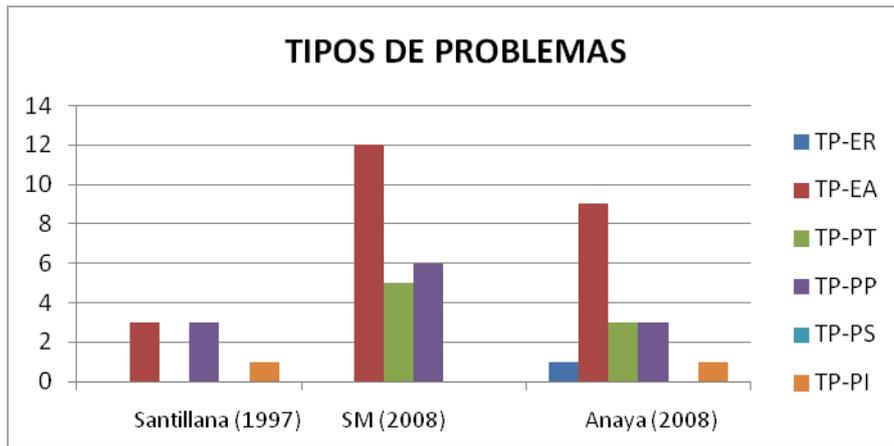


Fig. 4.27 Gráfico de distribución de las subcategorías de los “tipos de problemas” de los problemas propuestos (3ª época).

El soporte de los enunciados que predomina en los tres manuales es el “texto escrito”, con un 57% en Santillana, un 91% en SM y un 88% en Anaya. Apareciendo también, aunque en menor proporción, la “imagen dependiente”, en Santillana con un 43%, en SM con un 9% y en Anaya con un 12%.

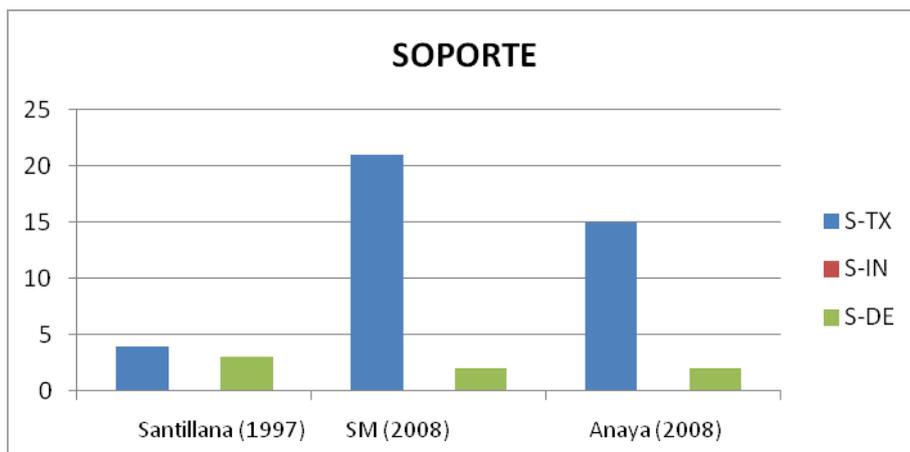


Fig. 4.28 Gráfico de distribución de las subcategorías del “soporte” de los problemas propuestos (3ª época).

El contexto predominante en los tres manuales es el “matemático”, con un 100% en Santillana, un 79% en SM y un 88% en Anaya. Tan solo aparece el “contexto efectivo” en SM con un 21% y en Anaya con un 12%.

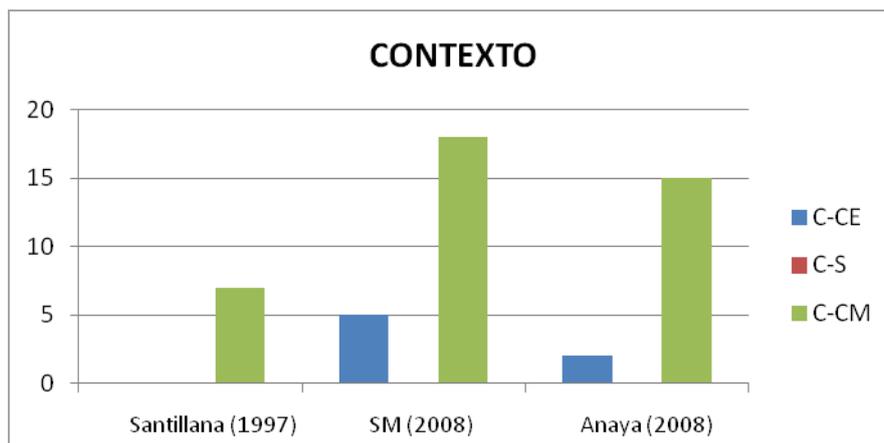


Fig. 4.29 Gráfico de distribución de las subcategorías del “contexto” de los problemas propuestos (3ª época).

Todas las subcategorías de la *tarea matemática* tienen cabida en los problemas propuestos de la ESO, aunque con porcentajes diferentes. Despunta la de “aplicar”, con un 44% en Santillana, un 70% en SM y un 88% en Anaya. La tarea de “identificar” y de “completar” se hace también notar, aunque en menor proporción, en el primer caso, con un 14% en Santillana, 8% en SM y un 6% en Anaya, y en el segundo, con un 28% en Santillana, un 4% en SM y un 6% en Anaya. Sin embargo, la tarea de “investigar” solamente aparece en dos manuales, con un 14% en Santillana y con un 18% en SM

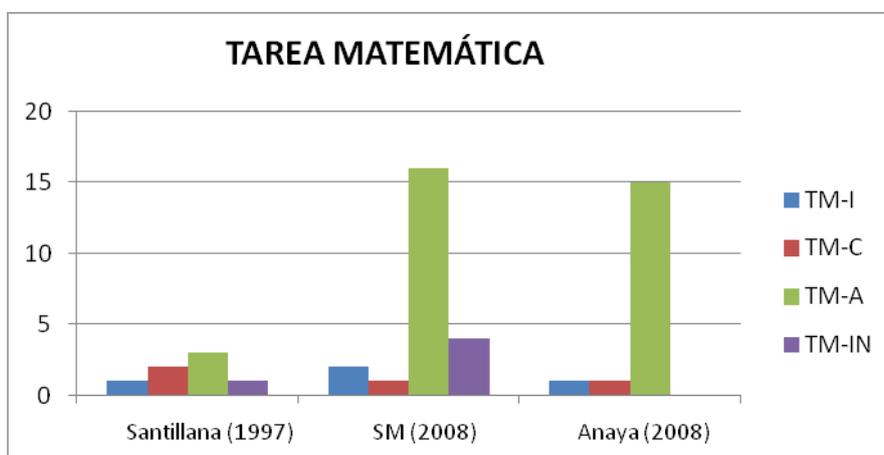


Fig. 4.30 Gráfico de distribución de las subcategorías de la “tarea matemática” de los problemas propuestos (3ª época).

4.3.3 Análisis de los problemas de ejemplo

Dos son los manuales de 2º de ESO donde aparecen problemas como ejemplo, el de SM (2008) y el de Anaya (2008), incluyendo cada uno de ellos 6 problemas.

Categorías	Subcategorías	Códigos	SM (2008)	Anaya (2008)
			N= 6	N= 6
TIPOS DE PROBLEMAS	Ejercicios de reconocimiento	TP-ER	1	1
	Ejercicios algorítmicos o de repetición	TP-EA	3	4
	Problemas de traducción simple o compleja	TP-PT	2	1
	Problemas de procesos	TP-PP	0	0
	Problemas sobre situaciones reales	TP-PS	0	0
	Problemas de investigación matemática	TP-PI	0	0
SOPORTE	Texto escrito	S-TX	6	5
	Imagen	Independiente	S-IN	0
		Dependiente	S-DE	0
CONTEXTO	Contextos efectivos	C-CE	0	0
	Simulación	C-S	0	0
	Contexto matemático	C-CM	6	6
TAREA MATEMÁTICA	Identificar	TM-I	4	5
	Completar	TM-C	0	0
	Aplicar	TM-A	2	1
	Investigar	TM-IN	0	0

Fig. 4.31 Tabla de distribución de las categorías y subcategorías de los problemas de ejemplo (3ª época).

En relación a los *tipos de problemas* predominantes, despuntan los “ejercicios algorítmicos o de repetición”, con un 50% en SM y un 68% en Anaya. Destacando también los “problemas de traducción simple o compleja”, con un 34% en SM y un 16% en Anaya. Repitiéndose este 16%, en ambos manuales, en los “ejercicios de reconocimiento”.

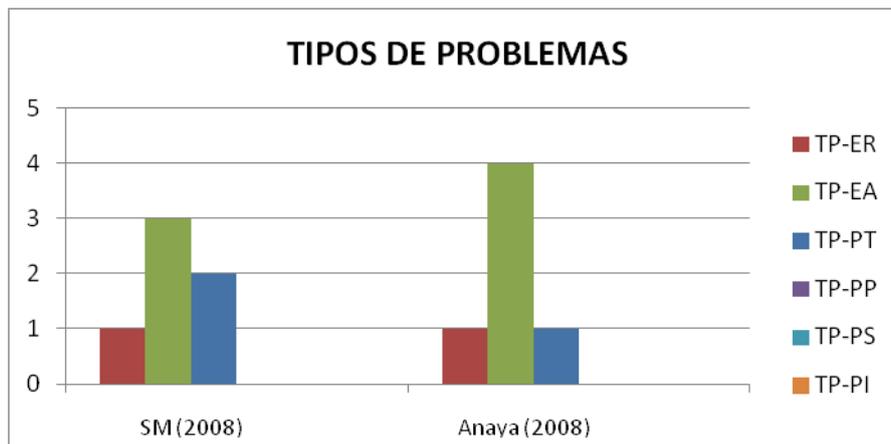


Fig. 4.32 Gráfico de distribución de las subcategorías de los “tipos de problemas” de los problemas de ejemplo (3ª época).

El *soporte* que aparece en ambos manuales es el “texto escrito” con un 100% en SM y un 84% en Anaya. Teniendo también presencia la “imagen dependiente”, aunque solamente en el manual de Anaya, con un 16%.

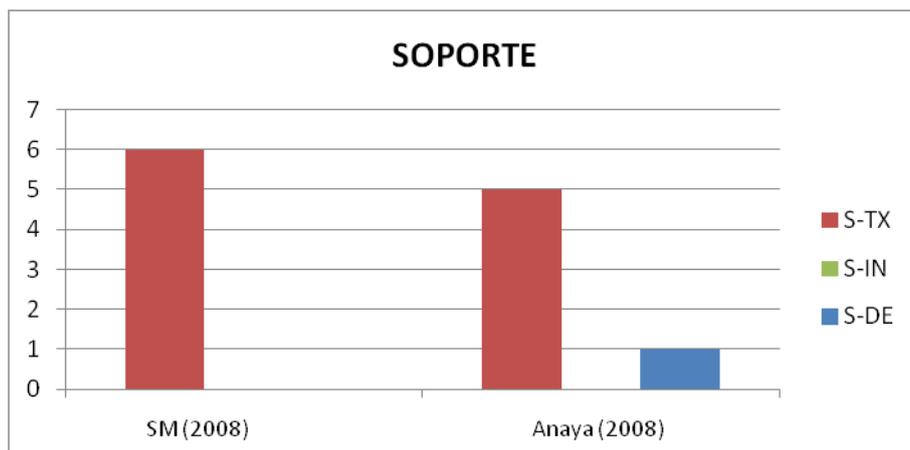


Fig. 4.33 Gráfico de distribución de las subcategorías del “soporte” de los problemas de ejemplo (3ª época).

El único *contexto* que aparece en la totalidad de problemas analizados en ambos manuales es el “matemático”.

La *tarea matemática* predominante es la de “identificar”, con un 66% en SM y un 84% en Anaya. La tarea de “aplicar” también figura, aunque en menor proporción, con un 34% en SM y un 16% en Anaya.

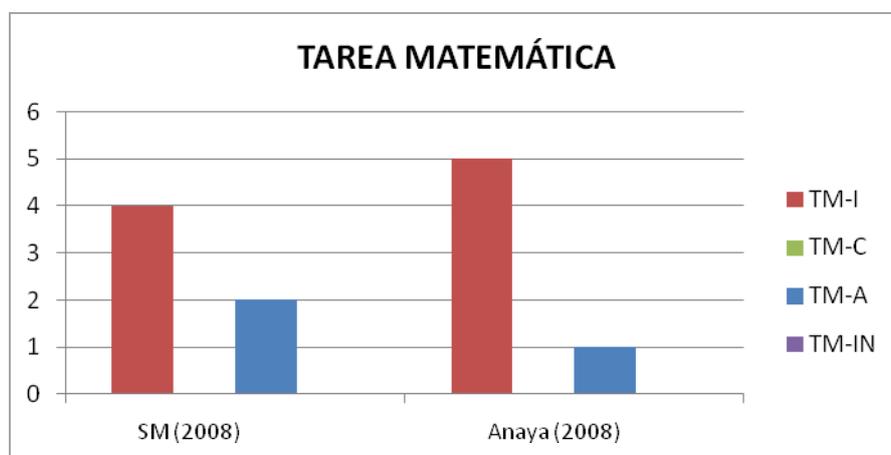


Fig. 4.34 Gráfico de distribución de las subcategorías de la “tarea matemática” de los problemas de ejemplo (3ª época).

4.3.4. Análisis de los problemas para la evaluación

De las tres épocas analizadas, es en la de ESO, donde se encuentran manuales escolares que incluyen problemas para la evaluación. Sin embargo, dentro de esta época no todos los manuales los incluyen, solamente los que se rigen por la LOE (2006), concretamente el de SM (2008), incluyendo 3 problemas y el de Anaya (2008) 2 problemas.

Categorías	Subcategorías	Códigos	SM (2008)	Anaya (2008)
			N= 3	N= 2
TIPOS DE PROBLEMAS	Ejercicios de reconocimiento	TP-ER	0	1
	Ejercicios algorítmicos o de repetición	TP-EA	2	1
	Problemas de traducción simple o compleja	TP-PT	1	0
	Problemas de procesos	TP-PP	0	0
	Problemas sobre situaciones reales	TP-PS	0	0
	Problemas de investigación matemática	TP-PI	0	0
SOPORTE	Texto escrito	S-TX	3	2
	Imagen	Independiente	S-IN	0
		Dependiente	S-DE	0
CONTEXTO	Contextos efectivos	C-CE	0	0
	Simulación	C-S	0	0
	Contexto matemático	C-CM	3	2
TAREA MATEMÁTICA	Identificar	TM-I	0	0
	Completar	TM-C	0	0
	Aplicar	TM-A	3	1
	Investigar	TM-IN	0	1

Fig. 4.35 Tabla de distribución de las categorías y subcategorías de los problemas para la evaluación (3ª época).

Acercas de los *tipos de problemas* que sobresalen en ambos manuales, predominan los “ejercicios algorítmicos o de repetición”, con un 67% en SM y un 50% en Anaya. Además, también se hacen notar los “ejercicios de reconocimiento” y los “problemas de traducción simple o compleja”, los primeros con un 50% en Anaya, y los segundos, con un 33% en SM.

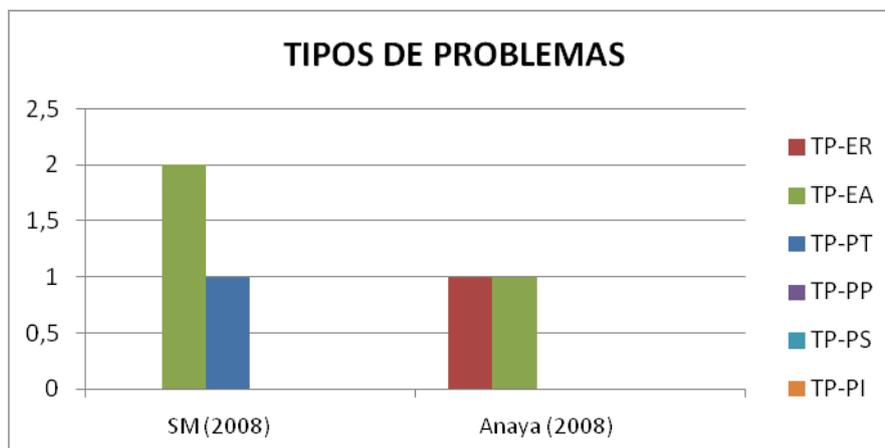


Fig. 4.36 Gráfico de distribución de las subcategorías de los “tipos de problemas” de los problemas para la evaluación (3ª época).

El *soporte* que aparece para los enunciados de los problemas es el “texto escrito”, con un 100% en ambos manuales. De igual manera, el único *contexto* tratado en ambos manuales es el “matemático”.

La *tarea matemática* predominante es la de “aplicar”, con un 100% en SM y un 50% en Anaya. Despuntando en este último manual, con el otro 50%, la tarea de “investigar”.

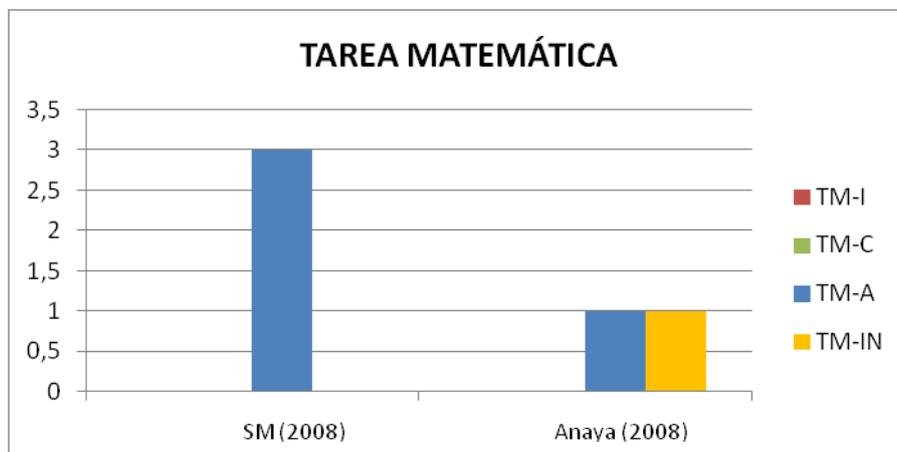


Fig. 4.37 Gráfico de distribución de las subcategorías de la “tarea matemática” de los problemas para la evaluación (3ª época).

4.4 Síntesis y discusión de los resultados relevantes del análisis

A través del **análisis microestructural** de las lecciones o unidades relacionadas con las ecuaciones de segundo grado de los manuales escolares de Matemáticas estudiados, se detecta como en las distintas épocas (4º de Bachillerato Elemental [LOEM 1953], 8º de EGB [LGE 1970] y 2º de ESO [LOGSE 1990 y LOE 2006]) se promueven diferentes modos de actuación vinculados a una organización y sucesión de contenidos y de actividades propios de cada una de ellas. Dando lugar, a que entre las distintas épocas, se aprecien diferencias peculiares en cada una de las partes de la lección o unidad didáctica: *presentación, desarrollo y cierre*.

En el siguiente esquema se sintetizan las diferencias y semejanzas con respecto a la organización y sucesión de contenidos y de actividades que se dan entre las lecciones o unidades didácticas de las diferentes épocas estudiadas.

		4º Bach.	8º EGB	2º ESO	
Partes de la lección o unidad	Aspectos estudiados				
PRESENTACIÓN	Introducción de la lección o unidad	Texto introductorio			
		Ilustración motivadora			
		Conocimientos previos			
		Actividades de repaso			
	Objetivos	Explícitos			
Implícitos					
DESARROLLO	Nº de lecciones o unidades sobre las ecuaciones de segundo grado	+ 3			
		- 2			
	Desarrollo de las ecuaciones de segundo grado en la lección o unidad	Al comienzo			
		Mitad			
		Final			
	Sucesión de contenidos teóricos	Con ejemplos			
Con ejemplos y actividades propuestas					
CIERRE	Síntesis de la lección o unidad				
	Contenidos complementarios				
	Actividades propuestas				
	Autoevaluación				

Fig. 4.38 Síntesis del análisis microestructural de las lecciones o unidades de las ecuaciones de segundo grado de los manuales de Matemáticas estudiados.

En las tres épocas se *introduce* la lección o unidad de forma diferente. En los manuales de Bachillerato Elemental se comienza directamente desarrollando un apartado de la lección. Con los manuales de 8º de EGB se empieza a apreciar la inclusión de actividades de repaso al comienzo de las unidades didácticas. Sin embargo, será en los manuales de 2º de ESO donde adquiera mayor importancia la apertura de la unidad, incluyendo un texto introductorio acompañado de una ilustración motivadora. Además, en esta entrada reservan un lugar para los conocimientos previos y las actividades de repaso. Por tanto, se deduce que con el paso del tiempo a la apertura de las lecciones o unidades didácticas se le ha ido otorgando cada vez más importancia, contribuyendo así a motivar el aprendizaje del alumnado.

En casi ninguna de las lecciones o unidades de los manuales escolares de las distintas épocas se incluyen, de manera explícita, los objetivos que se pretenden alcanzar. Sin embargo, habría que probar si están presentes de manera implícita, deduciéndose a través de las nociones teóricas y las actividades propuestas.

Con respecto, al *desarrollo* de contenidos se observa una tendencia, conforme se avanza en el tiempo, a disminuir el número de unidades didácticas destinadas a las

ecuaciones de segundo grado, y a dejar de reservar el inicio de la unidad a ellas, para ser desarrolladas principalmente a la mitad del tema. Por consiguiente, con el sentido que se le está dando a las nuevas unidades didácticas, se consigue sintetizar todos los conocimientos similares en una única unidad y que el alumnado aprenda las ecuaciones de segundo grado explorando otros contenidos antes de llegar a ellas.

Las tres épocas coinciden en introducir muchos de sus contenidos teóricos a partir de los ejemplos y problemas resueltos, que luego se perfeccionarán con las actividades propuestas recogidas al cierre de la lección o unidad, con el fin de que el alumnado pueda desarrollar y completar sus conocimientos matemáticos. Sin embargo, conforme se avanza en el tiempo, se pierde la tendencia de incluir únicamente las actividades propuestas al final, dejando paso a la inclusión de actividades a lo largo de toda la unidad. De esta manera, el alumnado, poco a poco, va fijando los conocimientos conforme se le van enseñando y no sólo al término.

En el *cierre* de la lección o unidad también se aprecian diferencias entre las distintas épocas. La línea que se sigue es concederle cada vez más protagonismo, con la finalidad de destacar y reforzar las nociones teóricas y los contenidos matemáticos aprendidos. Para ello, se pasa de no incluir nada, en la primera época, a recoger un pequeño resumen de los contenidos esenciales de la unidad, en la segunda, para finalizar incorporando, en la tercera época, además de las síntesis de contenidos, un apartado para presentar las Matemáticas de una manera divertida y práctica, además de una autoevaluación, con la intención de comprobar si se han aprendido los contenidos instruidos.

Por otra parte, el **análisis de contenido** ha permitido, en primer lugar, una exploración de la variedad de problemas que recogen los manuales escolares de Matemáticas en diferentes épocas (4º de Bachillerato Elemental [LOEM 1953], 8º de EGB [LGE 1970] y 2º de ESO [LOGSE 1990 y LOE 2006]). En segundo lugar, una descripción y verificación de cada una de las categorías y subcategorías establecidas previamente, revelando cada una de ellas unos resultados bastantes particulares en cada una de las épocas.

Categorías	Subcategorías	PROBLEMAS PROPUESTOS			PROBLEMAS DE EJEMPLO			PROBLEMAS COMO EVALUACIÓN		
		4º Bach.	8º EGB	2º ESO	4º Bach.	8º EGB	2º ESO	4º Bach.	8º EGB	2º ESO
TIPOS DE PROBLEMAS	Ejercicios de reconocimiento									
	Ejercicios algorítmicos o de repetición									
	Problemas de traducción simple o compleja									
	Problemas de procesos									
	Problemas sobre situaciones reales									
	Problemas de investigación matemática									
SOPORTE	Texto escrito									
	Imagen	Independiente								
		Dependiente								
CONTEXTO	Contextos efectivos									
	Simulación									
	Contexto matemático									
TAREA MATEMÁTICA	Identificar									
	Completar									
	Aplicar									
	Investigar									

Fig. 4.39 Síntesis del análisis de contenido realizado de acuerdo al sistema de categorías establecido para el tratamiento de los problemas recogidos en los manuales escolares de Matemáticas estudiados.

Tipos de problemas

A través de los tipos de problemas se revela que, entre los *problemas propuestos*, los “problemas de traducción simple o compleja” son los que más abundan en la primera época. Sin embargo, con el paso del tiempo, la tendencia que sigue es a disminuir, llegando incluso a la mitad en la última época. De modo similar, pero a la inversa, se sigue esta línea con respecto a la variedad de tipos de problemas. Existiendo más variedad en la última época que en la del Bachillerato Elemental, donde tan sólo aparecen TP-EA, TP-PT y TP-PP. Además, esta categoría evidencia que, entre los propuestos, en las dos últimas épocas destacan los “ejercicios algorítmicos o de repetición”, que como ya se vio en el marco teórico, no son verdaderos problemas de Matemáticas, corroborándolo las diferencias entre problema matemático y ejercicio de aplicación establecidas por Juidías y Rodríguez (2007: 261). Esto hace plantear el papel que desempeña la resolución de los problemas en la enseñanza de las Matemáticas, como recoge Blanco (1993: 30) indicando que uno de los papeles que desempeña la resolución de problemas en la enseñanza de las Matemáticas es la *Enseñanza para resolver problemas*, de ahí la colocación de los problemas al final de cada capítulo o

después de la introducción de algún concepto o algoritmo. Este planteamiento va en contra de las afirmaciones de los currículos sobre la resolución de los problemas en la enseñanza de las Matemáticas e impiden a los alumnos aprender *Matemáticas vía la resolución de problemas* (García Cruz, 2008; Blanco, 1993:30).

Por otro lado, indicar que los *problemas como ejemplos* son menos numerosos que los propuestos, en todos los manuales analizados de las diferentes épocas. Además, los “ejercicios algorítmicos o de repetición” son los que más abundan en todas las épocas. Con el paso del tiempo tienden a desaparecer los “problemas de proceso”, sin embargo, se mantienen los “problemas de traducción simple o compleja” en todas las épocas, aunque con un porcentaje bastante inferior a la primera subcategoría mencionada.

De los *problemas planteados como evaluación*, destacar que sólo se encuentran, como se refleja en el análisis microestructural, en la última época estudiada. Los tipos de problemas siguen la misma tendencia que en los casos anteriores, predominando de modo claro los “ejercicios algorítmicos o de repetición”, completándose en menor proporción con “ejercicios de reconocimiento” y “problemas de traducción simple y compleja”.

Soporte

A través del soporte de los enunciados de los problemas estudiados, se descubre que el “texto escrito” es la subcategoría predominante en las tres épocas, apoyando la visión de L. V. Zankov, Vygotski y otros (cit. en Giménez, 1984: 483) que precisan que “instrucciones verbales pueden quedar sin efecto por una determinada observación visual”. Además, esta tendencia la siguen tanto los problemas propuestos, como los de ejemplo, y los de evaluación. Aunque también hay que resaltar el incremento que experimenta el uso de la “imagen dependiente” en la época de ESO. Lo que avala la perspectiva de Chamorro (2003: 283-284), destacando entre los factores a tener en cuenta para comprender el enunciado de un problema, la capacidad perceptiva relacionada con la exploración visual.

Contexto

En las tres épocas es notorio el uso masivo del contexto “matemático” en los enunciados de los problemas propuestos, obviando que los enunciados deben ser

interesantes, atractivos y novedosos para lograr un aprendizaje significativo (Ortega, Pecharromán y Sosa, 2011).

En los problemas como ejemplos el contexto que prevalece también es el “matemático”. Sin embargo, en las primeras dos épocas, aparecen igualmente, aunque en menor proporción, enunciados con “contextos efectivos”, en contra de *contextualizar los problemas con situaciones cotidianas del entorno del alumno* (Pifarré y Sanuy, 2001: 307).

En los problemas como evaluación el único contexto que aparece en los enunciados de los problemas analizados es el “matemático”.

Tarea matemática

En los problemas propuestos predominan las tareas de “aplicar” e “identificar”, en las tres épocas, prevaleciendo como exclusivas en las dos primeras. Sin embargo, la tarea de “completar” e “investigar” se encuentra presente también, aunque en menor medida, en la tercera época, reforzando lo que recoge Santos (1997; cit. en Sepúlveda, Media y Sepúlveda, 2009: 90) al indicar que los *problemas deben demandar de los estudiantes un plan de reflexión, es decir, que no puedan resolverse instantáneamente*.

Igualmente, en las tres épocas, en los problemas como ejemplo, sobresale la tarea de “identificar” sobre la segunda tarea predominante que es la de “aplicar”.

En los problemas como evaluación, las tareas matemáticas que reflejan los problemas analizados son la de “aplicar” y en menor medida la de “investigar”.

Después de este análisis se puede afirmar que es notorio como las diferentes épocas educativas no cambian con el profesor situado en el centro de los métodos de enseñanza, no considerando *la nueva perspectiva constructivista (...) donde el alumnado pasa a ser el núcleo del proceso de enseñanza-aprendizaje y se empiezan a plantear problemas más abiertos y menos rutinarios* (Riordan y Noyce, 2001; cit. en Gasco Txabari, 2013: 2).

5. CONCLUSIONES E IMPLICACIONES

Los resultados obtenidos a lo largo del desarrollo del trabajo han permitido obtener las conclusiones necesarias para lograr los objetivos marcados al comienzo del mismo.

En el siguiente esquema se muestra la relación entre los objetivos de la investigación, las cuestiones específicas y las conclusiones.

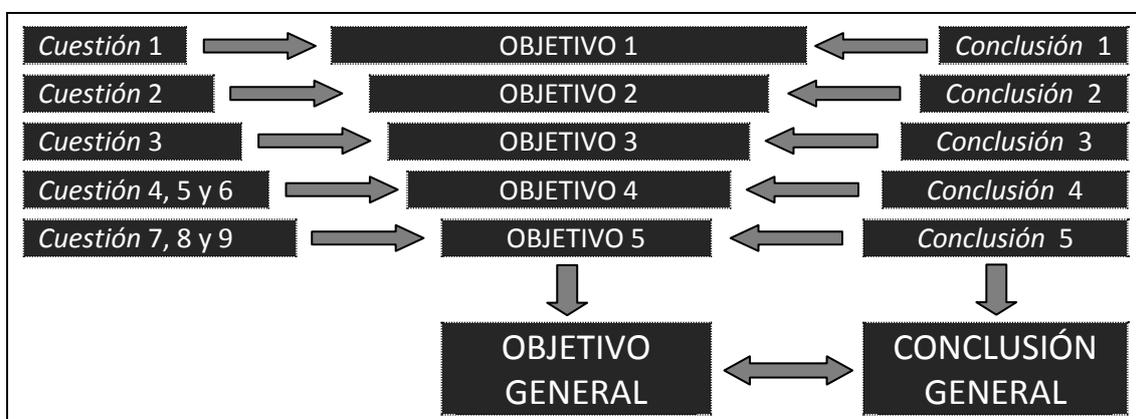


Fig. 5.1 Relación entre los objetivos de la investigación con las cuestiones y las conclusiones.

Conclusiones

1. Con el primer objetivo planteado se pretende “realizar una revisión bibliográfica sobre el fundamento de la resolución de problemas y el manual escolar, que permita cimentar la investigación”. La información obtenida tras el proceso de búsqueda y recopilación de las fuentes bibliográficas usadas en el trabajo, ha permitido descubrir, entre otros asuntos, cómo la resolución de problemas ha ido ocupando un lugar destacado en la enseñanza de las

Matemáticas y en los currículos escolares de cualquier país, además de evidenciar que el manual escolar ha sido y es el material didáctico por excelencia empleado por los profesores en su trabajo diario en las aulas. Lo que justifica la existencia del importante conjunto de investigaciones que existen sobre el tema, tanto a nivel nacional como internacional, centradas tanto en la valoración del libro de texto en general como en el libro de texto del área de Matemáticas en particular, ofreciendo unos argumentos valiosos para futuras investigaciones.

2. El segundo objetivo enunciado persigue “*conocer y equiparar las propuestas curriculares de las distintas leyes de educación por las que se deben guiar los manuales escolares que han sido objeto de estudio de este trabajo prestando especial atención a la resolución de problemas y a las ecuaciones de segundo grado*”. Partiendo de las dimensiones del concepto de currículo: *objetivos, contenidos, metodología y evaluación*, se aprecian ciertas diferencias, pero también semejanzas, entre los programas curriculares dictados por las Leyes de Educación de 1953, 1970, 1990 y 2006, percibiéndose una concepción de las Matemáticas propia del momento histórico que se está dando. Con respecto a los *objetivos*, resaltar que casi ninguno de los programas recoge referencias explícitas sobre las ecuaciones de segundo grado, aunque hay que destacar que entre sus invariantes se encuentra la *capacidad para resolver problemas*. Por el contrario, en los *contenidos* las ecuaciones de segundo grado tienen presencia continuada en los cuatro programas, aunque incluidas en cursos diferentes. En la *metodología* y en la *evaluación* tampoco se recogen prácticamente referencias explícitas a estas ecuaciones. De la metodología, destacar que no siempre se ha recogido de forma específica para las Matemáticas ni de forma muy extendida. Sin embargo, en los criterios de evaluación de los diferentes planes de estudio, se aprecia un cambio importante, detallándose y aumentándose cada vez más, y distinguiendo en ellos la resolución de problemas. Además, aunque no era cometido de este objetivo, se han apreciado ciertas diferencias entre lo que dicta el currículo y lo que se muestra en los manuales escolares. Por ejemplo, se puede resaltar que en el Real Decreto 1631/2006 (LOE 2006) se recogen las ecuaciones de segundo grado en el tercer curso y no en el segundo curso como aparece en los manuales de 2º de ESO analizados; o como *la vida ordinaria o*

cotidiana del alumno se fija como un contexto importante para la resolución de problemas, contexto bastante ausente en los problemas analizados.

3. En el tercer objetivo propuesto se planteaba “*analizar las formas de organización y sucesión de contenidos y actividades de cada lección o unidad dedicada a las ecuaciones de segundo grado, que están implicadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje*”. El análisis microestructural evidencia que las lecciones y unidades analizadas han intentado ofrecer en las distintas épocas educativas una estructura organizativa adecuada para facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Para ello, propone al profesor y al alumno seguir una instrucción fundamentada en intercalar a lo largo de la lección o unidad los contenidos teóricos con los ejemplos y problemas resueltos y sin resolver. Sin embargo, no siempre se ha seguido la misma organización y sucesión de contenidos y actividades sino que cada época ha promovido una forma distinta de actuación. Se ha podido comprobar que con el paso del tiempo, la *presentación, el desarrollo y cierre* de las unidades didácticas se han ido ampliando y enriqueciendo paso a paso hasta llegar a la época de ESO, donde se desarrolla una unidad más completa aspirando a reforzar el aprendizaje del alumno.
4. El cuarto objetivo pretende “*obtener información sobre el número de problemas de ecuaciones de segundo grado disponibles en los manuales escolares y analizar si ese número varía en función de la época a la que pertenece el manual*”. El número de problemas sobre las ecuaciones de segundo grado explorados en los manuales escolares ha sido un total de 315 problemas propuestos, 105 problemas como ejemplos y 5 problemas planteados como evaluación, siendo diferente la distribución en cada una de las épocas educativas. Apareciéndose, conforme se avanza en el tiempo, una reducción considerable de la dotación de problemas sobre este tema en los manuales escolares. Con respecto a los problemas propuestos, se pasa de incluir 143 en Bachillerato Elemental, a plantear 125 en EGB y 47 en ESO. Al igual, esta diferencia también se mantiene en los problemas como ejemplos, pasando de incorporar inicialmente 36 en la primera época del Bachillerato Elemental, repuntando con 47 en la época de EGB, para luego volver a decrecer incluyendo solamente 12 problemas en la época de ESO. Sin embargo, es en esta última

época donde se incorporan problemas como evaluación a las unidades didácticas. Con estos resultados, se puede reflexionar que a pesar de incluirse en esta última época los problemas como evaluación, se aprecia una carencia de problemas sobre las ecuaciones de segundo grado en función de los incluidos en los manuales de épocas anteriores. Por tanto, no está compensada la dotación de problemas disponibles en los manuales.

5. El quinto y último objetivo buscaba “*describir y estudiar desde el punto de vista del análisis de contenido, los problemas de ecuaciones de segundo grado, a través de los tipos de problemas incluidos en los manuales escolares (propuestos, de ejemplos, y de evaluación)*”. El análisis de contenido realizado según el sistema de categorías acordado ha permitido conocer el tratamiento que reciben los problemas en los manuales escolares. Los problemas propuestos se imponen sobre los de ejemplos y de evaluación, incluyéndose fundamentalmente al final de la lección o unidad temática. Sin embargo, los tres coinciden en el *tipo de problema* que predomina sobre ellos, siendo los “ejercicios algorítmicos o de repetición”, además de ser común en todas las épocas. Por otra parte, el *soporte* no ha sufrido ninguna modificación sustancial en las diferentes épocas, permaneciendo el “texto escrito” como principal soporte de presentación de los problemas de ecuaciones de segundo grado, sin emplear la imagen para clarificar los enunciados. De igual forma, el *contexto* tampoco ha sufrido cambios en las diferentes épocas, prevaleciendo el “contexto matemático” alejado de la vida cotidiana del alumno. Finalmente, con respecto a la *tarea matemática* necesaria para descubrir la solución del problema, prevalece en las tres épocas la de “aplicar” un algoritmo, una propiedad o un teorema para resolver la tarea implícita en el enunciado, sin necesidad de buscar la solución recurriendo a otros métodos o manipular la información. Por tanto, estos resultados apoyan la tendencia del predominio de los problemas *rutinarios* en todas las épocas estudiadas.

Como colofón a estas conclusiones se expone la conclusión general de la investigación:

Los problemas de ecuaciones de segundo grado de los manuales escolares de 4° de Bachillerato Elemental, 8° de EGB y 2° de ESO, presentan desde la primera época hasta la última un lugar estratégico en la lección o unidad didáctica, asociándose y reforzando los conceptos teóricos alojados también en ellas, con el fin de apoyar el proceso de enseñanza y aprendizaje en el que se encuentran inmerso tanto profesores como alumnos. Sin embargo, al explorar sus enunciados se perciben ciertas deficiencias, dadas por la poca diversidad de tipos de problemas, soporte, contexto y tarea matemática destinados en ellos. Por tanto, se considera oportuno que la pluralidad y heterogeneidad de estas componentes podría contribuir a mejorar el aprendizaje del alumno contrarrestando las dificultades que se puedan presentar en su instrucción, originándose una transformación de problemas *rutinarios* en auténticos y valorados problemas *no rutinarios*.

Implicaciones

A pesar de considerar concluida esta investigación, es comprensible que queden algunos aspectos por completar. Por tanto, el trabajo presentado supone la primera etapa de un estudio más profundo en el cual se puede ampliar la investigación por los siguientes caminos:

1. El primero de ellos sería analizar otros contenidos comunes en los manuales escolares estudiados, para comparar sus resultados.
2. La segunda vía sería incluir en la investigación otros manuales del mismo curso pero de editoriales diferentes pertenecientes a las mismas épocas estudiadas. De esta forma se verificaría si los resultados siguen la misma línea, o si existen diferencias entre editoriales.
3. La tercera ruta abierta se refiere a aplicar el estudio a otros cursos distintos pero pertenecientes a las mismas épocas. En este caso sería interesante estudiar el tratamiento de los problemas de las ecuaciones de segundo grado durante varios cursos para observar si hay cambios o uniformidad entre ellos.
4. Además, como se ha visto, este estudio se enmarca de acuerdo a las categorías de Van Dormolen (1986; cit. en Bruno y Cabrera, 2006: 127) dentro de los análisis de textos *a priori*, es decir, se analiza el manual escolar sin tener en

cuenta su uso en el aula, tanto por los profesores como por los alumnos. Por tanto, de aquí surgen dos nuevas metas a alcanzar referidas a los otros dos tipos de análisis que diferencia: *a posteriori* y *a tempo*. Concretamente, en el análisis *a posteriori* se analizarían los resultados obtenidos al comparar el aprendizaje sobre las ecuaciones de segundo grado de un grupo de alumnos y lo recogido en uno de los manuales escolares estudiados. En cuanto al análisis *a tempo* se estudiaría el modo en el que el grupo de alumnos y profesores manejan el manual escolar durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.

5. Asimismo, uno de los objetivos cumplido de este trabajo ha sido repasar y comparar las propuestas curriculares por las que se deben guiar los manuales que han sido objeto de estudio. Sin embargo, aunque no era parte de este objetivo se ha comprobado como ciertos aspectos recogidos en los manuales no se ajustan a lo que dicta su currículo. Por tanto, sería conveniente comprobar si lo recogido en los manuales escolares analizados se corresponde con lo marcado en el currículo, abriéndose así una nueva línea de investigación.

6. BIBLIOGRAFÍA

- Aamotsbakken, B. (2007). Capacitación docente en el uso de libros de texto. En *Primer seminario internacional de textos escolares: SITE 2006*. (pp. 117-120). Santiago de Chile: Ministerio de Educación. Recuperado el 10 de febrero de 2014, de http://www.cerlalc.org/libroaldia/libroaldia_8/imagenes/noticias/SITE.pdf
- Abela, J. A. (2002). *Las técnicas de análisis de contenido: Una revisión actualizada*. Sevilla: Fundación Pública Andaluza Centro de Estudios Andaluces. Recuperado el 15 de febrero de 2014, de <http://public.centrodeestudiosandaluces.es/pdfs/S200103.pdf>
- Albarracín, L. y Gorgorio, N. (2013). Problemas de estimación de grandes cantidades: modelización e influencia del contexto. *Relime* [online]. 16(3), 289-315. Recuperado el 3 de marzo de 2014, de <http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v16n3/v16n3a2.pdf>
- Alfaro, C. y Barrantes, H. (2008). ¿Qué es un problema matemático?: Percepciones en la enseñanza media costarricense. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*. 3(4), 83-98. Recuperado el 3 de abril de 2014, de <http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6902>
- Alonso, V., González, A. y Sáenz, O. (1988). Estrategias operativas en la resolución de problemas matemáticos en el ciclo medio de la E.G.B. *Enseñanza de las Ciencias*, 1988, 6 (3), 251-264. Recuperado el 23 de abril de 2014, de <http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/51102>
- Asociación Nacional de Editores de Libros y material de Enseñanza (ANELE). (2013). *La edición de libros de texto en España*. Recuperado el 10 de febrero de 2014, de <http://www.anele.org/pdf/Sector%20de%20Libros%20de%20Texto%202013.pdf>

- Ayllón, M. F. (2012). *Invencción-resolución de problemas por alumnos de educación primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada. Recuperado el 23 de abril de 2014, de <http://digibug.ugr.es/bitstream/10481/27771/1/2116633x.pdf>
- Azcárate, P. y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación*, 340, 341-378. Recuperado el 23 de abril de 2014, de http://www.revistaeducacion.mec.es/re340/re340_13.pdf
- Beltrán, S. y Repetto, E. (2006). El entrenamiento en estrategias sobre la comprensión lectora del enunciado del problema aritmético: un estudio empírico con estudiantes de Educación Primaria. *Revista Española de Orientación y Psicopedagogía*. 17(1), 33-48. Recuperado el 17 de febrero de 2014, de <http://espacio.uned.es/revistasuned/index.php/reop/article/view/11336/pdf>
- Blanco, L. J. (1991). *Conocimiento y acción en la enseñanza de las matemáticas de profesores de EGB y estudiantes para profesores*. Badajoz: Servicio de Publicaciones Universidad de Extremadura.
- Blanco, L. J. (1993). *Consideraciones elementales sobre la resolución de problemas*. Badajoz: Universitas Editorial.
- Blanco, L. J. (1996). La resolución de problemas. Una revisión teórica. *Suma*, 21, 11-20. Recuperado el 14 de marzo de 2014, de <http://revistasuma.es/IMG/pdf/21/011-020.pdf>
- Blanco, L. J. (2013). La Resolución de Problemas como contenido en el Currículo de Matemáticas de Primaria y Secundaria. *Campo Abierto*, 32(1), 137-156. Recuperado el 10 de febrero de 2014, de <http://revistas.ojs.es/index.php/campoabierto/article/view/1868>
- Borja, I. (2005). Caracterización del libro de texto de castellano para la educación primaria colombiana: tipología y componentes. *Revista Iberoamericana de Educación*, 36(2), 2005. Recuperado el 10 de febrero de 2014, de <http://www.rieoei.org/deloslectores/937Alarcon.PDF>
- Bruno, A. y Cabrera, N. (2006). La recta numérica en los libros de texto en España. *Educación Matemática*, 18(3), 125-149. Recuperado el 10 de febrero de 2014, de <http://www.redalyc.org/pdf/405/40518306.pdf>
- Cajaraville, J. A. y Guisande, M. A. (1999). Análisis Didáctico de la Estimación en Cálculo y Medida, a través de los Libros de Texto. En C. Martínez y S. García. *La Didáctica de las Ciencias. Tendencias Actuales. XVIII Encuentros de Didáctica de las Ciencias Experimentales* (pp. 565-573). Coruña: Servicio de publicaciones. Universidade da Coruña. Recuperado el 12 de febrero de 2014, de <http://ruc.udc.es/dspace/bitstream/2183/10880/1/CC%2050%20art%2041.pdf>

- Campistrous, L. y Rizo, C. (2013). La resolución de problemas en la escuela. En *Primer Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe (I CEMACYC)*. Santo Domingo, República Dominicana. Recuperado el 10 de marzo de 2014, de http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/Conferencia_paralela_Campistrous.pdf
- Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, L.J. Blanco (eds), *Investigación en educación matemática: Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Badajoz. Recuperado el 8 de marzo de 2014, de <http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas12SEIEM/Seminario2Castro.pdf>
- Cañadas, M. C., Durán, F., Gallardo, S., Martínez-Santaolalla, M. J., Peñas, M., Villarraga, M., et al. (2002). *Materiales didácticos en la resolución de problemas*. En J. M. Cadeñoso, E. Castro, A. J. Moreno, M. Peñas (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Resolución de problemas* (pp. 101-112). Granada: Universidad de Granada. Recuperado el 23 de abril de 2014, de <http://funes.uniandes.edu.co/268/>
- Cerdán, F. y Puig, L. (1983). Los problemas de matemáticas en el currículum de EGB (ciclo medio): Un estudio cuantitativo-descriptivo desde el punto de vista de su potencial heurístico. *Enseñanza de las Ciencias*, 1(3), 169-185. Recuperado el 8 de marzo de 2014, de <http://ddd.uab.cat/pub/edlc/02124521v1n3p168.pdf>
- Chamorro, M. C. (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid: Pearson Educación.
- Cobo, B. y Batanero, C. (2004). Significados de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 22 (1), 5-18. Recuperado el 5 de marzo de 2014, de <http://ddd.uab.es/pub/edlc/02124521v22n1p5.pdf>
- Cockcroft, W. H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Contreras, L. C. (1998). *Resolución de problemas: un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula*. Tesis doctoral. Universidad de Huelva. Recuperado el 16 de febrero de 2014, de <http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/2953>
- Coronel, M. V. y Curotto, M. M. (2008). La resolución de problemas como estrategia de enseñanza y aprendizaje. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*. 7(2), 463-479. Recuperado el 17 de febrero de 2014, de http://reec.uvigo.es/volumenes/volumen7/ART11_Vol7_N2.pdf

- Díaz, M. V. y Poblete, A. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, 45, 33-41. Recuperado el 23 de abril de 2014, de <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/45/Articulo03.pdf>
- Diccionario enciclopédico Espasa* (1993). Madrid: Espasa-Calpe.
- Diccionario de la Real Academia Española* (2014). Recuperado el 15 de febrero de 2014, de <http://www.rae.es/recursos/diccionarios/drae>
- Diccionario de términos clave de ELE* (2014). Recuperado el 10 de febrero de 2014, de http://cvc.cervantes.es/ensenanza/biblioteca_ele/diccio_ele/
- Figueras, E. (1994). Leer, escribir y comprender matemáticas. Los problemas. *Suma*, 17, 20-34. Recuperado el 12 de febrero de 2014, de <http://revistasuma.es/IMG/pdf/19/020-034.pdf>
- García, M.A. y Guillén, G. (2008). Diseño de un estudio para el análisis de libros de texto de la Enseñanza Secundaria Obligatoria en la Comunidad Valenciana. El caso de la geometría. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, L.J. Blanco (eds), *Investigación en educación matemática: Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Badajoz. Recuperado el 12 de febrero de 2014, de <http://www.uv.es/gutierre/apregeom/archivos2/GarciaGuillen08.pdf>
- García Cruz, J. A. (2008). *La Didáctica de las Matemáticas: una visión general*. Recuperado el 23 de abril de 2014, de <http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/rtee/didmat.htm>
- Garret, R.M. (1988). Resolución de problemas y creatividad: implicaciones para el currículo de ciencias. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 6(3), 224-230. Recuperado el 10 de febrero de 2014, de <http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/51098/92967>
- Gasco, J. (2013). La resolución de problemas en el currículo de matemáticas de Educación Secundaria. *Ikastorratza, e-Revista de didáctica*, 10. Recuperado el 23 de abril de 2014, de http://www.ehu.es/ikastorratza/10_alea/matematika.pdf
- Gaulin, C. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. *Sigma: revista de matemáticas = matematika aldizkaria*, 19, 51-63. Recuperado el 10 de marzo de 2014, de http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_19/7_Tendencias_Actuales.pdf
- Gea, M. M., Batanero, C., Arteaga, P. y Cañadas, G. R. (2013). Justificaciones en el tema de correlación y regresión en textos españoles de bachillerato. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 4(2), 1-19. Recuperado el 15 de marzo de 2014, de <http://www.gente.eti.br/revistas/index.php/emteia/article/view/166>

- Giménez, J. (1984) Sobre los enunciados de problemas que se proponen en matemáticas. En: *Actas de las III Jornadas Sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*. (pp. 481-488) Zaragoza: Universidad, Instituto de Ciencias de la Educación.
- Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355. Recuperado el 25 de febrero de 2014, de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf
- Gómez Alfonso, B. (2000). Los libros de texto de matemáticas. *Números*, 43-44. Recuperado el 17 de febrero de 2014, de <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/43-44/Articulo14.pdf>
- Gómez Alfonso, B. (2009). El análisis de manuales de identificación de problemas de investigación en didáctica de las Matemáticas. En M.J. González, M.T. González, J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*. (pp. 21-35). Santander: SEIEM. Recuperado el 12 de marzo de 2014, de <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3628626>
- Gómez Aguirre, Alejandro (2010). *El proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos de ordenación y combinación con estudiantes de educación superior: Un enfoque basado en la resolución de problemas*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona. Recuperado el 26 de marzo de 2014, de <https://www.educacion.gob.es/teseo/imprimirFicheroTesis.do?fichero=22814>
- González, M. T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 22(3), 389-408. Recuperado el 26 de marzo de 2014, de <http://ddd.uab.cat/record/1672>
- González, F. E. y Macías, E. (2001). Criterios para valorar materiales curriculares: una propuesta de elaboración referida al rendimiento escolar. *Revista complutense de educación*, 12(1), 179-214. Recuperado el 23 de abril de 2014, de <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=283827>
- Guzmán, M. (1991). *Para pensar mejor*. Labor. Barcelona
- Hernández, J. y Socas, M. M. (1994). Modelos de competencia para la resolución de problemas basados en los sistemas de representación en Matemáticas. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 16, 82-90. Recuperado el 23 de abril de 2014, de <http://revistasuma.es/IMG/pdf/16/082-090.pdf>

- Juidías, J. y Rodríguez, I. R. (2007). Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación*, 342, 257-286. Recuperado el 23 de de 2014, de http://www.revistaeducacion.mec.es/re342/re342_13.pdf
- Kantowski, M. G. (1981). Problem Solving. En E. Fennema, *Mathematics Education Research: Implications for the 80's*. (pp. 111-130). Alexandria, Virginia: Association for Supervision and Curriculum Development; Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics. Recuperado el 10 de febrero de 2014, de <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED206460.pdf>
- Konior, J. (1993). Research into the construction of mathematical texts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 251-256. Recuperado el 10 de febrero de 2014, de <http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF01275425#page-1>
- Llivina, M.J. (1999). *Una propuesta metodológica para contribuir al desarrollo de la capacidad para resolver problemas matemáticos*. Tesis doctoral, Universidad Pedagógica "Enrique José Varona". La Habana, Cuba. Recuperado el 14 de marzo de 2014, de <http://karin.fq.uh.cu/~vladimar/cursos/%23Did%20E1ctica/Tesis%20Defendidas/Did%20E1ctica/Miguel%20Jorge%20Llivina%20Lavigne/Miguel%20Jorge%20Llivina%20Lavigne.pdf>
- López Noguero, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación XXI. *Revista de Educación*, 4, 167-179. Recuperado el 10 de febrero de 2014, de <http://uhu.es/publicaciones/ojs/index.php/xxi/article/viewFile/610/932>
- López Rupérez, F. (1991). *Organización del conocimiento y resolución de problemas en física*. Madrid: Centro de Publicaciones, Ministerio de Educación y Ciencia.
- Marino, T. y Rodríguez, M. (2009). Un estudio exploratorio sobre heurísticas en estudiantes de un curso de matemática de nivel pre-universitario. *Paradigma*. 30(2), 159-178. Recuperado el 23 de abril de 2014, de <http://www.scielo.org.ve/pdf/pdg/v30n2/art11.pdf>
- Martínez, J. (1992). ¿Cómo analizar los materiales? *Cuadernos de Pedagogía*, 203, 14-18. Recuperado el 28 de febrero de 2014, de http://www.neuquen.edu.ar/regresoreceso/materiales%20otros/Martinez_Bonafe-Como_analizar_los_materiales.pdf
- Martínez, J. (2006). ¿De qué hablamos cuando hablamos de los libros de texto? En *Primer seminario internacional de textos escolares: SITE 2006*. (pp. 429-436). Santiago de Chile: Ministerio de Educación. Recuperado el 23 de abril de 2014, de http://www.cerlalc.org/libroaldia/libroaldia_8/imagenes/noticias/SITE.pdf
- Mejía, Julio (2011). Problemas centrales del análisis de datos cualitativos. *Revista Latinoamericana de Metodología de la Investigación Social*. 1(1), 47-60. Recuperado el 6 de febrero de 2014, de <http://www.relmis.com.ar/ojs/index.php/relmis/article/view/11>

- Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M. J. González, M. T. González, J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*. (pp. 37-53). Santander: SEIEM. Recuperado el 9 de febrero de 2014, de <http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas13SEIEM/SEIEMXIII-MonterrubioOrtega.pdf>
- Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2011). Diseño y aplicación de instrumentos de análisis y valoración de textos escolares de matemáticas. *PNA*, 5(3), 105-127. Recuperado el 18 de febrero de 2014, de <http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Monterrubio2011PNA5%283%29Disenno.pdf>
- Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2012). Creación y aplicación de un modelo de valoración de textos escolares matemáticos en educación secundaria. *Revista de Educación*, 358. Recuperado el 3 de febrero de 2014, de http://www.revistaeducacion.educacion.es/doi/358_087.pdf
- Nortes Checa, A. y Nortes Martínez-Artero, R. Resolución de problemas de matemáticas en las pruebas de acceso a la universidad. Errores significativos. *Educatio Siglo XXI*, 28(1), 317-342. Recuperado el 2 de febrero de 2014, de <http://revistas.um.es/educatio/article/viewFile/109851/104521>
- Ortega, T. (1996). Modelo de valoración de textos matemáticos. *Números*, 28, 4-12. Recuperado el 23 de abril de 2014, de <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/28/Articulo01.pdf>
- Ortega, T., Pecharromán, C. y Sosa, P. (2011). La importancia de los enunciados de problemas matemáticos. *Educatio Siglo XXI*, 29(2), 99-116. Recuperado el 23 de febrero de 2014, de <http://revistas.um.es/educatio/article/viewFile/132991/122691>
- Ortiz de Haro, J. J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. [Granada]: Grupo de Investigación en Educación Estadística, Universidad de Granada. Recuperado el 23 de febrero de 2014, de <http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/tesisjj.PDF>
- Ortiz de Haro, J. J., Batanero, C. y Serrano, L. (1996). Las frecuencias relativas y sus propiedades en los textos españoles de bachillerato. *EMA*, 2(1), 29-48, 1996. Recuperado el 23 de febrero de 2014, de <http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/FRECUEEN.pdf>
- Ortiz de Haro, J. J., Batanero, C. y Serrano, L. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *Suma*, 38, 5-13. Recuperado el 23 de febrero de 2014, de <http://revistasuma.es/IMG/pdf/38/005-013.pdf>
- Orton, A. (1996). *Didáctica de las matemáticas: cuestiones, teoría y práctica en el aula*. (2ª ed.). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia, Centro de Publicaciones: Morata.

- Parcerisa, A. (1996). *Materiales curriculares: cómo elaborarlos, seleccionarlos y usarlos*. (6ª ed.). Barcelona: Graó.
- Perales, F. J. (1993). La resolución de problemas: una revisión estructurada. *Enseñanza de las Ciencias*, 11(2), 170-178. Recuperado el 23 de marzo de 2014, de <http://ddd.uab.es/pub/edlc/02124521v11n2p170.pdf>
- Pifarré, M. y Sanvy, J. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO: un ejemplo concreto. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(2), 297-308. Recuperado el 23 de abril de 2014, de <http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/viewFile/21745/21579>
- Pino, J., Blanco, L. J. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones*, 38, 63-88. Recuperado el 2 de febrero de 2014, de <http://digibug.ugr.es/bitstream/10481/24697/1/479.%20n.%2038.pdf>
- Prendes, M. P. (1997). Evaluación de manuales escolares. *Revista electrónica Pixel-Bit*, 9. Recuperado el 23 de abril de 2014, de <http://www.sav.us.es/pixelbit/pixelbit/articulos/n9/n9art/art93.htm>
- Prendes, M. P.(2001). Evaluación de manuales escolares. *Pixel-Bit: Revista de medios y educación*, 16, 1-20. Recuperado el 10 de marzo de 2014, de <http://www.sav.us.es/pixelbit/pixelbit/articulos/n16/n16art/art167.htm>
- Puig, L. (1996). Problema. En *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares. (pp. 17-31). Recuperado el 10 de febrero de 2014, de <http://www.uv.es/puigl/lerp2.pdf>
- Puig, L. (2008). Presencia y ausencia de la resolución de problemas en la investigación y el currículo. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, L. J. Blanco (eds), *Investigación en educación matemática: Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Badajoz. Recuperado el 23 de abril de 2014, de <http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas12SEIEM/Seminario2Puig.pdf>
- Remesal, A. (2006). *Los problemas en la evaluación del aprendizaje matemático en la educación obligatoria: Perspectiva de profesores y alumnos*. Tesis doctoral. Universidad de Barcelona. Recuperado el 16 de febrero de 2014, de <http://diposit.ub.edu/dspace/handle/2445/42713>
- Rico, L. (1990). Diseño curricular en Educación Matemática: Una perspectiva cultural. En S. Llinares, V. Sánchez (Eds), *Teoría y Práctica en Educación Matemática*, (pp. 17-62). Sevilla: Alfar.

- Rico, L. (1998). Concepto de Currículo desde la Educación Matemática. *Revista de Estudios del Currículum*. 1(4), 7-42. Recuperado el 16 de febrero de 2014, de <http://funes.uniandes.edu.co/524/1/RicoL98-2713.PDF>
- Sebastian, G. (2006). The Structures of German Mathematics Textbooks. *ZDM*, 38(6). Recuperado el 11 de febrero de 2014, de <http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF02652785#page-1>
- Sepúlveda, A., Medina, C. y Sepúlveda, D. I. (2009). La resolución de problemas y el uso de tareas en la enseñanza de las matemáticas. *Educación matemática*, 21(2), 79-115. Recuperado el 23 de abril de 2014, de <http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v21n2/v21n2a4.pdf>
- Vea Muniesa, F. (1995). *Las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria en España en el siglo XIX*. Zaragoza: Universidad.
- Vilanova, S., Rocerau, M., Valdez, G., Oliver, M., Vecino, S., Medina, P., et al. (2001). La educación matemática. El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. *OEI-Revista Iberoamericana de Educación*. Recuperado el 23 de abril de 2014, de <http://www.rieoei.org/deloslectores/203Vilanova.PDF>
- Vieiro, P. y Pereira, R. (2013). ¿Favorecen los modelos mentales la resolución de problemas aritméticos? Un estudio con alumnos de educación primaria. *Boletín de Psicología*, 108, 59-69. Recuperado el 15 de febrero de 2014, de <http://www.uv.es/seoane/boletin/previos/N108-4.pdf>
- Zapico, M. H. (2006). Interrogantes acerca de análisis de contenido y del discurso en los textos escolares. En *Primer seminario internacional de textos escolares: SITE 2006*. (pp. 149-155). Santiago de Chile: Ministerio de Educación. Recuperado el 23 de abril de 2014, http://www.cerlalc.org/libroaldia/libroaldia_8/imagenes/noticias/SITE.pdf

ANEXOS

ANEXO I

Varios ejemplos de muestras de tablas, completadas con la información extraída de la revisión de los contenidos de algunos de los manuales estudiados:

1. Información sobre los contenidos de un manual de 4º de Bachillerato Elemental:

MATEMÁTICAS CUARTO CURSO por Luis Vives (1965)

CONTENIDOS	EPÍGRAFES	Definición	Ejemplos	Ej. Dibujo	Ejercicios	Problemas	Observación
ÁLGEBRA							
A.1. Operaciones racionales con expresiones enteras	1.1.Revisión de las operaciones enteras con monomios y polinomios	3	3				
	1.2.División de dos polinomios	1	1				
	1.3.Observaciones.	5	1				
	1.4.División de un polinomio en x por x - a.	1					
	1.5.Regla de Ruffini.	1	2				Advertencia
	1.6.Cálculo directo del resto en la división por x - a: valor numérico de un polinomio.	2	3				
	1.7.Condición de divisibilidad por x - a.	1	2				
	1.8.División de $x^m \pm a^m$ por $x \pm a$.	1	1				
	FINAL DEL TEMA (EJERCICIOS)				51	10	Pasos
A.2. Descomposición factorial de polinomios	2.9.Extracción de un factor común.	1	3				
	2.10.Extracciones sucesivas de factores comunes.	1	1				
	2.11.Descomposición de un trinomio cuadrado perfecto.	1	2				
	2.12.Descomposición de la diferencia de dos cuadrados.	1	3				Observacion
	2.13.Descomposición de un trinomio de la forma $x^2 + px + q$.	1	2				
	2.14.Descomposición de un trinomio de la forma $px^2 + qx + r$.	1	1				
	2.15.Descomposición de una suma o diferencia de dos cubos.	1	1				
	2.16.Descomposición de una suma o diferencia de potencias de igual grado.	1	1				
	2.17.Descomposición factorial de un polinomio en x (Teorema)	1	1				
	FINAL DEL TEMA (EJERCICIOS)				145		
A.3. Fracciones algebraicas	3.18.Revisión de las fracciones algebraicas.	5	4				
	3.19.Valor numérico de una fracción.	1	3				Propiedad fundamental
	3.20.Simplificación de fracciones.	1	3				
	3.21.Verdadero valor de una fracción.	1	2				
	3.22.Reducción de fracciones a común denominador.	1	3				Aclaración
	FINAL DEL TEMA (EJERCICIOS)				58		
A.4. Operaciones con fracciones	4.23.Adición y sustracción de fracciones algebraicas.	1	1				
	4.24.Multiplicación y división de fracciones algebraicas.	2	1				
	4.25.Fracciones compuestas.	2	2				
	FINAL DEL TEMA (EJERCICIOS)				57		
A.5. Radicales	5.26.Radicales numéricos y expresiones irracionales.	1	2				
	5.27.Valor aritmético de un radical.	1	2				Observacion
	5.28.Raíces de un producto y de un cociente.	2	2				

... Continúa.

2. Información sobre los contenidos de un manual de 8º de EGB:

MATEMÁTICAS 8. ANAYA. 1979

CONTENIDOS	EPÍGRAFES	Definición	Ejemplos	Ej. Dibujo	Ejercicios	Problemas	Observación
1. Múltiplos y divisores en Z	1.1.Múltiplos	1		1			Teoría de conjuntos
	1.2.La relación "ser múltiplo de"	1		1			Def.propiedad Reflexiva y transitiva
	1.3.Propiedades de los múltiplos	5					
	1.4.Divisores	1	1	1			Teoría de conjuntos
	1.5.La relación "ser divisor de"	2		3			Transitiva / Reflexiva
	1.6.Propiedades de los divisores	5	1				
	1.7.Números primos y compuestos	2	2				
	1.8.Tabla de los números primos	1					
	1.9.Descomposición de un número compuesto en un producto de factores primos (en n)	1	1				
	1.10.Actividades					18	
2. Criterios de divisibilidad	2.1.Divisibilidad por 2	1	1				
	2.2.Divisibilidad por 3 y por 9	2	2				
	2.3.Divisibilidad por 5	1	1				
	2.4.Divisibilidad por 4 y por 25	2	2				
	2.5.Divisibilidad por 11	1	3				
	2.6.Actividades					13	Resumen con todos los criterios
3. Operaciones	3.1.Operaciones	2	2	1			Interna y Externa teoría de conjuntos
	3.2.Propiedades que pueden poseer las operaciones internas	2	2				
	3.3.Existencia de elemento neutro	1	4				
	3.4.Existencia de elemento simétrico	1	4				
	3.5.Propiedad distributiva	1	4				
	3.6.Errores frecuentes en las operaciones	3	2				
	3.7.Actividades					7	
4. Estructuras algebraicas I	4.1.Introducción	1					
	4.2.Conceptos estudiados en cursos anteriores	1					
	4.3.Grupo Operaciones en un grupo	1					
	4.4.Operaciones inversa de un grupo	2					
	4.5.Homomorfismo entre grupos	1		1			
	4.6.Subgrupo	1 + 3					Propiedades
	4.7.Actividades					12	
5. Teoría de grupos	5.1.Tablas de grupos	1					
	5.2.El juego de las cuatro esquinas			1			
	5.3.Reconocimiento del elemento neutro y simétrico			1			
	5.4.Isomorfismo entre grupos	1		1			
	5.5.Actividades					4	
6. Fracciones	6.1.Concepto de operador	1					Teoría de conjuntos
	6.2.Composición de operadores	1	1				
	6.3.Fracciones	1	1				Como operador
	6.4.Clasificación de las fracciones	1	1				Como elemento de $Z \times Z$
	6.5.Actividades					15	
7. Conjuntos de números racionales Q	7.1.Fracciones equivalentes	1	1	3			Teoría de conjuntos
	7.2.Propiedades de las fracciones equivalentes	2					
	7.3.Propiedad fundamental de las fracciones	1					
	7.4.El número racional	1	2				$Z \times Z / R$
	7.5.Actividades					9	

... Continúa.

3. Información sobre los contenidos de un manual de 2º de ESO:

MATEMÁTICAS 2 EDUCACIÓN SECUNDARIA. ANAYA (2008)

CONTENIDOS	EPÍGRAFES	Definición	Ejemplos	Ej. Dibujo	Ejercicios	Problemas	Observación
Entrénate resolviendo problemas	Problemas: ¡Echa cuentas!			3		13	
	Problemas: Juega con los números			4		15	
	Problemas: Sin álgebra			5		8	
	Problemas: Haz un esquema			2		7	
	Problemas: Mira bien las figuras			13		15	
	Problemas: Tú mueves, palillos o fichas			7		7	
	Problemas: Lógica			3		4	
1. Divisibilidad y números enteros	Antes de comenzar, recuerda		6		1		Introducción de la vida cotidiana (3)
	1.1.La relación de divisibilidad						
	1.1.1.Múltiplos y divisores	1	1	1			
	1.1.2.Los múltiplos de un número	2	2	2			
	1.1.3.Los divisores de un número	1	1	1	9		
	1.1.4.Criterios de divisibilidad	3	3	2			
	1.2.Números primos y números compuestos	1	5	1	4		
	1.2.1.Descomposición de un número en factores primos	1	3	1	5		
	1.2.2.Múltiplos y divisores de números descompuestos en factores primos	2	1		6		
	1.3.Mínimo común múltiplo de dos o más números						
	1.3.1.Cálculo del mínimo común múltiplo	1	1	1	3	2	
	1.4.Máximo común divisor de dos o más números						
	1.4.1.Cálculo del máximo común divisor	1	1	1	3	2	
	1.5.Operaciones con números enteros						
	1.5.1.Sumas y resta	2	2	1	11		
	1.5.2.Multiplicación	1	1	1			
	1.5.3.División		1				
	1.5.4.Operaciones combinadas	1	1	1	14		
	1.5.5.Potencias de números enteros	1	1		6		
	1.5.6.Propiedades de las potencias	5	5		15		
	1.5.7.Raíz cuadrada de un número entero	1	2				
	1.5.8.Otras raíces	1	4		2		
	Ejercicios y problemas						
	Múltiplos y divisores					6	
	Números primos y compuestos					5	
	Mínimo común múltiplo y máximo común divisor					6	
	Problemas						8
	Profundiza					4	
	Sumas y resta de números enteros					6	
	Multiplicación y división de números enteros					3	
	Operaciones combinadas con números enteros					6	
	Potencia de números enteros					7	
	Raíces de números enteros					5	
	Desarrolla tus competencias						
	Infórmate				1		
	Busca regularidades				1		
	Lee y comprende				1		
	Investiga				1		
	Utiliza tu ingenio				1		
	Autoevaluación					6	

... Continúa.

ANEXO II

Puesta en común de los contenidos recogidos en los distintos manuales estudiados:

CONTENIDOS	4º Bach.	8º EGB	2º ESO
Operaciones con conjunto de las partes de un conjunto (P(A))		X	
Relaciones de equivalencia y de orden		X	
Números naturales, divisibilidad, MCD y MCM			X
Números enteros (Z)			X
Potencias y raíces		X	X
Números racionales, operaciones, potencias y radicación		X	X
Monomios y polinomios. Operaciones (suma recta y producto)	X	X	X
Regla de Ruffini y división de polinomios	X	X	
Anillo de polinomio		X	
Descomposición factorial de polinomios	X		
Fracciones algebraicas	X		
Operaciones con fracciones algebraicas	X		
Radicales, operaciones, racionalizar, simplificar radicales	X		
Potenciación de exponente racional	X		
Ecuaciones de 1 ^{er} grado y aplicación a la resolución de problemas		X	X
Ecuaciones de 2º grado y aplicación a la resolución de problemas	X	X	X
Propiedades de las raíces, de ecuación de 2º grado	X		
Trinomio de 2º grado (parábola)	X	X	
Proporcionalidad inversa		X	
Ecuaciones bicuadradas	X		
Sistemas de ecuaciones lineales			X
Sistema de ecuaciones no lineales reducibles a ecuaciones cuadráticas	X		
Magnitudes proporcionales y porcentaje			X
Medida del tiempo y de los ángulos			X
El plano, posición de dos rectas, dos planos y recta y plano	X		
Perpendicularidad de recta y plano	X		
Paralelismo	X		
Ángulo diedro, clasificación de los diedros	X		
Distancias y ángulos, entre rectas, rectas y planos, planos	X		
Simetría	X		
Ángulos poliedros	X		
Poliedros regulares, construcción y áreas	X		X
Semejanza, Teorema de Thales y Pitágoras			X
Estudio de los prismas	X		
Estudio de las pirámides	X		
Estudio de cilindro y conos de revolución	X		
La esfera	X		
Áreas de volúmenes de cuerpos geométricos	X		X
Secciones cónicas: hipérbola, parábola, ...	X		
Funciones			X
Estadística			X
Movimiento de la Tierra	X		

ANEXO III

Ejemplos de muestras de plantillas, completadas con la información extraída de la exploración de los diferentes problemas de algunos de los manuales estudiados:

1. Información sobre los *problemas propuestos* de un manual de 4º de Bachillerato Elemental:

ENUNCIADOS (P. PROPUESTOS)	A. TIPOS DE PROBLEMAS				B. EL SOPORTE		C. CONTEXTO			D. LA TAREA MATEMÁTICA			
	A1	A2	A3	A4	B1	B2	C1	C2	C3	D1	D2	D3	D4
Lección 8: Ecuaciones de 2º grado con una incógnita													
Resuelve las siguientes...	X				X					X	X		
Resuelve y comprueba	X				X					X	X		
¿Qué número negativo...?	X				X					X	X		
Si se añade 25 al cuadrado...	X				X					X		X	
Si de un n° se resta 5...		X			X					X		X	
El área de una lámina...		X				X				X		X	
La suma de los cuadrados...		X			X					X		X	
A 75 ptas/m ² se compró...		X				X	X					X	
Resuelve las siguientes...	X				X					X	X		
Forma taboques suya...	X				X					X	X		
Halla, sin resolver...	X				X					X	X		
Halla dos n° cuya suma...	X				X					X	X		
En la ecuación...	X				X					X	X		
La suma de las raíces	X	X			X					X		X	
En la ecuación...	X				X					X	X		
Determina m en la ec...	X				X					X	X		
Dada la ecuación...	X				X					X	X		
Un estanque se llena...		X				X	X					X	
Dada la ecuación...	X				X					X	X		
¿Cuáles es n°...?	X				X					X	X		
Escribe la ecuación...	X				X					X	X		
Lección 9: Aplicaciones de la Ecuaciones de 2º grado													
Determina los factores...	X				X					X	X		

... Continúa.

2. Información sobre los *problemas de ejemplo* de un manual de 8º de EGB:

ENUNCIADOS (P. EJEMPLOS)	A. TIPOS DE PROBLEMAS				B. EL SOPORTE		C. CONTEXTO			D. LA TAREA MATEMÁTICA			
	A1	A2	A3	A4	B1	B2	C1	C2	C3	D1	D2	D3	D4
Tema 14: Ecuaciones de 2º grado. Aplicaciones													
Resolver la ecuación...	X				X					X	X		
Resolver la ecuación...	X				X					X	X		
Considerar la ecuación...	X				X					X	X		
Sea la ecuación...	X				X					X	X		
Sea la ecuación...	X				X					X	X		
Sea la ecuación...	X				X					X	X		
Sea la ecuación...	X				X					X	X		
Sea la ecuación...	X				X					X	X		
Hallar la ecuación...	X				X					X	X		
Resolver la ecuación...	X				X					X	X		
Se tienen tres...	X				X					X		X	
Sabiendo que la suma...	X					X				X		X	
Hallar una función...	X				X					X		X	
Hallar dos números...	X				X					X		X	
La diferencia entre...	X				X					X		X	
Tema 15: Parábola													
Representa...	X				X					X	X		
Representa...	X				X					X	X		
Representa...	X				X					X	X		

... Continúa.

3. Información sobre los *problemas como evaluación* de un manual de 2º de ESO:

2º ESO SM 2008 (3) - Microsoft Excel

ENUNCIADOS (P.EVALUACIÓN)	A. TIPOS DE PROBLEMAS				B. EL SOPORTE		C. CONTEXTO			D. LA TAREA MATEMÁTICA			
	A1	A2	A3	A4	B1	B2	C1	C2	C3	D1	D2	D3	D4
	R	A	T	P	R	M							
Autoevaluación													
Resuelve las siguientes...	X				X	X				X			X
Resuelve las siguientes...	X				X	X			X				X
El perímetro de un ...		X			X	X			X				X