SUMA 26
noviembre 1997, pp. 53-58

¿Desaparecerá el álgebra elemental con la utilización de las nuevas calculadoras gráficas?

Jose R. Vizmanos

Se comienza haciendo un breve recorrido histórico sobre el desarrollo del álgebra desde Diofanto, Al Jwarizmi, Luca Pacioli, Tartaglia, Descartes, etc. A continuación se hace una relación de los contenidos y procedimientos algebraicos necesarios para los alumnos de la Enseñanza Secundaria y de Bachillerato, y como pueden hoy en día ser resueltos, muy fácilmente, con una calculadora gráfica, para lo cual se realizarán distintas ejemplificaciones con la TI-92.

* Texto de la conferencia plenaria impartida en el TG-18 del ICME-8.

ARTÍCULOS

UNA MIRADA al pasado

¿Qué entendemos por álgebra elemental? El álgebra elemental es el lenguaje con el que se comunica la mayor parte de la matemática. Gracias al álgebra podemos trabajar con conceptos a nivel abstracto y posteriormente realizar aplicaciones.

El álgebra elemental enlaza con la generalización de la aritmética para ir posteriormente centrándose en su propia estructura y mayor coherencia lógica. De ahí, la importancia que tienen los distintos usos de los símbolos algebraicos, cuando escribimos $A + B$, podemos expresar desde la suma de dos números naturales a la suma de dos expresiones algebraicas, o como una suma de matrices. Así pues, hay una primera parte de representación y simbolismo para, posteriormente, pasar al desarrollo de los algoritmos y procedimientos que permiten trabajar formalmente con las expresiones algebraicas.

Pero lo que hoy entendemos por álgebra ha sido el fruto del esfuerzo de muchas y muchas generaciones que han ido aportando su grano de arena hasta conseguir este magnífico edificio que hoy en día llamamos álgebra.

Parece ser que los egipcios ya conocían métodos para resolver ecuaciones de primer grado, en el *Papiro de Ahmes* (1650 a.C.) se dice así: «Calcular el valor del montón si el montón y el séptimo del montón es igual a 19», pero para resolver problemas de este tipo se utilizaban métodos aritméticos como, por ejemplo, la regla de falsa posición. Los babilonios resolvieron algunos sistemas de ecuaciones lineales muy sencillos. También, según descubrió Neugebauer en 1930, los babilonios manejaron ecuaciones cuadráticas con gran soltura.

Hacia el siglo VI (a.C.) aparece en la matemática griega el método deductivo y hacia el siglo IV (a.C.) lo que se podría llamar el *álgebra geométrica*, ejercicios como: «Dada la suma y el producto de los lados de un rectángulo, hallar dichos lados», fueron tratados de forma muy distinta a como lo hacían los babilonios. Parte de este álgebra geométrica lo trata Euclides en sus *Elementos.*

Pero el más importante de los algebristas griegos fue Diofanto de Alejandría. Poco se sabe de su vida, aun cuando en su tumba figura una inscripción que traducida a una ecuación lineal nos informa algo de ella. A Diofanto se le puede considerar el padre del álgebra antigua, su obra más importante fue *Arithmetica* tratado de trece libros de los que sólo han sobrevivido los seis primeros. No es un texto de álgebra, sino una colección de problemas sobre aplicaciones del álgebra. La influencia de Diofanto ha sido mucho mayor de la que se cree, el propio Pierre de Fermat (1601-1665), llegó a su celebre último teorema, cuando intentaba generalizar un problema que había visto en la *Arithmetica* de Diofanto: «descomponer un cuadrado dado en suma de otros dos cuadrados».

Los matemáticos indios Brahmagupta (598-?) y Bhaskara (1114-1185) aportaron al desarrollo del álgebra soluciones generales para las ecuaciones cuadráticas incluyendo las dos raíces aun en casos en que una de ellas es negativa. Uno de los miembros más distinguidos de la Casa de la Sabiduría de Bagdad es el matemático y astrónomo Al-Khowarizmi (hacia 780-850). En su obra *Algebra* estudia con detalle los seis tipos de ecuaciones lineales y cuadráticas que tengan una raíz positiva. Su forma de resolver las ecuaciones es preferentemente geométrica conectando así con el álgebra griega de Euclides.

Pero el álgebra clásica, como nosotros la conocemos hoy en día se desarrolla propiamente en el Renacimiento, que es cuando se produce la primera ruptura entre el álgebra antigua y el álgebra clásica. En 1494, el italiano Luca Pacioli (1445-1514) publicó *Summa Arithmetica* en la que se incluía la resolución de ecuaciones de primero y segundo grado. En dicho tratado se comenzaba a utilizar una rudimentaria álgebra simbólica. Pero sobre la ecuación cúbica, Pacioli tenía una impresión muy pesimista sobre su resolución, llegando a pensar que las ecuaciones cúbicas, y no digamos la cuárticas, estaban fuera del alcance del álgebra. Escipión del Ferro (1465-1526) aceptó el reto de Pacioli y llegó a encontrar una fórmula para la ecuación cúbica disminuida de la forma $ax^3 + cx + d = 0$, descubrimiento que desveló a su discípulo Antonio de Fiore (1506-?). También Nicolo Fontana (Tartaglia) (1500-1557) presumía de resolver ecuaciones cúbicas de la forma $x^3 + mx^2 = n$, pero no sabía cómo resolver las ecuaciones cúbicas disminuidas, hasta que retado por Fior llegó a encontrar la solución para este tipo de ecuaciones. Ludovico Ferrari (1522-1565) logró encontrar un procedimiento para resolver la ecuación algebraica de cuarto grado.

Pero si los números negativos resultaban sospechosos en el siglo XVI, sus raíces cuadradas resultaban totalmente absurdas, eran los inicios de la aparición de lo que hoy en día llamamos números complejos.

Jerónimo Cardano (1501-1576) publicó *Ars Magna* en donde incluía el método de resolución de algunos tipos de ecuaciones cúbicas que le había revelado Tartaglia, a pesar de su promesa de no hacerlo publico, es lo que hoy en día se conoce como «resolución por radicales». Pero si los números negativos resultaban sospechosos en el siglo XVI, sus raíces cuadradas resultaban totalmente absurdas, eran los inicios de la aparición de lo que hoy en día llamamos números complejos.

En 1572 Rafael Bombelli (1526-1573) publicó su tratado *Algebra*, en el que dio un paso más en la resolución de las ecuaciones cúbicas, expresando las soluciones en la forma $2 + \sqrt{-1}$. A Bombelli hay que agradecer el haber descubierto que los números imaginarios juegan un importante papel en el desarrollo del álgebra.

El matemático francés Francisco Vieta (1540-1603) propuso un nuevo enfoque para la resolución de ecuaciones cúbicas. Además comenzó el estudio de las relaciones entre las raíces y los coeficientes de una ecuación, que completó el matemático flamenco Albert Girard (1590-1633), con la publicación de su obra *Invention nouvelle en l'algebre*, en 1629. Rene Descartes (1596-1650) en su Libro I: *La géometrie* incluye un sistema de instrucciones detalladas para resolver ecuaciones cuadráticas, pero por métodos geométricos como lo hacían los griegos de la antigüedad.

Tanto Cardano como Ferrari no supieron encontrar procedimientos para la resolución de ecuaciones algebraicas de 5.° grado. Hasta que en 1824 el joven matemático noruego Niels Abel (1802-1829) conmovió a toda la comunidad científica demostrando que no era posible resolver por radicales las ecuaciones de quinto o superior grado. Esto no quería decir, que las ecuaciones algebraicas de quinto o más grado no tuvieran soluciones, lo que significabaes que no existía un método algebraico que permitiera obtener las raíces de la ecuación en función de sus coeficientes. El descubrimiento de Abel enlaza con el pesimismo de Luca Pacioli y se demuestra el fracaso del álgebra cuando se supera el grado cuarto.

Girard, ante la dificultad de extraer raíces cuadradas de número negativos, fue el primero que se atrevió a conjeturar en 1629 lo siguiente: «Una ecuación de grado *n* tiene exactamente *n* raíces, siempre que se cuenten las imposibles». Posteriormente Euler (1707-1783), Lagrange (1736-1813) y D'Alembert (1717-1783), estudiaron el mismo teorema pero sin pensar que las raíces podían ser números complejos. Es a Gauss (1777-1855) al que se le debe el nombre de *teorema fundamental del álgebra*, en su tesis doctoral leída en 1799, criticó los trabajos de Euler, Lagrange y D'Alembert y dio una demostración del teorema, que se apoyaba en consideraciones geométricas, por lo que no resultaba del todo convincente. En 1816 publicó dos nuevas demostraciones y cinco años antes de su muerte publicó la cuarta demostración tratando de encontrar procedimientos puramente algebraicos.

A principios del siglo XVIII, el matemático inglés Roger Cotes (1682-1716) y el francés emigrado a Inglaterra Abraham de Moivre (1667-1754), redujeron la resolución de la ecuación $z^n - 1 = 0$, a la división de la circunferencia en *n* partes iguales, mostrando así un buen dominio de los números complejos. Pero el álgebra sigue desarrollándose y en el siglo XVIII y XIX surge una nueva ruptura pasando del álgebra clásica al álgebra moderna, con aportaciones de matemáticos como George Peacock (1791-1858), iniciador del pensamiento axiomático, que luego desarrollarían matemáticos como Augustus de Morgan (1806-1871), Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) y George Boole (1815-1864). No podemos olvidar en esta época a los dos algebristas más prolíficos del siglo XIX, los ingleses Arthur Cayley (1821-1895) con el estudio de las matrices y J. J. Sylvester (1814-1897) con la teoría de los invariantes. Finalmente, Evariste Galois (1811-1832) con la creación de grupo hace de este concepto abstracto la idea central de la teoría de ecuaciones algebraicas dando por terminada el álgebra clásica.

Con la aparición de las calculadoras gráficas, con posibilidad de construcción de tablas, es posible resolver cualquier tipo de ecuaciones ya sea algebraica o trascendente, por métodos numéricos o gráficos.

Contenidos algebraicos necesarios para los alumnos de enseñanza preuniversitaria

Comencemos diciendo que se entiende por enseñanza preuniversitaria a la enseñanza que reciben los alumnos antes de entrar a la Universidad, más concretamente nos referimos a la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) para alumnos de 12 a 16 años y el Bachillerato para alumnos de 16 a 18 años. Así pues, en España la enseñanza preuniversitaria esta dirigida aproximadamente a alumnos menores de 19 años.

¿Cuáles son los contenidos algebraicos necesarios para estos alumnos?

Teniendo en cuenta los actuales currículos y sin tratar de ser exhaustivos, los contenidos algebraicos que estudian los alumnos en este período son los siguientes:

- Polinomios: operaciones.
- Expresiones algebraicas: operaciones.
- Resolución de ecuaciones de primer grado.
- Estudio de inecuaciones de primer grado.
- Resolución de ecuaciones de segundo grado.
- Estudio de inecuaciones de segundo grado.
- Resolución de ecuaciones cúbicas con una solución entera.
- Resolución de ecuaciones bicuadradas.
- Resolución de ecuaciones algebraicas de grado *n* con n – 2 raíces enteras.
- Resolución de ecuaciones irracionales.
- Resolución de ecuaciones trascendentes (logarítmicas, exponenciales, trigonométricas, etc.).
- Matrices: operaciones.
- Determinante de una matriz cuadrada. Matriz inversa.
- Sistemas de ecuaciones lineales: Métodos de Gauss, Cramer y Rouche.

Aplicaciones del cálculo algebraico con la TI-92

Con la aparición de las calculadoras gráficas, con posibilidad de construcción de tablas, es posible resolver cualquier tipo de ecuaciones ya sea algebraica o trascendente, por métodos numéricos o gráficos. Más recientemente con la aparición de la calculadora TI-92, que lleva incorporado el CAS (Cálculo algebraico simbólico) es posible realizar todo tipo de cálculos algebraicos. Así por ejemplo:

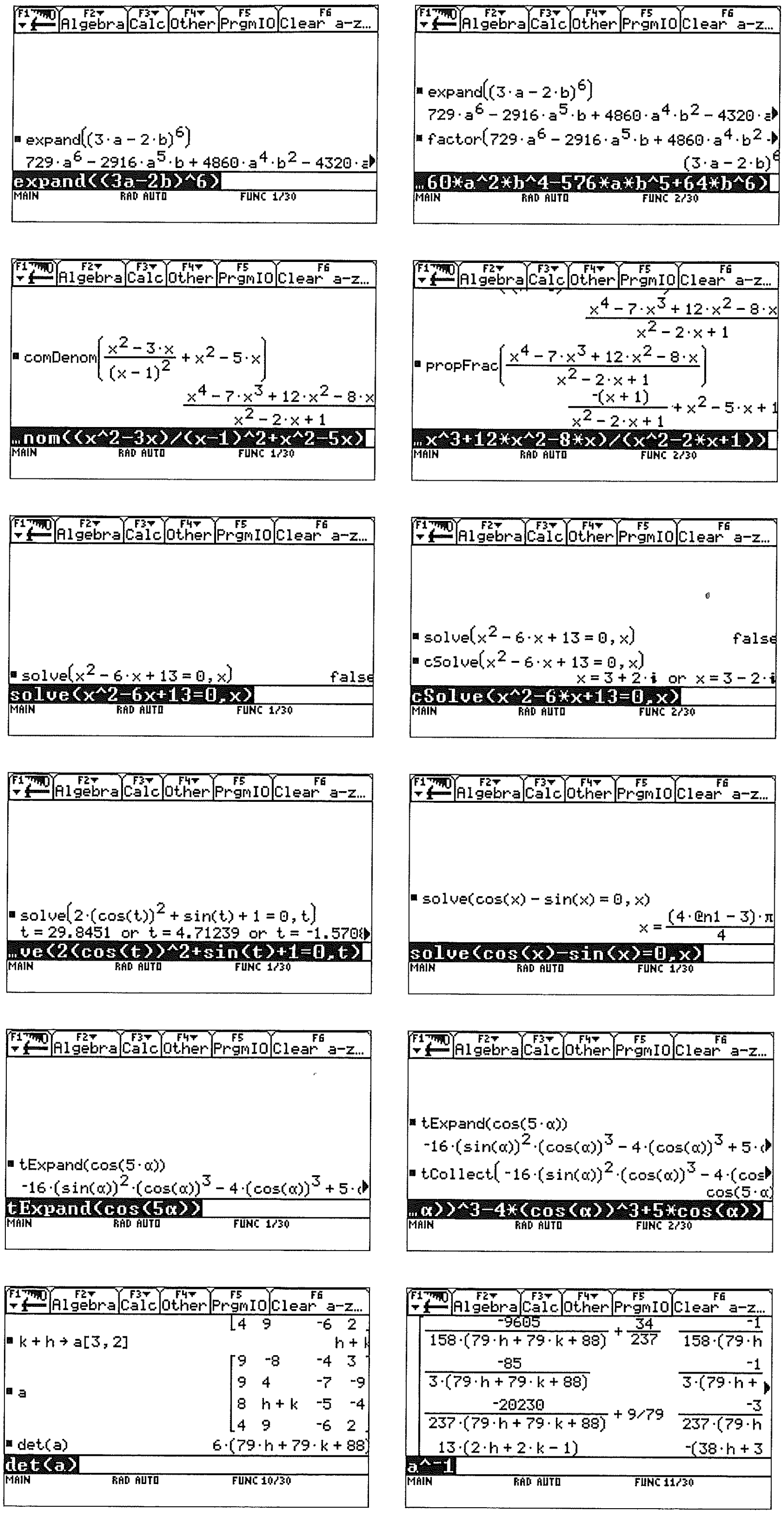


Figura 1

Así pues, podemos concluir que los procedimientos algebráicos con el CAS no presentan hoy en día ninguna dificultad.

Una mirada al futuro

De lo visto hasta ahora se deduce que los esfuerzos que ha realizado la humanidad para encontrar algoritmos y procedimientos que permitan desarrollar destrezas algebraicas así como para resolver ecuaciones, han sido muy loables, e importantísimos en su momento, pero hoy en día están totalmente obsoletos. ¿Qué sentido tiene actualmente resolver una ecuación cúbica por radicales, cuando como acabamos de ver podemos hacerlo de forma tan sencilla? ¿Quiere esto decir que los alumnos de estas edades no tendrán que estudiar álgebra, teniendo en cuenta que las calculadoras le resolverán con toda facilidad la ecuación?

Evidentemente, nuestros alumnos tendrán que seguir estudiando álgebra pero el currículo del álgebra que se debería proponer en un futuro debería de dejar de centrarse exclusivamente en la soltura manipulativa para dar una mayor importancia a las propias estructuras conceptuales del álgebra como medio de representación y de los métodos algebraicos como herramienta para la resolución de problemas. Pero esto, debería llevar a un cambio en cuanto al tiempo de docencia de cada una de las partes.

Hasta ahora cada vez que se enseñaba un contenido, pongamos por ejemplo las operaciones con matrices, se dedicaba mucho tiempo al calculo de expresiones con operaciones con matrices, pero como este tipo de cálculos es pesado y laborioso, resulta que cuando podríamos empezar a estudiar las aplicaciones del calculo matricial que es lo realmente importante, no queda tiempo y, por otra parte, resulta humanamente imposible calcular con papel y lápiz la potencia décima de una matriz para poder estudiar un problema de Markov.

Por el contrario, en un futuro proponemos dedicar mucho tiempo a los conceptos y a las estructuras de pensamiento algebraico, y menos tiempo a la manipulación algebraica tales como la resolución de ecuaciones, ya que esta puede hoy en día ser resuelta en tan solo un instante y siempre con el mismo procedimiento. En cambio, parece importantísimo dedicar mucho más tiempo a la aplicación del álgebra a distintas situaciones, para lo cual utilizaremos la tecnología existente.

Simplifiquemos un poco las cosas y pongamos tan solo un ejemplo. Supongamos que a los alumnos de 14 años se les enseña por primera vez la resolución de ecuaciones lineales. Tradicionalmente se venía dedicando mucho tiempo, aproximadamente cuatro semanas resolviendo ecuaciones que ya estaban planteadas, haciendo de este tiempo un período repetitivo y aburrido. A continuación, se dedicaba, generalmente muy poco, a veces tan sólo una semana, para el planteamiento y posterior resolución de ecuaciones de primer grado a partir de enunciados interesantes que obviamente resultarán mucho más motivadores que simplemente la utilización de una serie de reglas y recetas que el alumno llega a dominar con todo detalle, pero que, en muchas ocasiones, no sabe realmente lo que hace, ni por qué lo hace.

Frente a esta situación proponemos realizar un cambio sustancial partiendo de situaciones concretas suficientemente motivadoras que justifiquen la necesidad del lenguaje algebraico para que,mediante su simbolismo y representación podamos plantear la ecuación lineal correspondiente. Posteriormente, y tan sólo para ecuaciones suficientemente sencillas, tratar de resolverlas mediante papel y lápiz aplicando los tradicionales procedimientos algebraicos. Pero esta etapa manipulativa correspondiente a los procedimientos algebraicos puede recortarse mucho, teniendo en cuenta que los alumnos pueden utilizar una tecnología adecuada, que les permite resolver las ecuaciones muy fácilmente, tanto por métodos analíticos, como por métodos numéricos o gráficos. Y, en cambio, parece muchísimo más interesante dedicar más tiempo al planteamiento de las ecuaciones que se deducen de la lectura de enunciados diversos aplicados a diferentes campos de la vida cotidiana y mucho más próximos al alumno, que a la resolución de esas ecuaciones que se pueden hacer fácilmente con una calculadora.

¿Cómo ayudamos más a nuestros alumnos, enseñándoles a aplicar como autómatas reglas y recetas que permiten hacer cosas que resuelve fácilmente la tecnología o enseñándoles a pensar, cosa que todavía no pueden hacer ni los ordenadores ni las calculadoras?

Conclusión

Evidentemente el objetivo principal de la enseñanza de la matemática en la secundaria en todos los países es capacitar al alumno para enfrentarse a los retos que la vida en el futuro les pueda presentar. Ahora bien, ¿cómo ayudamos más a nuestros alumnos, enseñándoles a aplicar como autómatas reglas y recetas que permiten hacer cosas que resuelve fácilmente la tecnología o enseñándoles a pensar, cosa que todavía no pueden hacer ni los ordenadores ni las calculadoras? Incluso pensando en los futuros universitarios, los que obviamente deberán realizar un uso mucho más frecuente de destrezas algebraicas, un objetivo importante tendrá que ser el conseguir un nivel adecuado de suficiencia en este tipo de destrezas y procedimientos. Sin embargo, también estos alumnos se van a encontrar que la tecnología presente, y no digamos nada la futura, les va a exigir un replanteamiento de los niveles de destrezas que se deben conseguir.

En resumen, y a modo de ejemplo, se trata de poner más énfasis en el planteamiento de las ecuaciones, que es una forma de desarrollar estructuras de pensamiento algebraico, que en la propia resolución de la ecuación, que hoy en día ya no es tan importante. De hecho téngase en cuenta que todavía no existe ninguna calculadora u ordenador a la que se le edite un enunciado de un problema y automáticamente plantee la ecuación, en cambio hoy en día existen diversos programas de ordenador y calculadoras a las que se les edita la ecuación y con tan solo apretar la tecla ENTER se puede obtener su solución, en tan solo unos segundos. Tan solo a modo de ejemplo volvamos a releer algunos de los celebres problemas clásicos:

La vida de Diofanto

Este túmulo cubre aquí a Diofanto. ¡Contemplad este prodigio!

Mediante la habilidad del fallecido esta piedra muestra su edad.

Para ser niño Dios le concedió la sexta parte de su vida;

En una duodécima parte más le creció la barba sobre las mejillas;

En otra séptima parte más contrajo el vínculo del matrimonio.

Al cabo de cinco años nació de esta unión un hijo.

¡Pobre niño bien amado! A la mitad de los años del padre había llegado cuando sucumbió ante el Destino.

Durante los cuatro años siguientes ahuyentando de sí la aflicción, sumido en profundas reflexiones, también llegó al fin temporal.

Tomado del Lilavati de Brahmim Bahskara (1114-1185), matemático indio

De un enjambre de abejas, 1/5 de las abejas vinieron hacia una flor de loto, 1/34 hacían un banano. Un número igual a tres veces la diferencia entre las dos cifras precedentes. ¡Oh bella con ojos de gacela! voló hacia un árbol Codaga (con corteza amarga sucedáneo de la quina). Otra, por último, balanceándose, deambula por aquí y por allá en los aires, atraída al mismo tiempo por el delicioso perfume del jazmín y del pandano. Dime, querida mía, ¿cuántas son estas abejas?

Un problema de Euler (1707-1783)

Un padre deja una herencia de 8.600 libras a sus cuatro hijos. Según el testamento, la parte del mayor debe ser inferior en 100 libras al doble de la parte del segundo. La parte del segundo, inferior en 200 libras al triple de la parte del tercero. Y la parte del tercero inferior en 300 libras al cuádruple de la parte del más joven. ¿Cuál es la parte de cada uno?

La serie de Rachinski (siglo XIX)

Encontrar una serie de cinco numeros enteros consecutivos tales que la suma de los cuadrados de los tres primeros es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos.

¿Donde reside la dificultad, en plantear la ecuación o, una vez planteada, resolverla?

José R. Vizmanos
IES Santamarca. Madrid

Referencias bibliográficas

BOYER, C. B. (1987): *Historia de la Matemática*, Alianza Universidad Textos, Madrid.

DÍEZ BARRABÉS, M. (1994): «Dificultades en el uso y significación de las letras en álgebra. Propuesta de una nueva ingeniería didáctica», Comunicación presentada al II CIBEM, Blumenau (Brasil).

DUNHAM, W. (1992): *Viaje a través de los genios*, Editorial Pirámide, Madrid.

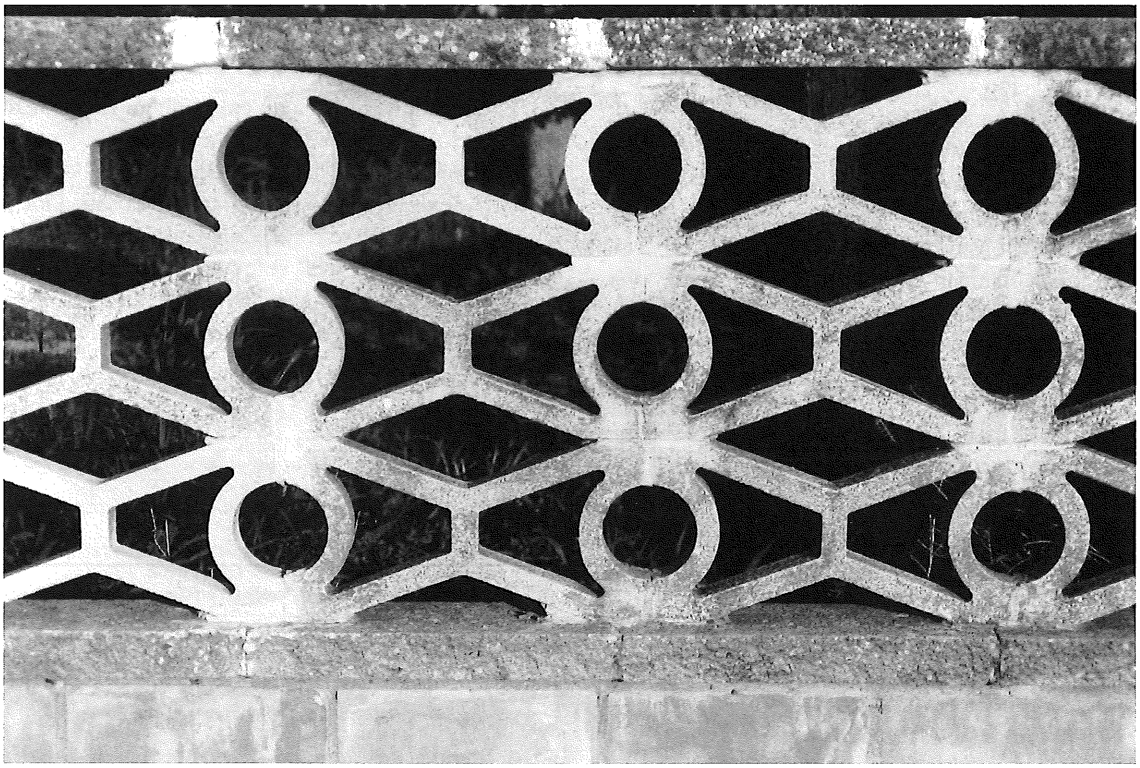
NCTM (1991): *Estándares Curriculares y de evaluación para la educación matemática*, SAEM Thales, Sevilla.

PARADIS, J. y otros (1989): *El álgebra en el período renacentista. La recuperación de los clásicos griegos*, PPU, Barcelona.

PERELMAN, Y. (1965): *Álgebra recreativa*, Editorial Mir, Moscu.

RADICE, L. (1983): *La matemática de Pitágoras a Newton*, Laia, Barcelona.

WUSSING, H. y W. ARNOLD (1989): *Biografías de grandes matemáticos*, Prensas Universitarias de Zaragoza, Zaragoza.



Lleida. Foto: Luis Balbuena