SUMA 26
noviembre 1997, pp. 39-52

# El aprendizaje del concepto de integral

Pilar Turégano Moratalla

El propósito de este artículo es presentar una propuesta didáctica de la integral definida para la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato a través de unas secuencias de aprendizaje que ayuden al estudiante a captar las ideas fundamentales del cálculo integral, del concepto de integral y del proceso de integración.

ARTÍCULOS

EN EL AÑO 1991 presenté por primera vez, en las IV Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas celebradas en Castellón, una nueva propuesta didáctica para la integral definida. Desde entonces, muchos han sido los profesores de Secundaria y Bachillerato que se han interesado en ella. En aquel momento, la había experimentado durante tres años con estudiantes universitarios, pero fue en 1992 cuando la puse en práctica con estudiantes de 1.° de BUP. Los resultados de esta experiencia están recogidos en Turégano (1994*a*) y fueron objeto de una comunicación en las VII JAEM celebradas en Madrid en 1995. Allí me comprometí con varios profesores a escribir el presente artículo.

Las líneas básicas de mi propuesta son fundamentalmente dos:

- Introducción del concepto de integral como primera iniciación al estudio del cálculo infinitesimal, con independencia del concepto de derivación y previamente al estudio de límites.
- Presentación de dicho concepto como una continuación de la noción de área, utilizando la visualización a través del ordenador para dar significado al concepto y eliminar al máximo los cálculos algebraicos.

La utilización de un entorno gráfico informático es fundamental pues el estudiante se ve así liberado de tediosos y necesarios cálculos y representaciones, lo que permite al profesor centrar el estudio en los conceptos, globalizando los aspectos gráficos, numéricos, algebraicos y simbólicos.

En otros escritos[1] me he referido al modelo teórico elaborado, basado en la definición geométrica de integral de Lebesgue, por lo que remito a ellos a quienes deseen estudiar y encontrar una justificación a toda la propuesta.

## Un enfoque conceptual para la integral definida

Mi idea es presentar la integral, en principio definida, como una continuación de la noción de área, que los estudiantes conocen desde los primeros días de la escuela. Lo que empezó para los estudiantes de educación primaria con la medición de área en general debe continuar en secundaria con el estudio de clases muy especiales de áreas: a saber, aquéllas cuyos límites inferiores, de la derecha y de la izquierda, tienen forma de caja, según la terminología de Toeplitz (1963), y que están limitados por una curva sólo por arriba o por abajo. De hecho, estas figuras no son otra cosa que representaciones gráficas de una función f(x) en un intervalo $a \le x \le b$. El problema de calcular el área de esas figuras consiste en determinar un dominio[2] rectangular (figura 2) cuya área sea igual a la del dominio original (figura 1), quedando el problema reducido al cálculo de la altura media de la función f(x) en todo el intervalo [a, b], y, a continuación, calcular el área pedida como el producto de esta altura por la longitud b - a del intervalo cerrado [a, b]. La existencia de la integral queda justificada por la existencia de la altura media.

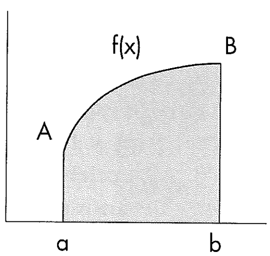



Figura 1

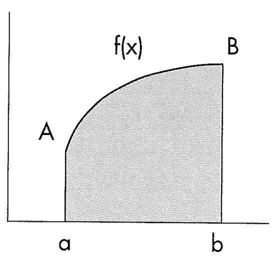



Figura 2

área abBA = área abCD

$$\int_a^b f = (b-a)M$$

Una razón para utilizar el símbolo anterior para la integral es que expresa con fuerza que ésta depende sólo de la función f y del intervalo [a, b].

En el caso de que f(x) no sea siempre positiva, la curva AB corta el eje *x* en un número finito o infinito de veces. En este caso se tienen dos especies de dominios: unos, por debajo de ox; los otros, por encima. Cada uno de estos dominios es cuadrable (Lebesgue, 1928, p. 41), y se define la integral de f(x) como la suma de las áreas que están por encima del eje ox menos la suma de las áreas que están por debajo de dicho eje. (Figuras 3 y 4).

$$\int_a^c f = A_1 - A_2 = (b-a)M_1 - (c-b)(-M_2) =$$
$$= (b-a)M_1 + (c-b)M_2$$

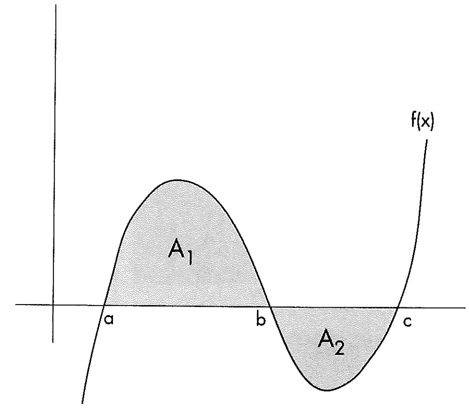



Figura 3

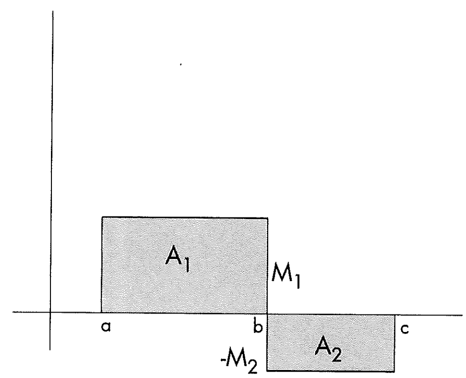



Figura 4

Este enfoque nos llevaría a los métodos intuitivos anteriores a Cauchy, pero hoy la definición de medida les da una fundamentación lógica.

El proceso planteado para medir el área –proceso de integración– es apropiado para llevar a los estudiantes a la discusión de sucesiones numéricas, límites y número real. El resultado final de este proceso –un número real– es la integral buscada.

Este enfoque está en consonancia con las ideas previas puestas de manifiesto por los estudiantes (Turégano, 1994*a*, 1994*b* y 1996*c*) y con el desarrollo histórico del concepto de integral (Turégano, 1993*a*, 1994*a* y 1995*c*), comple-

1 El modelo teórico se encuentra, abreviado, en Turégano (1991, 1992) y, de forma exhaustiva, en Turégano (1994*a*, 1996*a*, 1996*b*); la justificación del cambio curricular propuesto, en Turégano (1994*a*, 1995*a*, 1995*b*, 1996*a*); los resultados obtenidos con estudiantes de 1.° de BUP, y el diseño de situaciones didácticas, en Turégano (1994*a*).

2 Lebesque utiliza el término «dominio» para referirse a los puntos de la región interior que determina en el plano toda curva cerrada sin puntos múltiples.

mentado con la utilización de las nuevas tecnologías.

Todas estas recomendaciones se plasman de forma explícita en el Diseño Curricular Base (MEC, 1989), que recoge las bases de la propuesta oficial española para la Educación Primaria y Secundaria en la actualidad.

Considero este planteamiento como una clara alternativa a la aproximación mediante sumas «superiores» e «inferiores», por ejemplo, de rectángulos, pues, como dice Tall (1986), esta teoría de sumas superiores e inferiores se construye sobre un teorema de existencia que asegura que estas sumas existen sin llegar nunca a justificar al estudiante novel ni su existencia ni su convergencia. Este planteamiento basado en la integral de Riemann produce grandes dificultades conceptuales en los estudiantes, que ya han sido puestas de manifiesto en diferentes investigaciones (Orton, 1983; Cordero, 1987; Sneider-Gilot, 1988 y Turégano, 1994*a*), dificultades, principalmente, por estar en desacuerdo con las ideas previas de los estudiantes en relación a las descomposiciones infinitesimales de las superficies (Turégano, 1993*b*, 1994*a* y 1994*b*) y con las primeras intuiciones acerca de los infinitesimales y límites (Turégano, 1994*a*, 1994*b* y 1996*c*).

## Ideas fundamentales del cálculo integral

Las ideas fundamentales del cálculo integral están presentes, aunque de forma inconsciente, en las experiencias diarias de muchas personas. Allí donde existe una función que relacione dos magnitudes de tal forma que, a cada valor de una de ellas, corresponde determinado valor de la otra, existe un problema de cálculo integral. El cálculo integral determina los resultados de los cambios entre esas dos magnitudes. Esos cambios pueden ser constantes a lo largo de un intervalo o variar de forma continua. Tanto en una caso como en el otro, una imagen visual nos permitiría darnos cuenta de que los resultados de los cambios y las áreas bajo los gráficos son exactamente lo mismo desde el punto de vista de las matemáticas. Es muy importante la imagen visual, que nos va a permitir interpretar el «significado» del área bajo el gráfico según el problema planteado. Unas veces puede representar una distancia, los puntos acumulados por un equipo de fútbol, las ganancias de un empresa, etc. En muchas aplicaciones de las integrales se está más interesado en la interpretación del significado de esa área que en el valor numérico de la misma.

*Las ideas fundamentales del cálculo integral están presentes, aunque de forma inconsciente, en las experiencias diarias de muchas personas.*

Los problemas reales del cálculo integral no se abordan ni en la Educación Secundaria Obligatoria ni en el Bachillerato, sino en la Universidad, pero es en la Educación Secundaria Obligatoria donde se tiene la responsabilidad de sembrar el germen del concepto de integral. Hay que huir de la exclusiva algoritmización del cálculo sin fundamentos conceptuales, ya que este enfoque es una de las causas del gran fracaso de los estudiantes universitarios (véanse referencias en Turégano, 1995*a*) en la asignatura de Cálculo Infinitesimal, no ayudándoles a reconocer en un determinado problema –donde no figuren de forma explícita– una integral, una derivada, una ecuación diferencial, etc.

Por otra parte, ya existe hoy día gran número de programas de ordenador que manejan los algoritmos de cálculo a la perfección, con lo cual no es necesario centrar la atención del estudiante en el estudio de esos algoritmos sino en los enfoques conceptuales del cálculo, no existiendo programas de ordenador que, mediante la pulsación de una tecla, nos planteen el problema o nos diga que hay que tomar una u otra decisión acerca de determinado fenómeno de estudio.

La idea del proceso acumulativo de la integral surge de las variaciones de las magnitudes: si esas variaciones son constantes en el intervalo, el problema se reduce a la suma de áreas de rectángulos, pero si son continuas, barren el área bajo el gráfico en el intervalo considerado.

Es necesario encauzar el trabajo de los estudiantes en estos procesos de variación, más que en el proceso de integración. En otras palabras, si criticamos la algoritmización temprana de la integral para centrarnos exclusivamente en el tecnicismo de las aproximaciones al área bajo una curva, estamos cometiendo otro error, diferente, pero, al fin y al cabo, otro error. El estudiante continuará sin captar las ideas fundamentales del cálculo integral y seguirá sin asociar la integral con el cálculo de la medida de las variaciones entre magnitudes. Estas variaciones nos permiten confeccionar una tabla de valores que, al ser representados, nos da una información interesantísima, ya que cada punto representa el área acumulada hasta ese momento, y el último punto, el resultado final.

El cálculo del área bajo un gráfico requiere muchos cálculos intermedios. Con métodos algebraicos, todos los ejemplos que no sean muy fáciles se hacen extremadamente difíciles y aburridos para los estudiantes. El esfuerzo que se les exige para la realización de los cálculos es tan grande que al final se olvidan del problema por estar excesivamente centrados en las aproximaciones al área. Además, la información numérica que se va obteniendo por sí sola no es suficiente para determinar el verdadero valor del área y llevaría mucho tiempo obtener aproximaciones cercanas con una calculadora normal y corriente.

Ejemplificaremos más adelante, en las secuencias de aprendizaje, estas ideas, que han sido tratadas con claridad por Wenzelburger (1994).

Por otra parte, estas variaciones son las que nos van a permitir explorar las propiedades de la integral y su conexión con el cálculo diferencial

Estos son, desde mi punto de vista, los objetivos que se deben conseguir en la Educación Secundaria Obligatoria y en Bachillerato con respecto al concepto de integral.

Soy consciente de que estos planteamientos chocan de frente con un agente externo: las pruebas de acceso a la Universidad, que ponen el énfasis, principalmente, en los aspectos mecánicos[3] y no en los conceptuales. Y es a estas pruebas a las que los profesores nos agarramos como una lapa para seguir trabajando en un terreno en el que nos encontramos sumamente cómodos y seguros. Y, aunque dichas pruebas sean muy importantes para los estudiantes –pues de las calificaciones que obtengan en ellas dependerá el que cursen una determinada carrera–, más importantes deberían ser los conocimientos que adquirieran en estas etapas, ya que numerosas investigaciones han puesto de manifiesto el gran fracaso de los estudiantes en los cursos de cálculo en la Universidad. Por tanto, no se deben seguir utilizando como excusa las pruebas de selectividad; debemos asumir que es totalmente necesario afrontar y llevar a la práctica una reforma metodológica que exija un ritmo de trabajo diferente y una organización de los contenidos y de las aulas también diferente. Es urgente, además, formar equipos de trabajo por centros para que pueda planificarse la continuidad en el proceso de aprendizaje de los estudiantes cuando éstos tienen que cambiar de profesor.

## Secuencias de aprendizaje del concepto de integral

La adquisición por parte del estudiante del concepto de integral es un proceso lento cuyo aprendizaje se debe extender a lo largo de la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato para pasar a la formalización en la Enseñanza Universitaria. Para que ese aprendizaje sea significativo para el estudiante, es necesaria una enseñanza que le permita participar activamente en la construcción de su conocimiento. Propongo, a continuación, una serie de secuencias que permitirán al estudiante hacerse una idea del concepto de integral y del proceso de integración, así como captar las ideas fundamentales del cálculo integral.

### *Imagen del área bajo un gráfico*

Inicialmente, es preciso familiarizar al estudiante con el concepto de área bajo un gráfico, pues, como se puede ver en Turégano (1994*a*), los estudiantes cometen múltiples errores al sombrear áreas bajo gráficos, errores que, en algunos casos, alcanzan hasta el 75% de los estudiantes analizados en mi estudio.

Para ayudar al estudiante a crear una imagen completa de área bajo un gráfico, es conveniente utilizar programas de ordenador flexibles que le permitan construir gráficas de funciones y visualizar el área sombreada en un intervalo convenido. El programa ÁREA, creado y utilizado para mi investigación, permite al estudiante, en una hora, visualizar de 30 a 40 representaciones de funciones con el área sombreada bajo el gráfico.

En un principio, soy partidaria de la selección, por parte del profesor, de las funciones y de los intervalos a considerar, con la finalidad de incluir en estos ejemplos los casos posibles con diferentes dominios e intervalos.

La visualización juega aquí un papel importantísimo, ya que proporciona una visión holística del gráfico y del área sombreada. Este primer acercamiento a la integral tiene que ver con el área como magnitud, y, tal como argumenta Dreyfus (1991), el proceso de aprendizaje de un determinado concepto pasa inicialmente por la utilización de una sola representación. Pienso que esta representación debe ser gráfica.

A continuación, es conveniente dar al estudiante la oprtunidad de que explore los ejemplos que se le ocurran y, por último, tratar de crear alguna destreza

3 Existen excepciones, como el examen de P.A.U. Bachillerato LOGSE en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II del presente curso académico en la Universidad de Castilla-La Mancha. En dicho examen se pedía a los estudiantes que relacionaran, de forma razonada, las gráficas de tres funciones, de sus derivadas y de la función área de cada una de ellas.

con lápiz y papel en el sombreado de áreas bajo gráficos.

Estas actividades deben incluir representaciones gráficas de una misma función con variaciones de intervalo de integración.

## Iniciación al proceso de integración

La noción de integral va asociada a la idea de medir el área bajo gráficos. Al proceso utilizado para determinar ese número es a lo que llamamos proceso de integración.

En la propuesta que estoy considerando, hay que determinar la altura del rectángulo congruente con el área a determinar. La existencia de la integral queda justificada con la existencia de esa altura.

Es conveniente mostrar a los estudiantes ilustraciones como las siguientes:

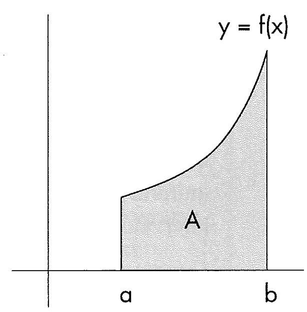



Figura 5

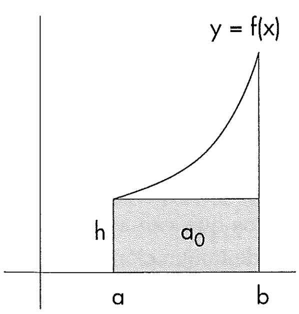



Figura 6

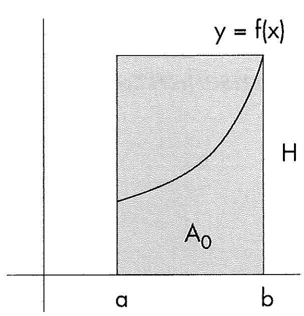



Figura 7

La figura 5 presenta el área que se desea determinar en el intervalo [a, b]. La figura 6 presenta el área del rectángulo tomando la altura mínima del intervalo [a, b], y la figura 7 la del rectángulo con la altura máxima del intervalo. La imagen visual permite al estudiante aceptar la siguiente desigualdad: $a_0 < A < A_0$.

La figura 8 muestra la diferencia de las áreas $A_0$ y $a_0$, surgiendo de esa imagen visual la necesidad de aproximar $a_0$ con $A_0$. Al ser la base de los rectángulos la misma, lo que hay que hacer es aproximar las alturas: aumentar *h* y disminuir *H* hasta hacerlas coincidir.

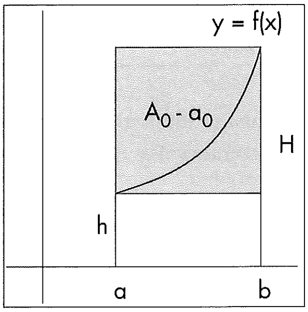



Figura 8

Este acercamiento entre *h* y *H* implica la realización de las siguientes actividades:

- División de un intervalo en subintervalos mediante sucesivas biparticiones y determinar las abscisas de los puntos de división.
- Calcular la ordenada en los extremos izquierdo y derecho de esos intervalos. Sustitución de la palabra «ordenada» por «altura».
- Calcular la media de las alturas en los extremos izquierdo y derecho.

  Al pasar de las curvas a las funciones, hay evidentemente un cambio de lenguaje (geométrico por algebraico) que nos permite dar sentido a alturas negativas y, posteriormente, a áreas negativas.

Para comenzar, elegimos una función sencilla $y = x^2$ y un intervalo con los extremos enteros y que al menos las primeras biparticiones determinen extremos también enteros: por ejemplo, [0, 4].

Es conveniente que, inicialmente, los estudiantes realicen las operaciones con calculadora, para que se hagan una idea de lo que están haciendo. Inmediatamente, se debe convertir en un programa de ordenador, que haga la parte más pesada de los cálculos, con el fin de que se puedan centrar en las ideas y no en los tecnicismos.

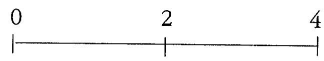
### Actividades iniciales

***Definición***

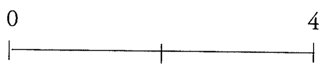
Llamamos bipartición de un intervalo a la división del mismo en dos partes iguales. Cada una de esas partes recibe el nombre de subintervalo.

***Ejemplo***

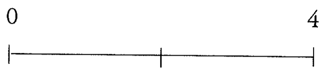
Consideramos el intervalo [0, 4] y efectuamos una bipartición. Los dos subintervalos que determina son el [0, 2] y el [2, 4].




*Cuestión 1.* En el mismo intervalo [0, 4] efectúa dos biparticiones y escribe los subintervalos que determina.




*Cuestión 2.* En el mismo intervalo efectúa tres biparticiones y escribe los subintervalos que determina.

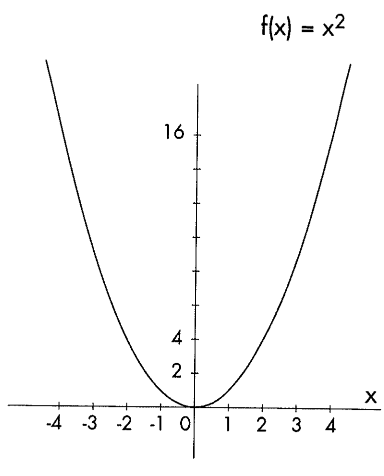



*Cuestión 3.* Si efectuamos 7 biparticiones, ¿cuántos subintervalos determinaríamos?

*Cuestión 4.* Si efectuamos *n* biparticiones, ¿cuántos subintervalos determinaríamos?

***Ejemplo***

El diagrama siguiente muestra el gráfico de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo [–4, 4].




*Cuestión 1.* Determina qué valores toma en los extremos de los intervalos [0, 1], [1, 2], [2, 3] y [3, 4].

*Cuestión 2.* Dibuja sobre el gráfico las ordenadas calculadas. A esas ordenadas las llamaremos *alturas* de la función en los extremos de los intervalos.

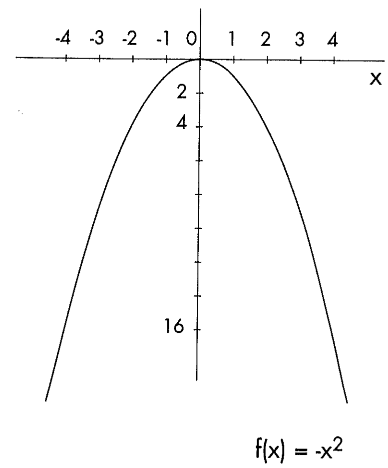
*Cuestión 3.* Di cuáles son las alturas «mínimas» y cuáles las «máximas» en los intervalos dados.

*Cuestión 4.* Halla la media de las alturas mínimas y la de las alturas máximas.

*Si hemos de preparar al estudiante para lo desconocido el aprendizaje debe predominar sobre la enseñanza.*

***Ejemplo***

El diagrama siguiente muestra el gráfico de la función $f(x) = -x^2$ en el intervalo [–4, 4].




*Cuestión 1.* Determina qué valores toma en los extremos de los intervalos [–4, –3], [–3, –2], [–2, –1] y [–1, 0].

*Cuestión 2.* Dibuja sobre el gráfico las ordenadas calculadas.

*Cuestión 3.* Di cuáles son las alturas «mínimas» y cuáles las «máximas» en los intervalos dados.

*Cuestión 4.* Halla la media de las alturas mínimas y la de las alturas máximas.

**Actividades de refuerzo**

Si hemos de preparar al estudiante para lo desconocido, el aprendizaje debe predominar sobre la enseñanza. Esto es lo que debemos conseguir con estas actividades previas a la determinación del valor numérico del área, haciendo hincapié en todos y cada uno de los subconceptos que van apareciendo en el proceso de integración.

La actividad siguiente debe realizarse con el ordenador.

***Ejemplo***

Utilizo el programa ALTURAS: se introduce la función, los extremos del intervalo y el número de biparticiones que queremos efectuar. A continuación aparecen en la pantalla las secuencias numéricas {h(f, a, b, n)}, {H(f, a, b, n)} y {H(f, a, b, n) - h(f, a, b, n)}, que representan, respectivamente, las medias en los extremos izquierdos de los intervalos, las medias en los extremos derechos y las diferencia entre las medias. La repetición continuada de este procedimiento apoyará fuertemente la intuición de que la diferencia entre *h* y *H* puede hacerse menor a medida que se hagan más subdivisiones. Esta intuición, que es correcta, viene reforzada por la imagen visual que plasma a continuación el ordenador, con la gráfica de la función y la impresión de *h* y *H* en distinto color, y, como quiera que con diez biparticiones ya son bastantes próximas para intervalos no muy grandes, se hace evidente que van a coincidir. Debe aprovecharse esta situación para la discusión de límites, ya que las ideas sobre límites empiezan a desarrollarse cuando se pueden explorar las situaciones en las que una sucesión se establece o converge, y que esto puede ser más real en una situación geométrica. Pensamos que esta es una buena ocasión para esta discusión y para establecer una relación entre los marcos geométrico y numérico.

Dispongo también de un programa, APROXIMA, que nos determina el número de biparticiones a efectuar, para que la diferencia H - h sea, por ejemplo, ≤ 0'002.

Para la función $y = x^2$ en el intervalo [0, 4] y 13 biparticiones, los datos obtenidos son los de la tabla 1.

| *N.° de biparticiones* | *Media de las alturas extr. izq. h* | *Media de las alturas extr. der. H* | *Diferencia de las alturas H – h* |
|---|---|---|---|
| Ninguna | 0 | 16 | 16 |
| 1 | 2 | 10 | 8 |
| 2 | 3'50080 | 7'50000 | 4 |
| 3 | 4'37500 | 6'37500 | 2 |
| 4 | 4'84375 | 5'84375 | 1 |
| 5 | 5'08594 | 5'58594 | 0'50000 |
| 6 | 5'20898 | 5'45898 | 0,25000 |
| 7 | 5'27100 | 5'39600 | 0'12500 |
| 8 | 5'30212 | 5'36462 | 0'06250 |
| 9 | 5'31770 | 5'34896 | 0'03125 |
| 10 | 5'32552 | 5'34114 | 0'01563 |
| 11 | 5'32943 | 5'32724 | 0'00781 |
| 12 | 5'33138 | 5'33529 | 0'00391 |
| 13 | 5'33236 | 5'33431 | 0'00195 |
| Con infinitas | 5'3 | | 0 |

Tabla 1

Estas secuencias numéricas facilitan la discusión, como ya he dicho anteriormente, de límites y acercarnos al concepto de número real según la construcción de Cantor a partir de sucesiones fundamentales o de Cauchy. En esta construcción, el número real queda identificado con lo que llamamos clase de equivalencia de sucesiones fundamentales. La idea está organizada alrededor del concepto de punto de acumulación, ya que en el número real así definido resulta ser el punto de acumulación del conjunto formado por los términos de la sucesión asociados a él. Me parece interesante este acercamiento ya que lleva implícito un doble empleo tácito del infinito actual: en primer lugar, la sucesión no tiende al número real sino que se identifica, al considerar la totalidad de sus términos, con el número real. En segundo lugar, mediante un criterio de equivalencia entre sucesiones, el número real queda identificado, no con una sino con todas las sucesiones equivalentes, esto es, con un conjunto infinito cuyos elementos son, a su vez, conjuntos infinitos.

Así, una sucesión infinita de números racionales constituye una multiplicidad que, al pensarse en su totalidad, da lugar a un único número real: el asociado a ella.

Cuando se tienen secuencias de números (en este caso las {h(f, a, b, n)} y {H(f, a, b, n)}), es importante saber encontrar los términos siguientes, y lo que es más interesante, tener un criterio para determinar cualquier término. En este caso, el criterio es muy fácil de establecer:

$$H(f,a,b,n) - h(f,a,b,n) = \frac{f(b)-f(a)}{2^n}$$

Aunque hay muchos estudiantes (Turégano, 1994*a* y 1996*c*) dispuestos a afirmar rotundamente que el límite de una sucesión es un número al que se acercan, pero que nunca alcanzan, esta práctica con el ordenador tiene como objetivo desafiar sus intuiciones ya hacerles reflexionar para que cambien esa imagen del concepto de límite.

Utilizo también las sucesiones {H(f,a,b,n)} y {h(f,a,b,n)} y su diferencia para razonar sobre la situación de la representación gráfica de f(x) con respecto a los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, forma de gráfico, etc.

Si H – h > 0 en un determinado intervalo la función es creciente; si H – h < 0, la función es decreciente; si las *h* y *H* son positivas, la función está por encima del eje ox, y, viceversa, si *h* y *H* son negativas, está por debajo de dicho eje, etc.

## Cálculo de integrales definidas

Después de las actividades expuestas, el estudiante ya tiene una idea del proceso seguido para el cálculo de la altura del rectángulo congruente con el área a determinar.

Con el programa INTEGRAL tratamos ahora de unir las dos representaciones: una imagen visual del gráfico y el cálculo numérico de la altura que nos va a permitir obtener el área.

Se teclean los datos de la función, del intervalo y del número de biparticiones deseadas. Con la orden de ejecución, aparece una primera pantalla con el gráfico de la función y el área sombreada en el intervalo convenido.

Una segunda pantalla nos muestra las secuencias numéricas de {H(f, a, b, n)}, {h(f, a, b, n)}, {H(f, a, b, n) - h(f a, b, n)}, las secuencias del área con estas alturas y las diferencias de las áreas.

En una tercera pantalla aparece de nuevo el gráfico de la función con la impresión de *h* y *H* en diferentes colores, con el máximo de biparticiones solicitado.

Con las secuencias obtenidas se puede conjeturar el valor de la altura buscada *M* y del área $\int_a^b f$.

Por último, se pide el valor de *M* y $\int_a^b f$ cuando se efectúan infinitas particiones.

Soy de la opinión de que el proceso hay que terminarlo; no se puede dejar al estudiante ante la eterna duda de si el límite se alcanza o no se alcanza. Si no se determina el valor del área, estaríamos fomentando la concepción del infinito potencial –tan arraigado en los estudiantes–, siendo éste uno de los obstáculos con los que se encuentra el alumno para poder concebir un proceso infinito como algo definido o acabado.

En principio, creo que hay que calcular el área con funciones que sean monótonas y positivas en el intervalo de integración, pasar después a funciones monótonas y negativas y finalizar con funciones que conjuguen las dos situaciones anteriores.

***Ejemplo***

Calcular el área bajo la curva $y = x^2$ en el intervalo [0, 4]. (Ver tabla 2).

## Definición geométrica de integral definida

Se selecciona una colección de ejemplos y contraejemplos, es decir, funciones en las que, al construir sus gráficas, el valor numérico de la integral sea exactamente el del dominio sombreado, para lo cual f(x) ≥ 0 en el intervalo considerado, y funciones que nos

| *N.º de biparticiones* | *Media de las alturas extr. izq. h* | *Media de las alturas extr. der. H* | *Diferencia de las alturas H – h* | *Área (b–a)h* | *Área (b–a)H* | *Diferencia de las áreas* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ninguna | 0 | 16 | 16 | 0 | 64 | 64 |
| 1 | 2 | 10 | 8 | 8 | 40 | 32 |
| 2 | 3'50080 | 7'50000 | 4 | 14 | 30 | 16 |
| 3 | 4'37500 | 6'37500 | 2 | 17'5 | 25'5 | 8 |
| 4 | 4'84375 | 5'84375 | 1 | 19'375 | 23'375 | 4 |
| 5 | 5'08594 | 5'58594 | 0'50000 | 20'343 | 22'343 | 2 |
| 6 | 5'20898 | 5'45898 | 0,25000 | 20'83592 | 21'83592 | 1 |
| 7 | 5'27100 | 5'39600 | 0'12500 | 21'08400 | 21'58400 | 0'5 |
| 8 | 5'30212 | 5'36462 | 0'06250 | 21'20848 | 21'45848 | 0'25 |
| 9 | 5'31770 | 5'34896 | 0'03125 | 21'27084 | 21'39584 | 0'125 |
| 10 | 5'32552 | 5'34114 | 0'01563 | 21'30208 | 21'36456 | 0'0625 |
| 11 | 5'32943 | 5'32724 | 0'00781 | 21'31772 | 21'34896 | 0'03125 |
| 12 | 5'33138 | 5'33529 | 0'00391 | 21'32552 | 21'34116 | 0'015625 |
| 13 | 5'33236 | 5'33431 | 0'00195 | 21'32944 | 21'33724 | 0'0078125 |
| Con infinitas | 5'3 | | 0 | 21'33 | | 0 |

Tabla 2

determinan dominios sobre el eje ox y debajo de dicho eje en el intervalo considerado, con lo que el valor de la integral será el área de los dominios con $f(x) \geq 0$ menos el área de los dominios con $f(x) \leq 0$.

Aquí se requiere una puesta en común con la finalidad de elaborar una definición para la integral. Se toma, por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ en el intervalo [-2, 2]. Si se aplica el programa INTEGRAL, el valor obtenido para el área será 0. Pero, según la imagen mostrada, claramente hay un área. Muchos estudiantes exclaman incrédulos: ¡No puede ser! Hay una fe ciega, por parte de los estudiantes, en que el ordenador no se equivoca, por lo cual hay algo más. Aquí hay una oportunidad para la investigación y llegar a dar una definición geométrica de integral. Es en este momento cuando hay que descomponer la imagen holística del gráfico en partes para proceder a su análisis, no en entidades discretas, aisladas unas de otras, sino relacionadas en un todo. Se analiza, por una parte, el dominio cuya área es

$$\int_{-2}^{0} x^3$$

y, por otro, el dominio de área

$$\int_{0}^{2} x^3$$

pero siempre tratando de relacionarlas con

$$\int_{-2}^{2} x^3$$

Merece la pena comentar brevemente la situación con la que nos podemos encontrar en la resolución de este problema, ya que se observa una clara división dicotómica en el pensamiento de los estudiantes:

- Unos razonan con los números que se obtienen al realizar las integrales.
- Otros lo hacen sobre las regiones cuya área hay que determinar.

Los primeros justifican su razonamiento de la forma siguiente: al calcular

$$\int_{-2}^{2} x^3 = 0$$

*Con la realización de las actividades propuestas, el estudiante se va preparando para el difícil proceso de transición al concepto abstracto, pero ese proceso depende, esencialmente, de las conexiones entre las distintas representaciones que utilicen los estudiantes. Estas conexiones, según Dreyfus, constituyen una tercera etapa del aprendizaje.*

y tener a la vista el gráfico con el área sombreada, deducen que esa área no puede ser cero. Un análisis por partes les permite calcular el área entre [–2, 0] y entre [0, 2]. Al ver que son iguales, pero con signo opuesto, dicen que habrá que restar en vez de sumar.

Los segundos argumentan que si el área entre [-2, 0] es negativa, como esa región es congruente con la de base [0, 2], el área sería

$$\int_{0}^{2} x^3 - \int_{-2}^{0} x^3$$

Alguno, incluso, llega a insinuar si el área no será el doble de la de arriba:

$$\int_{-2}^{2} x^3 = 2\int_{0}^{2} x^3$$

La conclusión a la que llegan es que, cuando la gráfica de una función corta el eje $x$ en varios puntos, determina regiones sobre $y$ bajo dicho eje. El área buscada no es la suma de áreas, ya que, al ser la de abajo negativa, la estaríamos restando, y llegan a la conclusión de que

$$\int_{a}^{b} f(x)$$

no se debe hacer de «una sola vez» en aquellos casos en que $f(x)$ corte el eje $x$ en más de dos puntos, debiendo descomponerse, entonces, en la suma de tantas integrales como regiones distintas determine.

Es indudable que, sin la imagen visual, estos razonamientos no se hacen explícitos en los estudiantes. Quiero reseñar, además, que el ejemplo es muy significativo, ya que, si eligiéramos otro en que la integral primera no fuera cero, quizá no se hubiera suscitado esta discusión, a no ser que existiesen estudiantes con una estimación visual del área muy precisa.

## Propiedades de la integral definida

Con la realización de las actividades propuestas, el estudiante se va preparando para el difícil proceso de transición al concepto abstracto, pero ese proceso depende, esencialmente, de las conexiones entre las distintas representaciones que utilicen los estudiantes. Estas conexiones, según Dreyfus, constituyen una tercera etapa del aprendizaje.

Si se da a los estudiantes la oportunidad de explorar las propiedades de la integral, se verá si han conseguido establecer la conexión entre las representaciones gráfica y numérica de integral utilizadas hasta ahora, así como su expresión simbólica. Se presentan ejemplos concretos:

Hallar –si existen– relaciones entre:

$\int_{1}^{3} x^2$ y las integrales $\int_{1}^{1'5} x^2$ y $\int_{1'5}^{3} x^2$

$\int_{1}^{3} (x^2 + x^3)$ y las integrales $\int_{0}^{4} x^2$ y $\int_{0}^{4} x^3$

$\int_{1}^{2} 3x^2$ y la integral $\int_{1}^{2} x^2$

Se observan diferentes tendencias entre los estudiantes:

- Unos justifican o deducen las relaciones partiendo de los números que determinan (medida del área).
- Otros las deducen partiendo de la interpretación geométrica (área como magnitud) recurriendo a los rectángulos.

Por ejemplo, si nos referimos a la aditividad del integrando y les pedimos que traten de hallar una relación entre

$$\int_a^b f \quad , \quad \int_a^b g \quad \text{y} \quad \int_a^b f+g$$

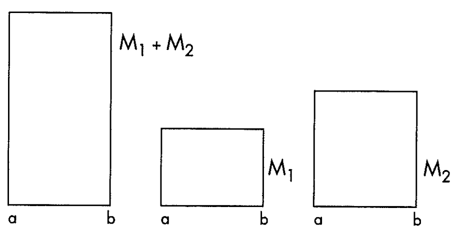
los primeros resuelven las tres y, con los números resultantes de medir el área, escriben la relación

$$\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$$

los segundos recurren a los rectángulos y escriben la relación entre sus áreas:

$$(b-a)M_1 + (b-a)M_2 = (b-a)(M_1 - M_2)$$

para pasar de ahí a las integrales correspondientes.




Los estudiantes utilizan las mismas estrategias para justificar las diferentes propiedades.

La ventaja de los estudiantes que utilizan la interpretación geométrica para justificar las propiedades de la integral es obvia, ya que les permite realizar generalizaciones; no así a los que utilizan los números, ya que éstos deben recurrir a ejemplos concretos para establecer las relaciones.

Un grupo pequeño de los que utilizan la imagen geométrica y obtienen bien las relaciones las valida recurriendo a los números, lo que pone de manifiesto la reticencia de algunos estudiantes a dar validez a las demostraciones visuales, tal y como manifiestan Dreyfus y Eisenberg (1990).

## *Construyendo una tabla de valores para la función área: representación e interpretación*

La función área surge de la función que se integra, conservando los puntos de su gráfico un fuerte vínculo con las área acumuladas en los distintos intervalos. El punto final de este gráfico representa el área total acumulada a lo largo de todo el intervalo de integración considerado.

Si a la función que se ha de integrar se la considera como una función de razones de cambio que expresa la dependencia de dos magnitudes y la variación de una de éstas con respecto a la otra, entonces los resultados de estas variaciones a lo largo de los intervalos de la variable independiente se pueden sumar para obtener el valor de la integral. En

$$\int_a^x f$$

cada suma parcial de $a$ a $x$ nos da el área en función de $x$. Al ir variando $x$, se obtiene el área acumulada desde $a$ hasta el valor de $x$ considerado. Esas sumas parciales son muy interesantes ya que permiten tomar decisiones acerca de la suma final.

Los cambios pueden ser constantes o variables a lo largo de los intervalos.

Utilizaré el ejemplo de la liga de fútbol y del movimiento de un coche para aclarar estos conceptos.

***Razones de cambio constantes***

En estos casos la simple aritmética nos permite llevar a cabo los cálculos. Sin embargo, sólo el 50% de los estudiantes estudiados (Turégano, 1994*a*) fue capaz de interpretar y calcular el área de los rectángulos obtenidos en la representación gráfica de dos problemas que presentaban razones de cambio constantes.

Pienso que un problema que puede motivar de forma especial a los estudiantes es el seguimiento de los resultados, jornada a jornada, obtenidos por un determinado equipo en la liga de fútbol profesional.

La figura 9 muestra los resultados del Fútbol Club Barcelona a lo largo de las 10 primeras jornadas de la liga 1995-96.

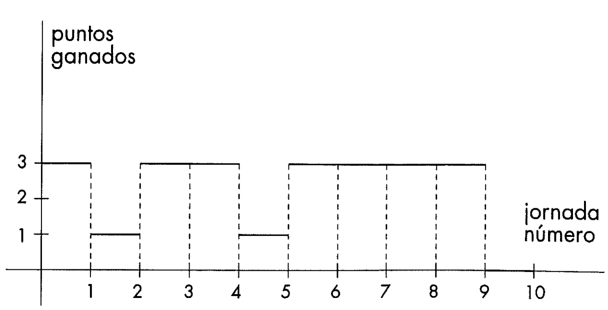



Figura 9

A cualquier aficionado a este deporte no le interesan solamente los puntos obtenidos cada semana, sino los acumulados semana a semana, y, por supuestos los acumulados al final del campeonato.

El cálculo de los resultados acumulados se puede interpretar como una suma de productos:

$$\left[\frac{3\,\text{puntos}}{\text{jornada}}\times 1\,\text{jornada}\right]+\left[\frac{1\,\text{puntos}}{\text{jornada}}\times 1\,\text{jornada}\right]+\left[\frac{3\,\text{puntos}}{\text{jornada}}\times 1\,\text{jornada}\right]+\cdots$$

$$+\left[\frac{0\,\text{puntos}}{\text{jornada}}\times 1\,\text{jornada}\right] = 3\,\text{puntos} + 1\,\text{puntos} + \cdots + 0\,\text{puntos} = 23\,\text{puntos}$$

| *Final jornada n.°* | *Puntos acumulados* |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 4 |
| 3 | 7 |
| 4 | 10 |
| 5 | 11 |
| 6 | 14 |
| 7 | 17 |
| 8 | 20 |
| 9 | 23 |
| 10 | 23 |

Tabla 3

La tabla 3 nos muestra los puntos acumulados al final de cada jornada. El último valor nos informa de los puntos obtenidos al término de la décima jornada. La representación gráfica de esta tabla es la figura 10, donde se puede leer fácilmente la información que nos interese.

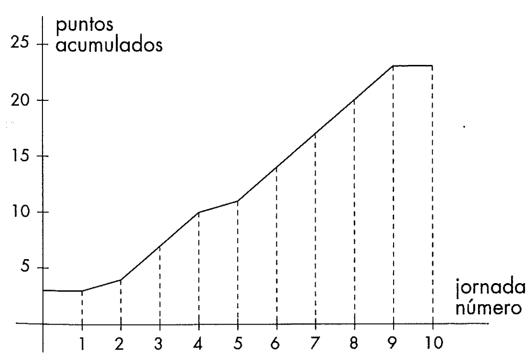



Figura 10

Cada uno de los puntos nos indica el total de puntos acumulados al final de la jornada indicada por la abscisa.

***Razones de cambio continuas***

Un ejemplo que ya fue utilizado en Turégano (1994*a*) y que nos puede ser útil para ilustrar los efectos de cambio con razones de cambio variables es el siguiente:

*Un coche de Fórmula 1 se queda sin propulsión debido a una rotura de embrague. Se estima que a partir de ese momento ($t = 0$) su velocidad en metros por segundo vendrá dada por $v = 80 - 0'05\,t^2$, cuya gráfica es la de la figura 11.*

Se les pueden hacer preguntas como las siguientes:

- ¿Qué distancia habrá recorrido a los 20 segundos?
- ¿Qué distancia recorre entre los 20 y los 40 segundos?
- ¿Qué distancia recorrerá hasta pararse?
- ¿Qué representa el área entre 20 y 30 segundos?

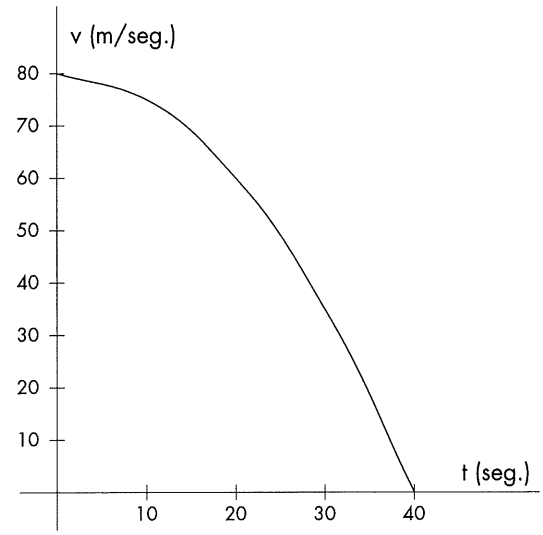



Figura 11

Con la ayuda del programa INTEGRAL se determina el espacio recorrido en los distintos intervalos, recogiendo esos valores en la tabla 4. Es conveniente que los estudiantes señalen sobre el gráfico el área a determinar en cada pregunta.

| | Periodo | Espacio recorrido |
|---|---|---|
| Hasta el minuto 10 | 10 seg | 783'333 |
| Hasta el minuto 20 | 20 seg | 1466'667 |
| Hasta el minuto 30 | 30 seg | 1950 |
| Hasta el minuto 10 | 40 seg | 2133'334 |

Tabla 4

A partir de los valores de la tabla 4 podemos representar una gráfica de los espacios recorridos cada 10 segundos, tal y como aparece en la figura 12. El punto final de esta gráfica representa el espacio total recorrido por el coche desde el momento en que se le rompe el embrague hasta que se para.

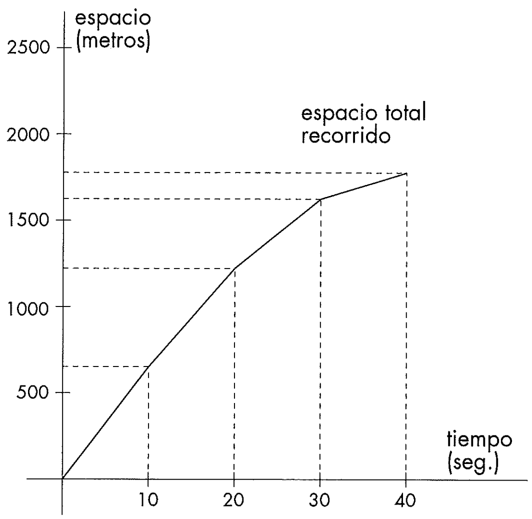



Figura 12

Al tomar períodos de tiempo más pequeños se obtienen más puntos y una gráfica más aproximada de la función integral o función área. La distancia recorrida en cada intervalo es función de la longitud de éste.

Este enfoque intuitivo, gráfico y a través de problemas concretos es lo que puede llevar al estudiante a reflexionar sobre las ideas fundamentales del cálculo integral.

## *La relación entre el cálculo diferencial e integral: Teorema fundamental del cálculo. Concepto de integral indefinida*

Una vez que el estudiante ha captado las ideas del Cálculo Diferencial e Integral, de los procesos de derivación e integración y de los conceptos de función y variable, es el momento de buscar una relación entre todos ellos.

Supongamos que $f$ es una función tal que

$$\int_a^x f(x)$$

existe para todo valor de $x$ del intervalo [a, b]. Mantenemos $a$ y $f$ fijos y estudiamos esta integral como una función de $x$. Designamos el valor de la integral con F(x), con lo que

$$F(x) = \int_a^x f(x) \quad \text{si } a \le x \le b \qquad [1]$$

Una ecuación como esta permite construir una nueva función $F$ a partir de la función dada $f$. El valor de $F$ en cada punto de [a, b] es el determinado por [1]. El área bajo el gráfico de f(x) depende, por tanto, del valor de $x$:

$$F(x) = M(f, a, x)(x - a) \qquad [2]$$

En la igualdad [2], M(f, a, x) representa la altura media de la función f(x) en el intervalo [a, x], y (x – a) es la amplitud de dicho intervalo. En la figura 13 F(x) es el área ABEF.

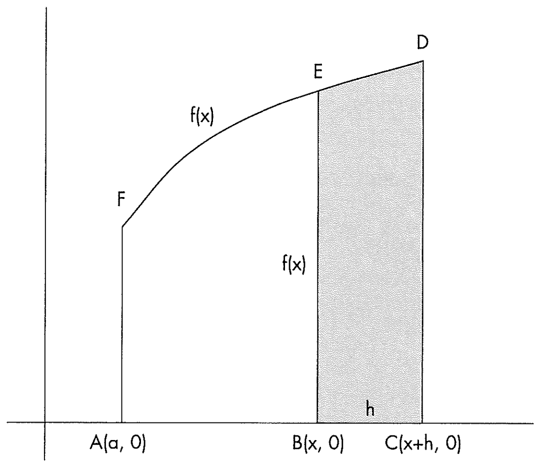



Figura 13

Si $h$ es un número mayor o igual que 0 y $x \le x + h \le b$, C(x+h, 0) será un punto situado a la derecha de B(x, 0). El área bajo el gráfico en el intervalo [a, x + h] será:

$$\int_a^{x+h} f(x) = M(f, a, x+h)(x+h-a)$$

o lo que es lo mismo:

$$F(x+h) = =M(f, a, x + h)(x + h - a) \quad [3]$$

En la igualdad [3], M(f, a, x+h) es la altura media de la función f(x) en el intervalo [a, x+h] y (x+h–a) la amplitud del mismo.

La variación del área en el intervalo [x, x+h] es la parte sombreada de la figura 13, y existe una relación muy simple entre las áreas:

área BCDE = área ACDF - área ABEF

Escribiendo esta igualdad en términos de integrales, tenemos

$$\int_x^{x+h} f(x) = \int_a^{x+h} f(x) - \int_a^x f(x)$$

$$hM(f, x, x+h)(x+h-x) = M(f, a, x+h)(x+h-a) - M(f, a, x)(x-a)$$

$$M(f,x,x+h) = \frac{M(f,a,x+h)(x+h-a) - M(f,a,x)(x-a)}{h} = \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} M(f,x,x+h) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$M(f, x, x+h) = F'(x)$$

Como $M(f, x, x) = f(x)$, quedaría que $f(x) = F'(x)$, igualdad que nos indica que la integración y la derivación son operaciones inversas.

$$\int_a^x f(x) = F(x) \quad \text{tal que} \quad F'(x) = f(x)$$

La función $F(x)$ recibe el nombre de función primitiva o antiderivada de $f(x)$ y nos va a permitir dar forma analítica a la integral. Esta es la última representación de la integral.

Si $C$ = cte entonces $F(x) + C$ tiene la misma derivada que $F(x)$. Esto nos indica que una integral indefinida es una familia de funciones $F(x) + C$ tal que $F'(x) = f(x)$, donde a la constante *C* se le llama constante de integración, y a la integral

$$\int_a^x f(x) = F(x) + C \qquad [4]$$

integral indefinida de $f(x)$. La integración y la derivación son operaciones inversas, con la particularidad de que, al pasar de funciones derivadas a integrales, hay que tener en cuenta las constantes de integración que dependen de las condiciones iniciales del problema.

A partir de aquí se establece la regla de Barrow, y con ella, un algoritmo de cálculo para la integral definida.

Particularizando [4] para $x = a$

$$\int_a^a f(x) = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C \quad \Rightarrow \quad F(a) = -C$$

Particularizando [4] para $x = a$

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$

*...una notable ventaja de la integral Lebesgue con respecto a Riemann es que ésta se refiere a funciones acotadas, definidas en un intervalo compacto, mientras que la primera se refiere a cualquier función medible, definida en un conjunto arbitrario y acotado o no en él.*

A partir de este momento es cuando se puede empezar, si se considera oportuno, con los algoritmos de cálculo para la resolución de integrales.

A lo largo de toda la propuesta hemos utilizado, para ilustrar el proceso, funciones polinómicas y monótonas, o monótonas a trozos, a lo largo de un intervalo, lo que no quiere decir que tengamos que limitarnos a este tipo de funciones. Precisamente, una notable ventaja de la integral Lebesgue con respecto a Riemann es que ésta se refiere a funciones acotadas, definidas en un intervalo compacto, mientras que la primera se refiere a cualquier función medible, definida en un conjunto arbitrario y acotado o no en él.

Una imagen gráfica que establece la comparación entre la integral de Riemann y la de Lebesgue es ésta: si colocamos sobre una mesa gran cantidad de monedas y queremos «medir» el dinero que hay allí, Riemann trocaría la mesa en rectángulos y contaría en cada uno de ellos; en cambio, Lebesgue clasificaría las monedas y contaría después. Esta es una manera de hacer alusión a la rigidez que suponen las particiones de Riemann, y una justificación a la elección de la integral Lebesgue para mi propuesta.

## Referencias


CORDERO, F. (1987): «El cálculo diferencial e integral como un solo concepto: la derivada», *Memorias del IX Congreso Nacional de la Asociación de Profesores de Matemáticas*, 232-239. Xalapa (Veracruz, México).

DREYFUS, T. (1991): «Advanced Mathematical Thinking Processes», en D. TALL (Ed) *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Londres, 25-41.

DREYFUS, T. y T. EISENBERG (1990): «On difficulties with diagrams: Theoretical Issues», *Proceedings of the XIVth International Conference PME*, 1, México, 27-34.

LEBESGUE, H. (1928): *Leçons sur l'intégration et la recherche de fonctions primitives*, Éditions Jacques Gabay París. (Reimpresión Gauthier-Villars et Cie Éditeurs, 1989.)

ORTON, A. (1983*a*): «Students' understanding of integration», *Educational Studies in Mathematics*, 14, 1-18.

SCHNEIDER-GILOT, M. (1988): *Des objets mentaux "aire" et "volume" au calcul des primitives*, (Tesis doctoral), Université Catholique de Louvain, Faculté des Sciences, Louvain La Neuve.

TALL, D. (1986): «A graphical approach to integration», *Mathematics Teaching*, 114, 48-51.

TOEPLITZ, O. (1963): *The calculus. A genetic approach*, The University of Chicago Press, Chicago.

TURÉGANO, P. (1991): «Propuesta didáctica para la integral definida», Comunicación presentada en las IV JAEM, Castellón.

—(1992): «Una alternativa a la integral de Riemann», *Ensayos*, 6, 227-233.

—(1993*a*): *De la noción de área a su definición*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Castilla-La Mancha, Cuenca.

TURÉGANO, P. (1993*b*): «Estrategias que utilizan los estudiantes en la resolución de problemas de áreas», *IV C. I. Investigación Didáctica Ciencias y Matemáticas*, 353-355.

—(1994*a*): *Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del cálculo infinitesimal*, Tesis Doctoral en microfitxes, Servei de Publicacions, Universitat de Valencia.

—(1994*b*): «Imágenes del concepto y estrategias que utilizan los estudiantes en la resolución de problemas de áreas"», *Ensayos*, 8, 237-257.

—(1995*a*): «El currículum y las dificultades de aprendizaje del Cálculo Infinitesimal», *Ensayos*, 9, 217-233.

—(1995*b*): «La integral definida en el nuevo Bachillerato», Comunicación presentada en las VII JAEM, Madrid.

**Pilar Turégano**
Departamento de Matemáticas
Universidad
de Castilla La Mancha
Societat d'Educació Matemàtica
de la Comunitat Valenciana
«Al-Khwarizmi»

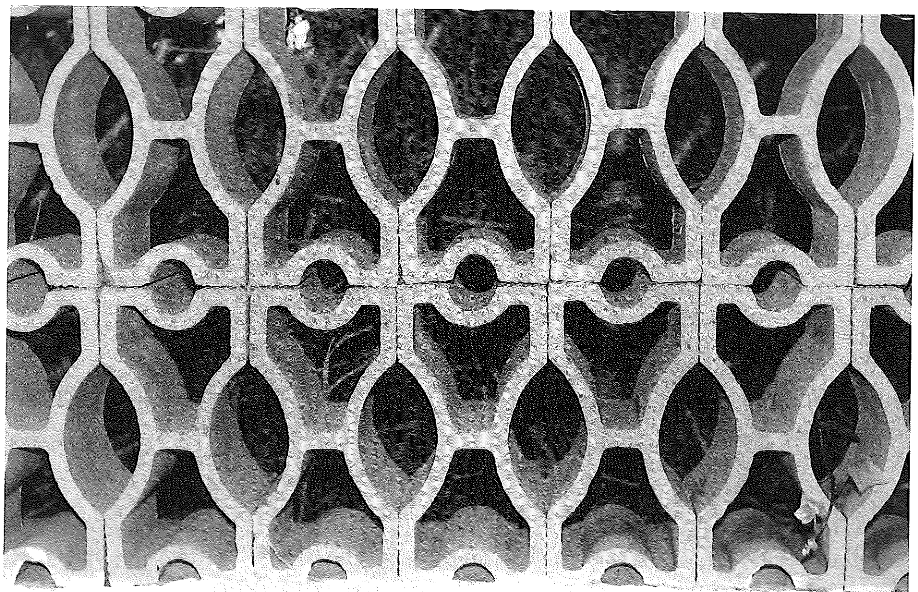
TURÉGANO, P. (1995*c*): «Imágenes del concepto de integral definida identificadas en la Historia», Comunicación presentada en las VII JAEM, Madrid.

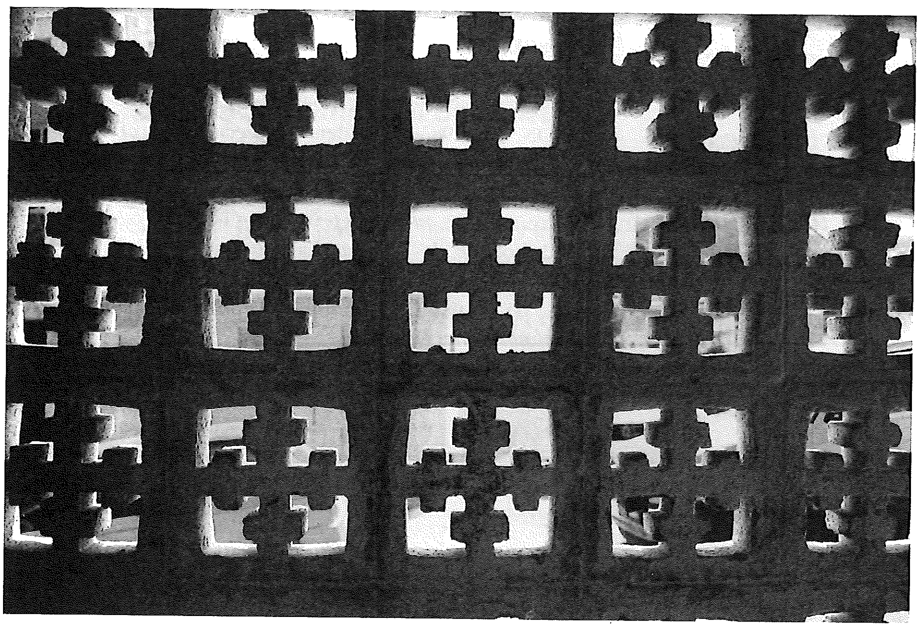
—(1996*a*): *Área e integral*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Castilla-La Mancha, Albacete.

—(1996*c*): «Intuición del infinito en estudiantes de Primero de BUP», *Épsilon*, 11-46.

WENZELBURGER, E. (1994): *Didáctica del Cálculo Integral*, Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Biarritz.
Foto: Luis Balbuena





Valle de Guerra.
Tenerife.
Foto: Luis Balbuena