SUMA 25
junio 1997, pp. 61-70

El lenguaje vectorial en geometría. Los pioneros William Rowan Hamilton y Hermann Günther Grassmann

Víctor Arenzana Hernández

*A Gonzalo Sánchez Vázquez
en recuerdo de su paso por Zaragoza
como ponente en las III Jornadas
sobre Aprendizaje y Enseñanza
de las Matemáticas*

El cálculo vectorial apareció en el siglo XIX. Hay operaciones entre vectores tales como el producto escalar que se puede ampliar sin dificultad de espacios de dimensión dos a espacios de dimensión tres y superior. Sin embargo, la ampliación del producto vectorial de vectores de dimensión dos a vectores tridimensionales tuvo serias dificultades. El conocimiento de los pasos lógicos que tuvieron que dar Hamilton y Grassmann para sentar las bases del cálculo vectorial en de gran importancia pedagógica para profundizar en el concepto de operación.

LA geometría actual está expresada, en buena medida, en términos vectoriales. Nociones como las de producto escalar, producto vectorial, vector tangente, gradiente de un campo escalar o flujo de un campo de fuerzas son básicas para expresar teoremas geométricos y resultados científicos. Las trasformaciones y movimientos geométricos no solamente tienen su ecuación sino que una operación con vectores puede representar un movimiento en el plano o en el espacio.

El conocimiento de las dificultades por las que atravesó el cálculo vectorial para formar parte del lenguaje científico es un hecho de indudable interés pedagógico, ya que permite profundizar en cuestiones de importancia tan capital como:

a) El paso de la transformación geométrica a una operación de carácter algebraico.

b) La dificultad de extender algunas operaciones definidas entre vectores en el plano al espacio.

c) Conocer el modo como dos grandes matemáticos, Hamilton y Grassmann, pudieron sentar las bases de un nuevo cálculo.

En el proceso del descubrimiento del cálculo vectorial hubo dos tendencias claramente diferenciadas que podemos personalizar en la obra de los dos autores más repre-

HOMENAJE A GONZALO SÁNCHEZ VÁZQUEZ

sentativos de cada tendencia William Rowan Hamilton (1805-1865) y Hermann Günther Grassmann (1808-1877).

El primero estudió el cálculo vectorial como extensión al espacio de las propiedades de las operaciones de los números complejos. En especial buscaba una generalización de los números complejos al espacio que mantuviera las mismas propiedades operativas y geométricas. Mientras que Grassmann definió el producto de magnitudes en el espacio a partir de propiedades geométricas de un determinado producto que era parecido al producto vectorial y que representaba áreas orientadas.

Paso de la transformación geométrica a una operación de carácter algebraico

La geometría ha sufrido a lo largo de su historia notables cambios en el modo de expresar sus teoremas. Si se abre un libro de geometría clásica se encontrará plagado de figuras, mientras que se puede abrir otro libro de geometría en el que no se encuentre ninguna. Desde los teoremas que aparecen en los *Elementos* de Euclides hasta los resultados recogidos en *Geometric Algebra* de Artin hay, además de veintitrés siglos de diferencia, un cambio de lenguaje tan grande en el modo de escribir la geometría como el que existe entre el griego de Homero y el inglés de Russell en el que están escritas respectivamente ambas obras. El cambio producido fue gradual y, en ocasiones, no puede determinarse con exactitud el momento en el que cada nuevo concepto se incorporó a la geometría, pero intentaremos hacer un esbozo de las ideas más importantes que se han incorporado al cuerpo de la geometría a lo largo de la historia.

El paso de una geometría a otra presenta ejemplos realmente interesantes para la formación matemática de los estudiantes de enseñanza media ya que permiten apreciar, partiendo de un problema de medida, que se puede llegar a definir una operación que permite realizar esa medida y generalizar el resultado.

La geometría analítica

La geometría griega fue establecida como una ciencia definitiva por Euclides en sus *Elementos*. Se dejó de cultivar a lo largo de la Edad Media, período en que esta ciencia tuvo escasas aportaciones. No obstante, en la Edad Media se perfeccionaron algunos cálculos aritméticos y en el Renacimiento se descubrieron métodos para resolver ecuaciones algebraicas y el cálculo literal, que iban a ser de vital importancia para el desarrollo posterior de la geometría.

Los griegos tenían una aritmética basada en la geometría. Mediante construcciones geométricas elaboraron un método de cálculo, a partir de las definiciones de suma, producto, diferencia, cociente y extracción de raíces cuadradas desarrollando un método de cálculo que, con el paso del tiempo, se ha llamado álgebra geométrica, que permitía sumar áreas, segmentos, cálculo de raíces cuadradas, etc.

Desde los teoremas que aparecen en los Elementos *de Euclides hasta los resultados recogidos en* Geometric Algebra *de Artin hay, además de veintitrés siglos de diferencia, un cambio de lenguaje tan grande en el modo de escribir la geometría como el que existe entre el griego de Homero y el inglés de Russell en el que están escritas respectivamente ambas obras.*

La geometría clásica euclídea y el álgebra aparecida en el renacimiento estaban llamadas a entenderse y, de hecho, se fundieron, gracias a la obra de Descartes (1596-1650) y Fermat (1601-1665), en una nueva materia que se llamó geometría analítica. La geometría analítica se vio fuertemente reforzada en su alcance por la aparición del cálculo infinitesimal, que se aplicó al estudio de los problemas geométricos. A lo largo del siglo XVII y el XVIII, los métodos analíticos dominaron el panorama de las matemáticas, hasta tal punto que la geometría euclídea se estudiaba olvidándose del primoroso rigor euclídeo y colocando en su lugar ecuaciones que representaban curvas, pares de números que representaban puntos y utilizando métodos de resolución de ecuaciones al principio, y del cálculo infinitesimal después, como metodología de resolución de problemas geométricos.

La falta de rigor en los fundamentos del cálculo infinitesimal, unido a la dificultad de interpretación de algunos resultados como, por ejemplo, los números complejos que le aparecieron a Leibnitz (1646-1716) al estudiar la intersección de una recta con una esfera, eran inconvenientes que se veían soslayados por los brillantes resultados que se obtenían con el cálculo infinitesimal en todos los campos de la ciencia.

Nuevos métodos analíticos para la geometría del XIX

A finales del siglo XVIII sólo había unos pocos matemáticos que permanecieron ligados a la utilización exclusiva de métodos denominados tradicionalmente geométricos frente a la inmensa mayoría que utilizaba los métodos algebraicos enriquecidos por los métodos infinitesimales.

Entre los primeros están Monge (1746-1818), cuya geometría descriptiva dio paso a la proyectiva de Poncelet (1788-1867) y la llevaron a su culminación matemáticos como Steiner (1793-1863), Chasles (1793-1880) y Staudt (1798-1867) que reconstruyó la geometría proyectiva librándola de contradicciones a partir de unos axiomas que se referían exclusivamente a la posición relativa y no de distancias.

La otra línea, la línea analítica, está representada por autores como Plücker (1801-1868) que utilizó intensivamente en geometría las coordenadas homogéneas, Hamilton (1805-85), tras definir las operaciones con los números complejos como operaciones con parejas de números reales, extendió la operación al espacio con los cuaterniones que se regían por operaciones no conmutativas, Grassmann (1809-77) que en su obra *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (1844) (La teoría de la extensión lineal, una nueva rama de las matemáticas) sentó los principios del cálculo vectorial y aplicó el cálculo infinitesimal a funciones escalares y vectoriales (la obra de Grassmann era demasiado densa hasta para los especialistas y solamente obtuvo el reconocimiento justo a partir de su edición renovada de 1862 llevada a cabo por los matemáticos Henkel y Schlegel). Clifford (1845-1879) fue, seguramente, el primero en dar una formulación moderna a la definición de los vectores, sus operaciones y los productos escalar y vectorial en sus *Elements of Dynamics.* En todo caso se puede afirmar que los métodos vectoriales se impusieron en la geometría entre 1830 y 1880 y que fue una obra colosal en la que estaba empeñada la comunidad matemática anglosajona. El uso del cálculo vectorial propició el desarrollo del análisis con varias variables dando lugar a la aparición de la geometría diferencial, al análisis vectorial y proporcionó un método analítico de gran potencia para el estudio de la geometría.

El uso del cálculo vectorial propició el desarrollo del análisis con varias variables dando lugar a la aparición de la geometría diferencial, al análisis vectorial y proporcionó un método analítico de gran potencia para el estudio de la geometría.

Nacimiento de la idea de producto escalar

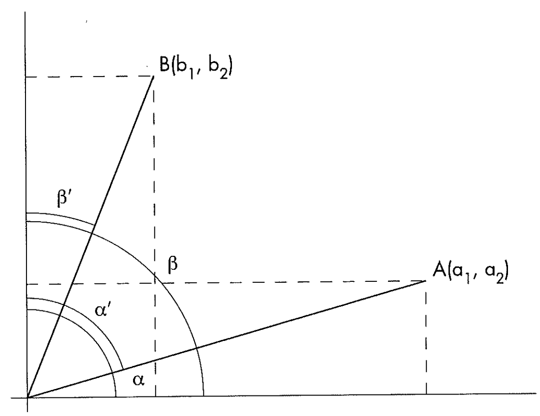
Cuando se trata de calcular el ángulo determinado por dos rectas se puede optar bien por un método puramente geométrico, dado por la geometría descriptiva, o por un método vectorial, utilizando el producto escalar para determinar el coseno del ángulo limitado por ambas rectas tal y como se hace en la geometría analítica en el espacio.

En lo que sigue se dará por supuesto el conocimiento del teorema de Pitágoras, la trigonometría elemental, los teoremas de los senos y del coseno y la representación coordenada de un vector en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ y la representación de un vector determinado por dos puntos. Con ese bagaje estableceremos la medida de ángulos en el plano y en el espacio deduciendo una fórmula común para ambas situaciones que se pueda generalizar a un espacio de dimensión n sin dificultad.

Sea el vector de $\mathbb{R}^2$, referido a un sistema de ejes perpendiculares, OA = $\mathbf{a}(a_1, a_2)$. Definiremos *norma* o *módulo* de un vector como la distancia en el plano cartesiano del punto A al origen de coordenadas O:

$$\|OA\| = \|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Sean ahora los vectores de $\mathbb{R}^2$ OA = $\mathbf{a}(a_1, a_2)$ y OB = $\mathbf{b}(b_1, b_2)$ que forman con los ejes coordenados OX y OY los ángulos α y α' respectivamente. Obsérvese que $\alpha + \alpha' = \pi/2$.



Del gráfico anterior se deduce:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|} \qquad \cos\beta = \frac{b_1}{\|\mathbf{b}\|}$$

$$\cos\alpha' = \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|} \qquad \cos\beta' = \frac{b_2}{\|\mathbf{b}\|}$$

o lo que es igual:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|} \qquad \cos\beta = \frac{b_1}{\|\mathbf{b}\|}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|} \qquad \operatorname{sen}\beta = \frac{b_2}{\|\mathbf{b}\|}$$

Para determinar el ángulo que forman los vectores **a** y **b** que será α - β en función de las coordenadas de los vectores partiremos de la fórmula trigonométrica:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

y sustituiremos las razones trigonométricas obtenidas anteriormente:

$$\cos(\alpha-\beta) = \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|}\frac{b_1}{\|\mathbf{b}\|} + \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|}\frac{b_2}{\|\mathbf{b}\|}$$

que expresado de otra forma:

$$\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos(\alpha-\beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

nos permite definir el producto escalar de dos vectores de la siguiente forma:

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos(\alpha-\beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Con esta fórmula la determinación del ángulo formado por dos vectores en el plano se puede definir mediante una fórmula algebraica que es la del producto escalar de dos vectores definida como se ha hecho.

¿Cómo podemos definir una operación entre puntos del espacio ordinario que calcule la distancia entre ellos y el ángulo determinado por dos vectores en el espacio ordinario?

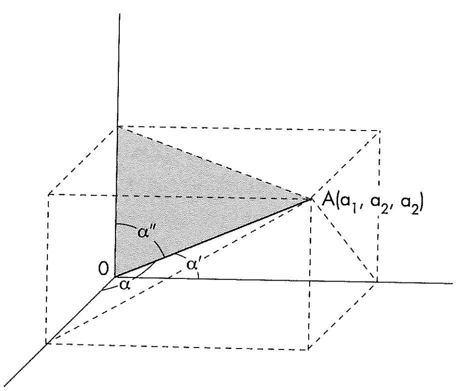
Sea el vector de $\mathbb{R}^3$, referido a un sistema de ejes perpendiculares, OA = $a(a_1, a_2, a_3)$. Definiremos *norma* o *módulo* de un vector como la distancia en el plano cartesiano del punto A al origen de coordenadas O:

$$\|OA\| = \|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Sean ahora los vectores de $\mathbb{R}^3$ siguientes:

OA = $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ y OB = $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$

que forman con los ejes coordenados OX, OY, OZ los ángulos α, α' y α'' respectivamente.



Del gráfico anterior se deduce:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|} \qquad \cos\beta = \frac{b_1}{\|\mathbf{b}\|}$$

$$\cos\alpha' = \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|} \qquad \cos\beta' = \frac{b_2}{\|\mathbf{b}\|}$$

$$\cos\alpha'' = \frac{a_3}{\|\mathbf{a}\|} \qquad \cos\beta'' = \frac{b_3}{\|\mathbf{b}\|}$$

Al igual que en $\mathbb{R}^2$, en el espacio $\mathbb{R}^3$ los vectores viene determinados por su norma y los cosenos directores, así

$$a = \|\mathbf{a}\| (\cos\alpha, \cos\alpha', \cos\alpha'')$$

Determinemos el ángulo que forman los vectores OA = $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ y OB = $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$, que será α – β, en función de las coordenadas de los vectores a partir de la definición de norma y del teorema de coseno.

Dados los puntos A y B se puede definir el vector AB.

En primer lugar calcularemos su norma a partir de la definición:

$$\|AB\|^2 = \|(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)\|^2 =$$

$$= \|(\|\mathbf{b}\|\cos\beta - \|\mathbf{a}\|\cos\alpha, \|\mathbf{b}\|\cos\beta' - \|\mathbf{a}\|\cos\alpha', \|\mathbf{b}\|\cos\beta'' - \|\mathbf{a}\|\cos\alpha'')\|^2 =$$

$$= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2(\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha'\cos\beta' + \cos\alpha''\cos\beta'')$$

Si ahora calculamos la norma de AB utilizando el teorema del coseno se tiene:

$$\|AB\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 \cos p$$

donde *p* es el ángulo que forman ambos vectores.

De ambas expresiones de la norma de AB es trivial que:

$$\cos p = \cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha'\cos\beta' + \cos\alpha''\cos\beta''$$

y sustituiremos las razones trigonométricas obtenidas anteriormente:

$$\cos p = \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|}\frac{b_1}{\|\mathbf{b}\|} + \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|}\frac{b_2}{\|\mathbf{b}\|} + \frac{a_3}{\|\mathbf{a}\|}\frac{b_3}{\|\mathbf{b}\|}$$

que expresado de otra forma:

$$\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos p = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

nos permite definir el producto escalar de dos vectores de la siguiente manera:

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos p = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Con esta fórmula la determinación del ángulo formado por dos vectores en el espacio se puede definir mediante una fórmula algebraica que es la del producto escalar de dos vectores definida como se ha hecho.

Pasar de calcular la distancia entre dos puntos y el ángulo entre dos rectas por procedimientos puramente geométricos a determinarlas por medio del producto escalar, como una operación entre vectores, aporta una serie de ventajas, ya que proporciona una fórmula unificada para la medida de ángulos, distancias y el estudio de la perpendicularidad. Pero puede transmitir la idea de que la generalización de una operación desde $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ y, finalmente, a $\mathbb{R}^n$ se puede hacer sin dificultad alguna, algo así como si el manejo de vectores permitiera extender cualquier operación definida en $\mathbb{R}^2$ sin más que añadir una coordenada más a un espacio de cualquier dimensión. Nada más lejos de la realidad como veremos a continuación.

Pasar de calcular la distancia entre dos puntos y el ángulo entre dos rectas por procedimientos puramente geométricos a determinarlas por medio del producto escalar, como una operación entre vectores, aporta una serie de ventajas, ya que proporciona una fórmula unificada para la medida de ángulos, distancias y el estudio de la perpendicularidad.

William Rowan Hamilton (1805-1865) y los cuaterniones

Perfil biográfico

Hamilton fue lo que se puede llamar un niño superdotado a los cinco años leía griego, latín y hebreo y a los diez hablaba media docena de lenguas orientales. Estudió en el Trinity College de Dublín y a los veintidós años fue nombrado astrónomo real de Irlanda, Director del Observatorio de Dunsink y profesor de astronomía. Pronto publicó un trabajo sobre sistemas de rayos y el fenómeno de refracción cónica que presentaban ciertos cristales y sus teorías fueron confirmadas experimentalmente por los físicos lo que le proporcionó un gran prestigio, tanto que a los treinta años fue elevado a la nobleza.

En 1833 presentó en la Irich Academy un importante trabajo en el que introducía un álgebra formal de pares de números reales cuyas operaciones definidas entre ellos son las mismas que las de los números complejos. Son las siguientes:

$$(a, b) + (x, y) = (a+x, b+y)$$
$$t(a, b) = (ta, tb)$$
$$(a, b)\,(x, y) = (ax-by, ay+bx)$$

En este trabajo Hamilton interpretó el producto definido formalmente entre magnitudes orientadas en el plano como un producto en el que intervenía una rotación y se planteó el problema de extender esta operación entre magnitudes orientadas en el plano al espacio. Hamilton sentó las bases de este producto mediante los cuaterniones en 1843 y dedicó los veinte últimos años de su vida al estudio y aplicación de los mismos.

Los números complejos

Los números complejos aparecieron al resolver ecuaciones de grado igual o superior a dos y fueron inicialmente considerados como soluciones extrañas o imposibles, se consideró que aparecían cuando el problema real que representaba la ecuación no tenía sentido. Girolamo Cardano (1502-1576) propuso el ejemplo:

Divide el número 10 en dos partes de manera que su producto sea 40.

La solución la da la resolución de la ecuación

$$(10 - x)\, x = 40.$$

Las soluciones de la ecuación serían:

$$5+\sqrt{-5} \quad \text{y} \quad 5-\sqrt{-5}$$

Pero Bombelli (1526-72) planteó un problema de mayor dificultad, al considerar a las ecuaciones como objetos matemáticos autónomos. Así, la resolución de la ecuación $x^3 - 15x = 4$, que al aplicarle la fórmula de resolución de ecuaciones cúbicas de Cardano se obtenía:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

mientras que admite la solución $x = 4$. Con lo que se ponía de manifiesto que los números complejos aparecían también en problemas que tenían soluciones posibles.

René Descartes (1596-1660) usó los números complejos, Jean Bernouilli (1667-1748) calculó logaritmos de números complejos y Leonard Euler (1707-1783) representó los números complejos como puntos del plano y destacó el carácter geométrico de las operaciones. Sobre todo la regla de que el producto de dos números complejos en forma polar era igual a otro número complejo cuyo módulo era el producto de los módulos de los factores y cuyo argumento era la suma de los argumentos de los factores.

Hamilton definió en 1833 los números complejos como pares ordenados de números reales con las operaciones suma y producto habituales, que se pueden resumir así:

$$(a, b) + (x, y) = (a+x, b+y)$$

$$(a, b)(x, y) = (ax - by, ay + bx)$$

Siguiendo un camino análogo al realizado en el plano, Hamilton pensó en la posibilidad de que en el espacio se podrían definir unos números parecidos a los números complejos con análogas propiedades algebraicas y geométricas.

Siguiendo un camino análogo al realizado en el plano, Hamilton pensó en la posibilidad de que en el espacio se podrían definir unos números parecidos a los números complejos con análogas propiedades algebraicas y geométricas.

El descubrimiento de los cuaterniones

Por analogía con los números complejos, Hamilton comenzó imaginando tripletes de la forma a+bi+cj, donde visualizaba sus unidades básicas *1, i, j* como perpendiculares dos a dos y de longitud unidad. Las unidades *i* y *j* eran unidades imaginarias

Hamilton debía representar los productos

$$(a+bi+cj)(x+yi+zj)$$

como vectores del mismo espacio, que el producto se pudiera realizar término a término y que, como en los números complejos, el módulo del producto sea el producto de los módulos.

a) En principio supuso que $i^2 = j^2 = -1$, tal y como se verifica para los números complejos y que el producto de dos elementos cualesquiera, incluidos *i* y *j*, eran conmutativos.

b) Luego hizo el producto término a término suponiendo que ij = ji y obtuvo:

$$(a+bi+cj)(x+yi+zj) =$$
$$= (ax-by-cz) + (ay+bx)i + (az+cx)j + (bz+cy)ij$$

c) Ante este resultado se preguntó cuánto tenía que valer ij para que el producto fuera de la forma p+qi+rj y perteneciera, por consiguiente, el resultado a $\mathbb{R}^3$.

d) Las suposiciones primeras, que fueron ij = 1 o ij = -1, le llevaron a que no se cumplía la ley de los módulos.

f) Con la suposición ij = 0 tampoco se cumplía la ley de los módulos, pero observó que cuando ij desaparecía, y se hacía el producto de dos tripletes con los escalares asociados a *i* y *j* iguales se obtiene el resultado

$$(x+bi+cj)(a+bi+cj) = (ax-b^2-c^2) + (a+x)bi + (a+x)cj$$

que verificaba la ley de los módulos.

g) De aquí pensó que para que se anulara el sumando con ij era suficiente que en el producto del apartado b) se cumpliera que ij = -ji, pero ¿cuál debía ser el valor de este producto? En principio supuso que iba a ser un valor *k* que debía determinar.

h) La consideración que le llevó a fijar un valor de *k* fue la siguiente:

Al hacer el producto

$$(a+bi+cj)(x+yi+zj) =$$
$$= (ax-by-cz)+(ay+bx)i+(az+cx)j+(bz+cy)ij$$

si suponemos que ij = -ji = k = 0 y observamos la ley de los módulos, al hacer la diferencia entre los cuadrados de los módulos de los factores menos el cuadrado del módulo del producto se obtiene:

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) -$$
$$- (ax-by-cz)^2 + (ay+bx)^2 + (az+cx)^2 =$$
$$= (bz-cy)^2$$

que no es otra cosa que el cuadrado del coeficiente de *k* en el desarrollo del producto. Lo que le hizo orientar el problema en una nueva dirección, añadir una nueva dimensión para lograr el cálculo con tripletes.

i) Supuso que ij = -ji = k, donde *k* era un nuevo símbolo imaginario. Lo que le llevó a considerar, no tripletes, sino cuaternios de la forma a+bi+cj+dk, que se llamaron *cuaterniones*. Las reglas de cálculo de los mismos eran:

$$ik = iij = -j$$
$$ki = -jii = j$$
$$jk = -jji = i$$
$$kj = ijj = -i$$
$$k^2 = (ij)(ij) = -(ji)(ij) = -jiij = j^2 = -1$$

Estas operaciones las resumió Hamilton en una inscripción que realizó, a punta de navaja, en una piedra del Brougham Bridge

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Algunas propiedades de los cuaterniones

a) *Los cuaterniones se pueden expresar como pares de números complejos.*

Los cuaterniones a+bi+cj+dk se pueden escribir de la siguiente forma

$$a+bi+cj+dk = a+bi+cj+dij =$$
$$= (a+bi)+(c+di)j = z_1 + z_2 j$$

con z_1 y z_2 números complejos.

b) *Todo cuaternio A = a + bi + cj + dk tiene inverso para el producto.*

En efecto, sea $A^* = a-bi-cj-dk$, el conjugado de A, el producto de ambos: $A\ A^* = a^2+b^2+c^2+d^2$ es la norma que será positiva siempre que el cuaternión A sea no nulo. Por lo tanto el inverso para el producto del cuaternión A es A/AA^*.

c) *Es asociativa.*

Para demostrar que el producto de cuaterniones es asociativo se utilizará la notación compleja y las propiedades de la operación conjugación de números complejos (conjugado de la suma es suma de conjugados y conjugado del producto es producto de conjugados) y la siguiente:

$z_1 j = (a+bi)j = aj+bk = ja-jib = j(a-bi) = jz_1^*$

El producto de cuaternios en forma compleja será, por consiguiente:

$$(z_1 + z_2 j)(w_1 + w_2 j) =$$
$$= (z_1 w_1 - z_2 w_2^*) + (z_1 w_2 + z_2 w^{1*})j$$

y, a partir de aquí, fácilmente se prueban las propiedades asociativa del producto y la distributiva del producto respecto a la suma.

Los cuaternios con la suma:

$$a+bi+cj+dk + x+yi+zj+tk =$$
$$= (a+x) + (b+y)i + (c+z)j + (d+t)k$$

y el producto con las reglas enumeradas anteriormente constituye un cuerpo conmutativo, esto es, tiene la misma estructura que los números complejos.

Cualquier cuaternio se puede dividir en su parte real y en su parte cuaternio puro, esto es, del cuaternio

$$A = a+bi+cj+dk,$$

a es la parte real y bi+cj+dk la parte cuaternia pura.

Multipliquemos dos cuaternios puros

$$A = (x_1 i+x_2 j+x_3 k) \text{ y } B = (y_1 i+y_2 j+y_3 k)$$
$$A\ B = (x_1 i+x_2 j+x_3 k)(y_1 i+y_2 j+y_3 k) =$$
$$= (x_2 y_3 - x_3 y_2)i + (x_3 y_1 - x_1 y_3)j +$$
$$+ (x_1 y_2 - x_2 y_1)k - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)$$
$$= A \times B - (A,B)$$

...esta teoría no llegó a imponerse plenamente en la comunidad matemática para resolver problemas geométricos. Los cuaterniones aparecieron de manera natural a finales del siglo XIX en teorías como la representación lineal de grupo o la estructura de los grupos de Lie.

que es el producto vectorial menos el producto escalar. Es a causa de esta identidad por la que el cálculo vectorial se expresó en la segunda mitad del siglo XIX en términos de cuaternios.

Aunque Hamilton dedicara la última parte de su vida a investigar sobre las aplicaciones de los cuaterniones, esta teoría no llegó a imponerse plenamente en la comunidad matemática para resolver problemas geométricos. Los cuaterniones aparecieron de manera natural a finales del siglo XIX en teorías como la representación lineal de grupos o la estructura de los grupos de Lie. La consecuencia fundamental de todas estas investigaciones fue la búsqueda de operaciones que no respetaban las, hasta entonces, intocables propiedades de las operaciones elementales, lo que ponía de manifiesto la posibilidad de operaciones con nuevos objetos matemáticos abstractos, en clara ruptura con la concepción clásica de las matemáticas.

Hermann Günther Grassmann (1809-1877)

Perfil biográfico

Hermann Günther Grassmann (1809-1877) nació en Szczecin, villa de Polonia en la desembocadura del Oder. Realizó estudios de teología, lenguas clásicas y literatura en la universidad de Berlín. Tuvo una formación autodidacta en matemáticas, sobre todo a partir de 1830, tras su vuelta de Berlín, con las obras *Elements de Géométrie* de Legendre, *Vollständiger lehrbegriff der höhern Analysis* de J, T. Meyer, *Lehrbuch der mechanischen Naturlehre* de E. G. Fischer y otros, sin olvidar la influencia de su padre Justus, profesor del liceo de Szczecin. En 1840 realizó un examen en Berlín para enseñar matemáticas, física, química y mineralogía en todos los liceos y a todos los niveles, como trabajo de investigación para la obtención de su plaza presentó un trabajo *Theorie der Ebbe und Flut.* Grassmann reconoce que esta obra constituye un paso decisivo en la formación de sus ideas matemáticas, puesto que, por una parte, retomó las ideas esbozadas en su *cálculo geométrico* de 1832 y, por otro, continúa su desarrollo para aplicarlo a la *teoría de las mareas.* Toda su vida la pasó como profesor de liceo.

Cuando Hermann Günther Grassmann publicó en 1844 *La Lineale Ausdehnungslehre*, obra en la que estaban contenidas las ideas más importantes del cálculo vectorial, el libro fue tachado de excesivamente abstracto y no fueron reconocidas sus valiosas aportaciones hasta pasados veinte años. Estos años supusieron para Grassmann tiempos de profundo desánimo y el parcial abandono de la matemática.

Antes de que las ideas de Grassmann fueran aceptadas por la comunidad matemática de forma generalizada hubo dos ediciones diferentes de *La Lineale Ausdehnungslehre,* la primera en el año 1844 y otra en 1862. La edición de 1844 pasó prácticamente inadvertida y tuvo, por consiguiente, escasa o nula repercusión en el panorama matemático de la época.

La edición de 1862 fue mucho más clara desde el punto de vista matemático. Conceptos, que en la primera edición estaban dados implícitamente y de forma oscura, tales como los de combinación lineal de magnitudes, dependencia e independencia lineal, base de un dominio o la idea de dimensión se definieron claramente en la segunda edición.

Tampoco esta nueva versión fue acogida con entusiasmo, al menos, inicialmente, seguramente por tener poca difusión (publicada en la imprenta de su hermano fuera de las vías de distribución habituales) y por estar en boga en esa época el método de los cuaterniones desarrollado por William Rowan Hamilton (1805-1865). Esta situación de indiferencia hacia su producción científica por parte de los más influyentes matemáticos contemporáneos, motivó que, hacia mediados de la década de los sesenta, Grassmann estuviera decidido a renunciar el seguir investigando en matemáticas y dar prioridad definitiva a los estudios de lingüística que nunca abandonó desde que estudió en Berlín con Schleiermacher.

Las ideas de Grassmann fueron, poco a poco, ganando aceptación. Hermann Hankel (1839-1873) estaba redactando una obra que recogía los trabajos sobre el análisis con números complejos y funciones para lo que estaba trabajando con la obra de W. R. Hamilton *Lectures on Quaternions* (1853) y en su búsqueda de aportaciones de distintos matemáticos se encontró, en el año 1866, con la obra de Grassmann.

El interés que Hankel mostró por *La Lineale Ausdehnungslehre* y *Geometricche Analyse* se puso de manifiesto en la abundante correspondencia que mantuvieron en la que Hankel pedía aclaraciones de algunos conceptos, demostraciones y de varios teoremas con la intención de escribir los fundamentos del cálculo grassmaniano en su obra *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen* (1867) de una forma clara, precisa y en un lenguaje que resultara fácilmente utilizable por la comunidad matemática en clara confrontación con los métodos de Hamilton. En esa época Hankel era consciente de la superioridad del cálculo grassmaniano y el mismo Grassmann demostró que muchos resultados obtenidos por Hamilton eran consecuencia inmediata y breve de su cálculo.

En el libro de Hankel aparecieron encendidos elogios sobre la originalidad y fecundidad de Grassmann y citaba las fuentes de este cálculo que eran las obras *La Lineale Ausdehnungslehre* de 1862 y *Geometrische Analyse.* No obstante, Hankel calificaba la primera de ellas de excesivamente abstracta y filosófica y de la segunda decía que estaba escrita de forma más acorde con el modo habitual de presentar los escritos los matemáticos. Lo que resulta claro es que Hankel, por desconocimiento o consciente olvido, no citó la primera edición de *La Lineale Ausdehnungslehre* entre sus fuentes, a la que hubiera tachado, sin duda, todavía de más abstracta y filosófica que la que él trabajó.

Así como los resultados de Hamilton fueron descubiertos desde el álgebra y estudiando las propiedades que debían mantener las operaciones cuando se realiza en ellas una extensión de un conjunto a otro más amplio los descubrimiento de Grassmann fueron hechos desde consideraciones geométricas.

El descubrimiento del producto de vectores

Así como los resultados de Hamilton fueron descubiertos desde el álgebra y estudiando las propiedades que debían mantener las operaciones cuando se realiza en ellas una extensión de un conjunto a otro más amplio los descubrimiento de Grassmann fueron hechos desde consideraciones geométricas. Dos puntos de partida diferentes para llegar a unos resultados que entraron en conflicto porque eran aplicables a la resolución de los mismos problemas. Grassmann aporta su punto de vista sobre la geometría que es el siguiente:

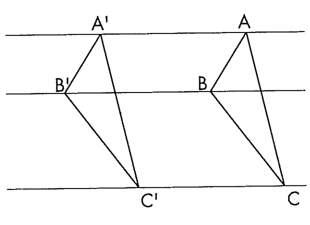
> *...Yo había comprendido desde hacía tiempo que no podía considerar a la geometría, como se consideraba a la aritmética o a la teoría de combinaciones, como una rama de la matemática, sino más bien, puesto que la geometría hace referencia a algo que ya está dado en la naturaleza, a saber, el espacio, debía tener en consecuencia una rama de las matemáticas que se extrajera de ella misma de manera puramente abstracta, leyes semejantes a las que en geometría aparecen ligadas al espacio. La posibilidad de desarrollar tal rama de la matemática puramente abstracta estaba dada por el nuevo análisis, cuando fue desarrollado independientemente de todo teorema demostrado por otros y en la pura abstracción fue esta ciencia.*
>
> *La ventaja esencial obtenida por esta interpretación era, para la forma, que todos los principios que expresaban las*

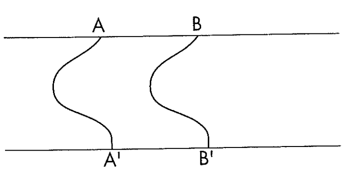
visiones del espacio desaparecieron completamente y, de este modo, los principios se volvían tan evidentes como los de la aritmética y, por otra parte, para el contenido, la ventaja estriba en que la limitación a tres dimensiones se volvía caduca. De esta manera sólo las leyes se iluminan en su evidencia y universalidad y se presentan en su contexto esencial. Algunas regularidades que en tres dimensiones o no existían todavía o no se manifestaban más que de forma oculta, se desarrollan entonces en toda su generalidad por esta generalización.

Las primeras consideraciones que realizó para descubrir el producto vectorial las realizó sobre el concepto de área barrida por un segmento que se desliza sobre otro y sobre una línea quebrada, que le llevó a la idea de considerar áreas provistas de signo, según se recorriera en un sentido o en otro. Con estas consideraciones fijó las reglas del producto exterior de vectores que, siguiendo su *La Lineale Ausdehnungslehre*, fueron las siguientes:

a) Si un segmento se desplaza en el plano sobre un número cualquiera de segmentos, la superficie total que se obtiene es igual al espacio que se obtiene cuando se desplaza ese segmento por la suma de los segmentos.

b) Si en el plano un segmento se mueve entre dos paralelas fijas de modo que se mueve de una a otra, la superficie total barrida es la misma cualquiera que sea el camino recorrido.





Las primeras consideraciones que realizó para descubrir el producto vectorial las realizó sobre el concepto de área barrida por un segmento que se desliza sobre otro y sobre una línea quebrada, que le llevó a la idea de considerar áreas provistas de signo, según se recorriera en un sentido o en otro.

Sus expresiones, cambiando el lado medido por el que mide, serían:

c) La superficie que describe una línea quebrada es igual a la descrita por un segmento que tiene los mismos puntos inicial y final que ella.

d) La superficie total que describe una superficie cerrada al moverse en el plano es nula.

Estas propiedades las podemos expresar de forma simbólica así:

$$\mathbf{a}\wedge(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\wedge\mathbf{b} + \mathbf{a}\wedge\mathbf{c}$$

$$(\mathbf{b}+\mathbf{c})\wedge\mathbf{a} = \mathbf{b}\wedge\mathbf{c} + \mathbf{c}\wedge\mathbf{a}$$

e) La expresión $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ significa superficie y la $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{c}$ significará volumen. Esto llevó a Grassmann a definir $\mathbf{a}$ como segmento del primer escalón (dimensión uno), $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ segmento del segundo escalón (dimensión 2), $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{c}$ segmento del tercer escalón, etc.

f) Vectores de la misma especie. Si dos vectores son de la misma especie $\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

g) Si $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$ son de la misma especie se verifica:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}_1)\,\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}\,\mathbf{b}_2$$

$$\mathbf{b}_2\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_2\,\mathbf{a}$$

h) La misma demostración es válida para

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\,\mathbf{b}_1\,\mathbf{P} = \mathbf{a}\,\mathbf{b}_2\,\mathbf{P}$$

donde $\mathbf{P}$ es un vector de otro escalón.

i) Nos fijaremos en los signos y no sólo en el valor absoluto de

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}_1)\,\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}\,\mathbf{b}_2$$

$$\mathbf{b}_2\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_2\,\mathbf{a}$$

para ello supondremos que $\mathbf{a}$ y b son dos vectores no de la misma especie, el producto $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\,(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ es nulo, puesto que es producto de un vector por sí mismo, es decir dos vectores de la misma especie, pero, además se puede desarrollar aplicando la propiedad distributiva:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{a} + (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{b} =$$

$$= \mathbf{aa} + \mathbf{ba} + \mathbf{ab} + \mathbf{bb} = \mathbf{ba} + \mathbf{ab}$$

de donde $\mathbf{ab} = -\mathbf{ba}$.

k) Pone como ejemplo de un producto no conmutativo de segmentos, y que en lo que Grassmann llama primer escalón significa área es producto es

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|\ \text{sen}\ (\mathbf{ab})$$

que, evidentemente, el seno cambia de signo según se tome el ángulo de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ o de $\mathbf{b}$ a $\mathbf{a}$.

El producto exterior, llamado habitualmente producto vectorial, fue escrito por primera vez en la forma que se conoce hoy día por Clifford (1845-1879), en su *Elements of Dynamics*. Pero resulta interesante incorporar en la enseñanza estos aspectos fundamentales del proceso creador de los matemáticos que transmiten al estudiante la idea de que la matemática es algo vivo y dinámico en la que quedan muchas cuestiones por descubrir.

Bibliografía

BIRKHOFF, G. y S. MacLANE (1970): *Álgebra Moderna*, Vicens Vives, Barcelona.

BOYER, C. B. (1986): *Historia de la matemática*, Alianza Universidad Textos, Madrid.

CROWE, M. J. (1994): *A History of Vector Analysis. The Evolution of the Idea of Vectorial System*, Dover, New York.

DIEUDONNÈ, J. (1989): *En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy*, Alianza Universidad, Madrid.

GRASSMANN, H. G. (1994): *La science de la grandeur extensive. La Lineale Ausdehnungslehre.* Librería científica y técnica Albert Blanchard. París.

WAERDEN, B. L. (1985): *A history of Algebra. From al-Khawarizmi to Emmy Noether*, Springer Verlag, Berlín.

Víctor Arenzana
Sociedad Aragonesa
Pedro Sánchez Ciruelo
de Profesores de Matemáticas

COLLECTION SCIENCES DANS L'HISTOIRE

HERMANN GÜNTHER GRASSMANN

LA SCIENCE
DE LA
GRANDEUR EXTENSIVE

•

LA « LINEALE AUSDEHNUNGSLEHRE »

Traduction et Préface

de

Dominique FLAMENT *et* Bernd BEKEMEIER

Traduction revue par

Eberhard KNOBLOCH

Librairie Scientifique et Technique
Albert Blanchard
9, Rue de Médicis, 75006 PARIS
1994