SUMA 25
junio 1997, pp. 53-60

Actividad multisesión con Cabri-Géomètre (La circunferencia de Feuerbach)

Jose María Álvarez Falcón

A la memoria del Prof. Gonzalo Sánchez Vázquez:
Con profundo respeto, dedicado
A quien fue de maestros un maestro
Matemático docto y poeta diestro
Evocando su memoria y su legado

HOMENAJE A GONZALO SÁNCHEZ VÁZQUEZ

Se describe una experiencia dirigida al alumnado del segundo ciclo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO). Se utiliza el programa didáctico de geometría Cabri-Géomètre II. Se toma la circunferencia de Feuerbach o circunferencia de nueve puntos como pretexto para la presentación de varios conceptos elementales de la geometría plana. Finaliza el artículo con unas notas para la evaluación de la actividad.

EL CABRI–GEOMÈTRE II –o, más sencillamente, Cabri– es un programa de enorme utilidad para la didáctica de la Geometría. Aun existiendo versiones posteriores y para otros entornos gráficos (Windows, Mac) se ha utilizado en esta actividad la versión 1.0 para DOS, la más básica de la gama, bien conocida y, por ello, muy fácil de obtener.

Cabri podría definirse como «regla y compás informáticos». Pero es mucho más: comprueba paralelismo y perpendicularidad, efectúa inversiones, calcula distancias y ángulos, etc. y, sobre todo, es esencialmente interactivo; centrado mucho más en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría que en sus contenidos puramente matemáticos y estructurales.

La actividad está pensada para el segundo ciclo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO). Su inclusión en tercer o cuarto curso dependerá solamente de la programación y secuenciación que haya adoptado el Departamento.

Tomamos la circunferencia de Feuerbach como pretexto para la presentación y asimilación de varios conceptos elementales –algunos ya conocidos en este nivel– de la geometría plana. El fin no es, en sí mismo, el estudio de esta circunferencia, más bien es el camino que a ella conduce lo más interesante de esta tarea. Así, conceptos como perpendicularidad, procedimientos como la determinación de una circunferencia por tres puntos no alineados, etc., surgen naturalmente y son fácilmente asimilados mientras se comprueba el famoso teorema (1820) de Brianchon y Poncelet:

La circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados de un triángulo pasa también por los pies de las perpendiculares y por los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro con cada uno de los vértices.

Curiosamente, esta circunferencia (también llamada, por razones obvias, de los nueve puntos) no se conoce por ninguno de estos nombres propios, sino por el de Feuerbach (1800-1834), en parte por su publicación independiente por éste y por otros descubrimientos igualmente fáciles y sorprendentes:

El centro de esta circunferencia es el punto medio del segmento que une el ortocentro con el circuncentro.

Puede utilizarse el anterior resultado para la evaluación. Se dan más detalles para este proceso en el apartado: Notas para la evaluación.

El guión propuesto para el desarrollo se divide en tres columnas:

1. La primera contiene la «acción» que hay que efectuar directamente con la barra de botones de Cabri. Todas estas acciones son inmediatas y se enumeran más adelante en esta misma introducción.
2. La segunda columna especifica los conceptos involucrados y las implicaciones de las acciones anteriores. Forman el núcleo de la actividad y deben presentarse y discutirse hasta su completa asimilación. Esto es de gran importancia por cuanto es precisamente esta presentación y discusión la que proporcionará la actividad directa por parte del alumno y que, a su vez, posibilitará la asimilación y comprensión de los conceptos y procedimientos que se enumeran en esta columna.
3. La tercera contiene sugerencias didácticas y posibles exploraciones y actividades complementarias que pueden realizarse.

No cabe pensar en esta actividad como «utópica», como a menudo se ha tildado a este tipo de actividades que requieren de material informático. El programa en sí, como ya se ha apuntado, es de muy fácil obtención y debería formar parte de la biblioteca de software de todo Departamento de Matemáticas; es de inmediata utilización, muy versátil, potente y enormemente didáctico. Sus requerimientos de sistema son mínimos, ampliamente rebasados por cualquier ordenador actual de tipo medio o incluso básico. Por otra parte, el aula de informática de los institutos de enseñanza secundaria tiene –debería tener– diez ordenadores con capacidades más que suficientes para ejecutar Cabri. Los treinta alumnos por aula en ESO proporcionan tres alumnos por ordenador, situación que, si bien no es la óptima, sí que permite una fructífera realización de esta práctica. Además, la actividad

No cabe pensar en esta actividad como «utópica», como a menudo se ha tildado a este tipo de actividades que requieren de material informático.

está pensada para ser desarrollada en varias sesiones. Dado que un mínimo de tres sesiones serán necesarias para conducir al resultado final, los alumnos pueden rotarse en el manejo directo del ordenador. En cualquier caso, se deja al docente la temporalización final, pues depende en gran parte de la realización de algunas actividades de ampliación y complementarias que se sugieren en la tercera columna de la ficha de trabajo que sigue a esta introducción. Sería conveniente, además, una sesión preliminar para que los alumnos se familiaricen un poco con el programa.

En particular, los alumnos deberían ser capaces, tras esta toma de contacto, de:

- Dibujar puntos cualesquiera en el plano.
- Trazar el segmento que une dos puntos.
- Marcar el punto medio de un segmento.
- Dibujar la mediatriz de un segmento.
- Dibujar la circunferencia con centro dado y tomando otro punto para la medida del radio.
- Trazar perpendiculares a un segmento por un punto exterior.
- Poner –y situar correctamente en sitio legible– letras (etiquetas) a elementos dibujados.
- Cambiar el color de los elementos dibujados.
- Conocer la facilidad de «pinchar y arrastar» elementos previamente dibujados.
- Comprobar paralelismo.
- Medir segmentos.
- Borrar determinados elementos.

(Estos tres últimos puntos sólo son necesarios si se decide explorar la ampliación: Teorema de la Paralela Media. -Ver ficha de trabajo.)

Todas estas acciones se realizan de forma automática y facilísimamente, pues vienen incorporadas en la barra de botones de Cabri.

Por último, y como en toda actividad de este tipo, se aconseja que el docente se familiarice –si no lo está ya– con el programa y realice previamente todos los pasos propuestos en la ficha que sigue.

ACCIONES	CONCEPTOS E IMPLICACIONES	SUGERENCIAS Y NOTAS
• Dibujamos (y etiquetamos) tres puntos cualesquiera A, B, C, en la zona de trabajo.	• Puntos en el plano.	• Recordar el concepto intuitivo de punto en plano. • Utilizar la facilidad para mover objetos para situar en sitio adecuado y legible las etiquetas identificativas de los elementos señalados (en este caso A, B, C).
• Formamos un triángulo uniendo dichos puntos.	• Segmentos. Vértices y lados de un triángulo. Determinación de un segmento por dos puntos en el plano.	• Ampliación: Dos puntos determinan una recta en el plano, ¿cuántos determinan un plano en el espacio? ¿Por qué trípodes en vez de mesas de cuatro patas?
• Marcamos los puntos medios de los lados. Sean M, N, R. Construimos los segmentos MN y NR.	• Punto medio de un segmento. Equidistancia.	• Ampliación: Construcción del punto medio de un segmento con regla y compás.
• Trazamos las mediatrices (perpendicular por el punto medio).	• Perpendicularidad de rectas. Mediatriz de un segmento.	• Ampliación: Construcción de la mediatriz de un segmento con regla y compás (básicamente se habría hecho antes, al hallar el punto medio del segmento con estas mismas herramientas).
• Marcamos el punto de intersección O.	• Intersección de dos rectas. (Paralelismo de rectas).	• Ampliación: Con las opciones incorporadas en Cabri, para comprobar paralelismo y medición de distancias es muy fácil comprobar el teorema de la paralela media (compruébese que, por ejemplo, el segmento MN es paralelo al lado BC y que MN mide la mitad que BC. Figura 1).
• Construimos una circunferencia de centro O y radio (por ejemplo) ON.	• Circunferencia. Centro y radio. Cuerdas. Determinación de una circunferencia por tres puntos. Centro como intersección de las mediatrices de las cuerdas. Perpendicularidad de cuerdas y radios (diámetros).	• Es conveniente cambiar a colores más claros los elementos auxiliares. Aunque Cabri tiene la posibilidad de ocultar elementos, si utilizamos colores claros para éstos seguimos viendo en cada momento la construcción sin perder legibilidad en el dibujo que se va formando. Por contra, marcaremos con negro la circunferencia obtenida, pues es ya la circunferencia de Feuerbach. Llamaremos la atención del alumno comprobando que los seis puntos restantes que determinaremos pertenecen necesariamente a esta circunferencia. (Ver nota final).
• Trazamos las tres alturas y marcamos los pies de éstas como S, T, U. Marcamos el ortocentro H.	• Alturas de un triángulo: perpendicular por un vértice al lado opuesto. Pies de las alturas. Concurrencia de rectas. Ortocentro. Pertenencia de un punto a una circunferencia. Puntos interiores y exteriores a una circunferencia. Círculo y circunferencia.	• Obviamente estos pies pertenecen a la circunferencia de Feuerbach. Se propone una pequeña discusión tras determinar el primer pie: ¿es casualidad? ¿será siempre así? Tras determinar los otros dos debería concluirse que pertenecen siempre. Otra posibilidad es mover un vértice cualquiera (que arrastra toda la construcción) y comprobar que siguen estando sobre la circunferencia. (Ver nota final). • Ampliación: Las mediatrices de las cuerdas (figura 3) son paralelas a las alturas ¿siempre? ¿por qué?
• Marcamos los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro H con cada uno de los vértices A, B, C.	• Afianzamos conceptos: segmento. Ortocentro. Alturas. Vértices. Puntos medios. Pertenencia,...	• Para marcar el punto medio de un segmento que está sobre una recta (por ejemplo, el segmento AH está sobre la recta que contiene a la altura que pasa por A) hay que definir previamente dicho segmento a partir de sus extremos. En la figura 4 se dibujan con línea discontinua, tras definirlos por sus extremos AH, BH y CH.

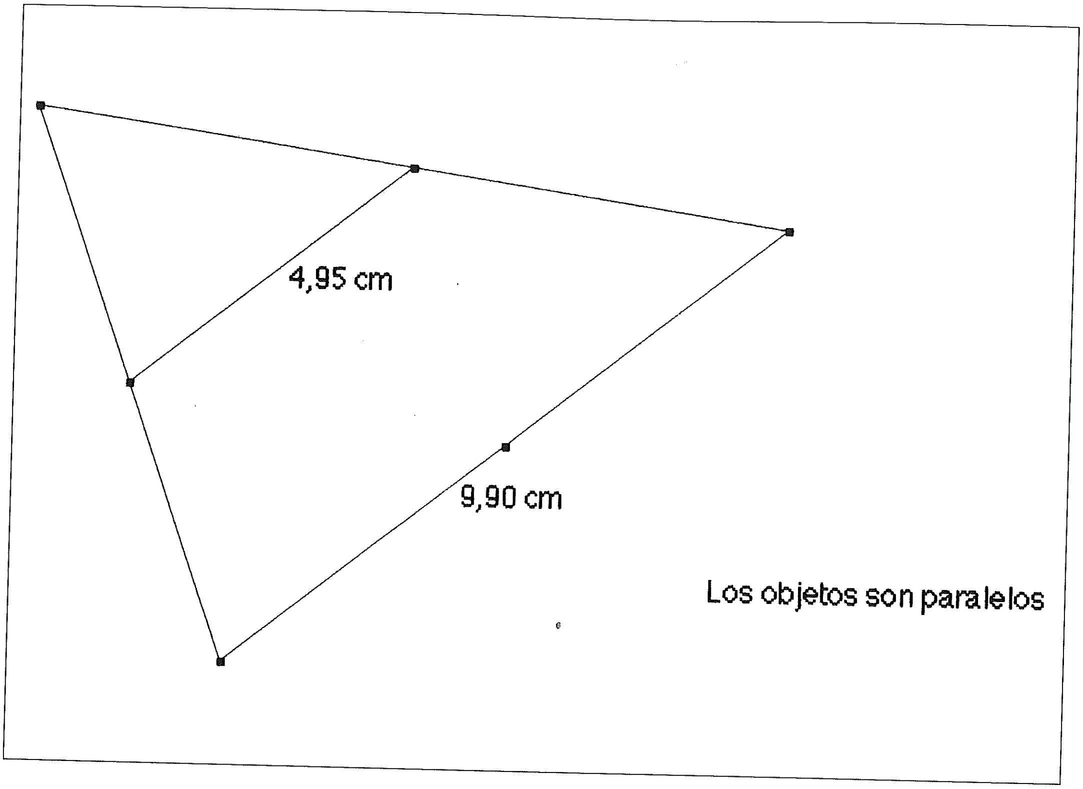

Figura 1

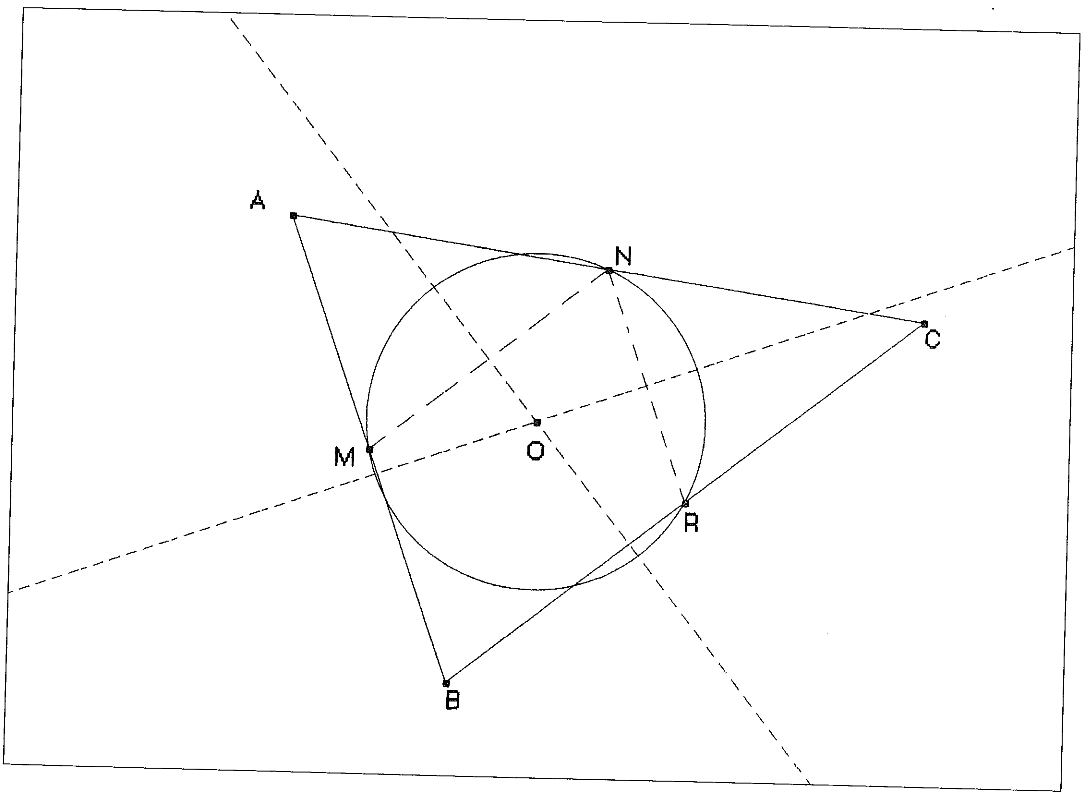

Figura 2

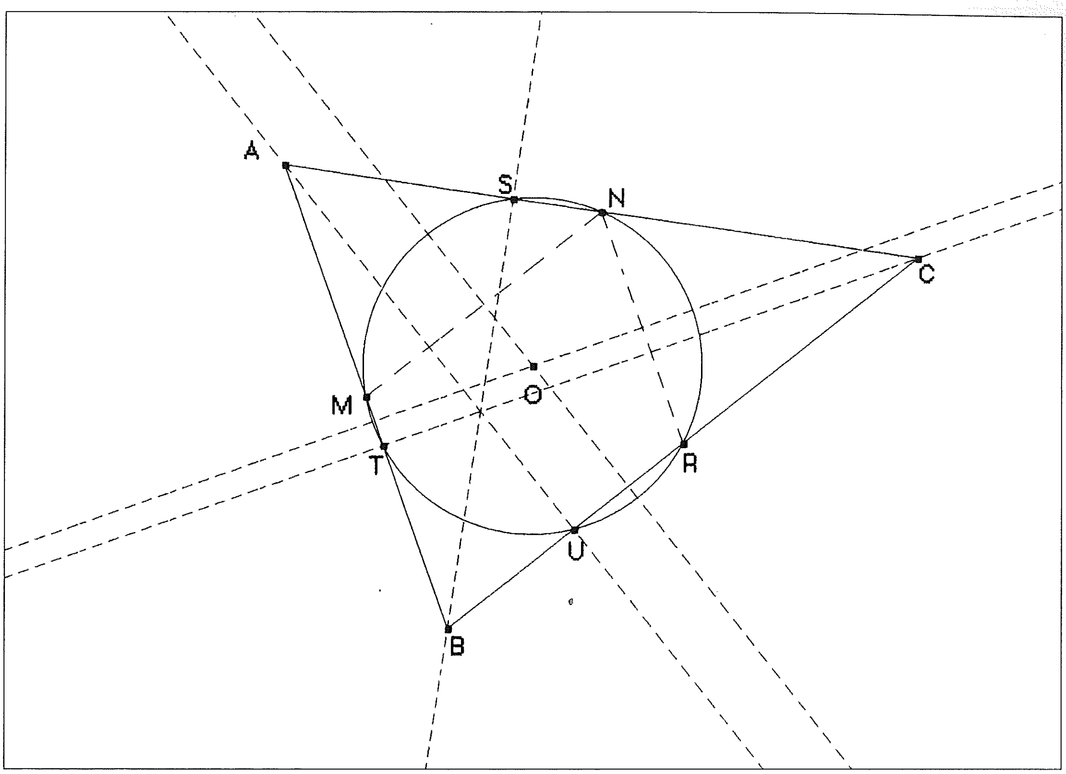

Figura 3

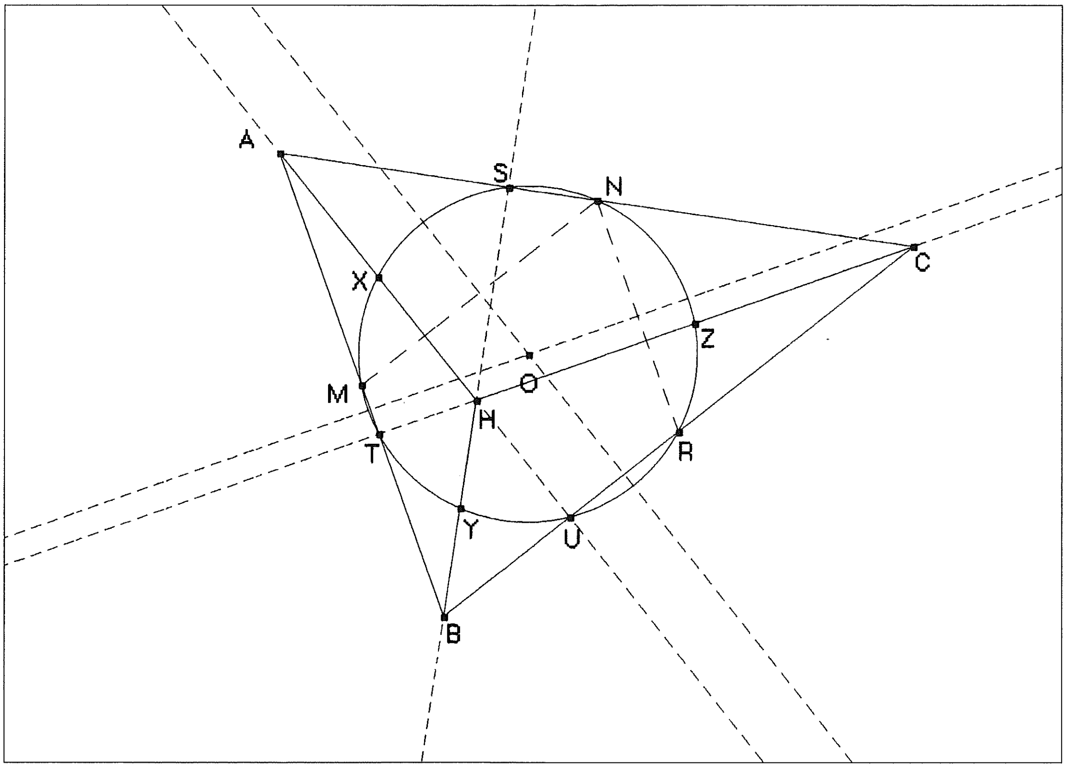

Figura 4

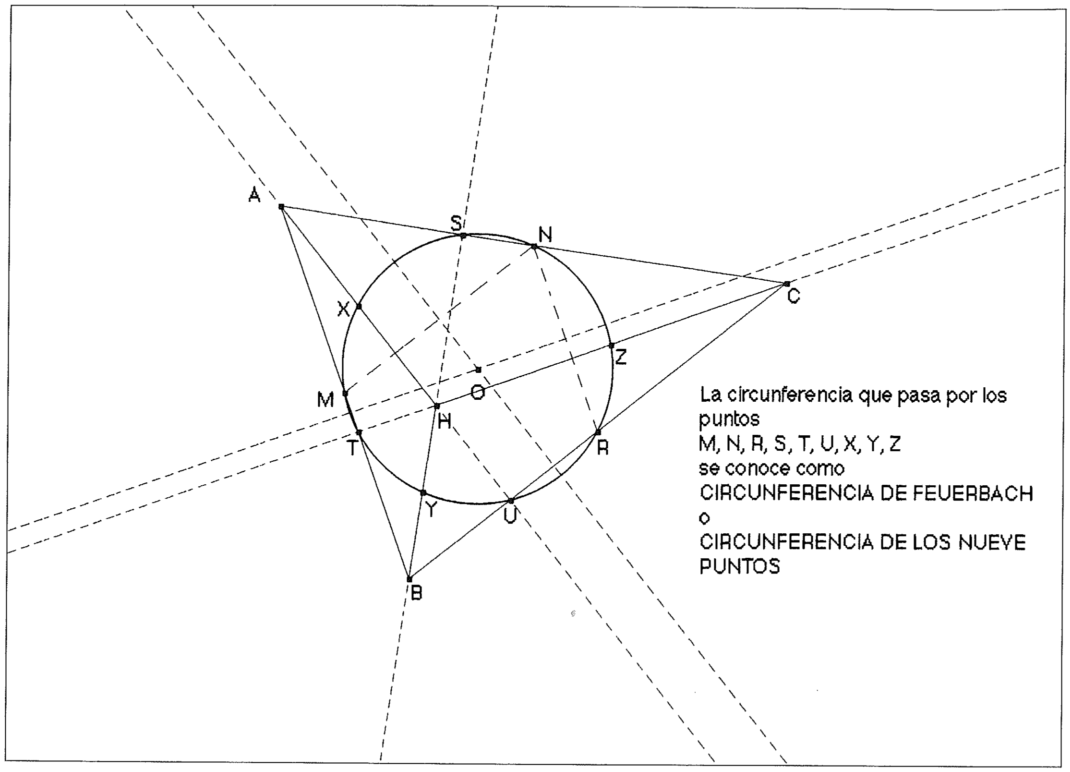

Figura 5

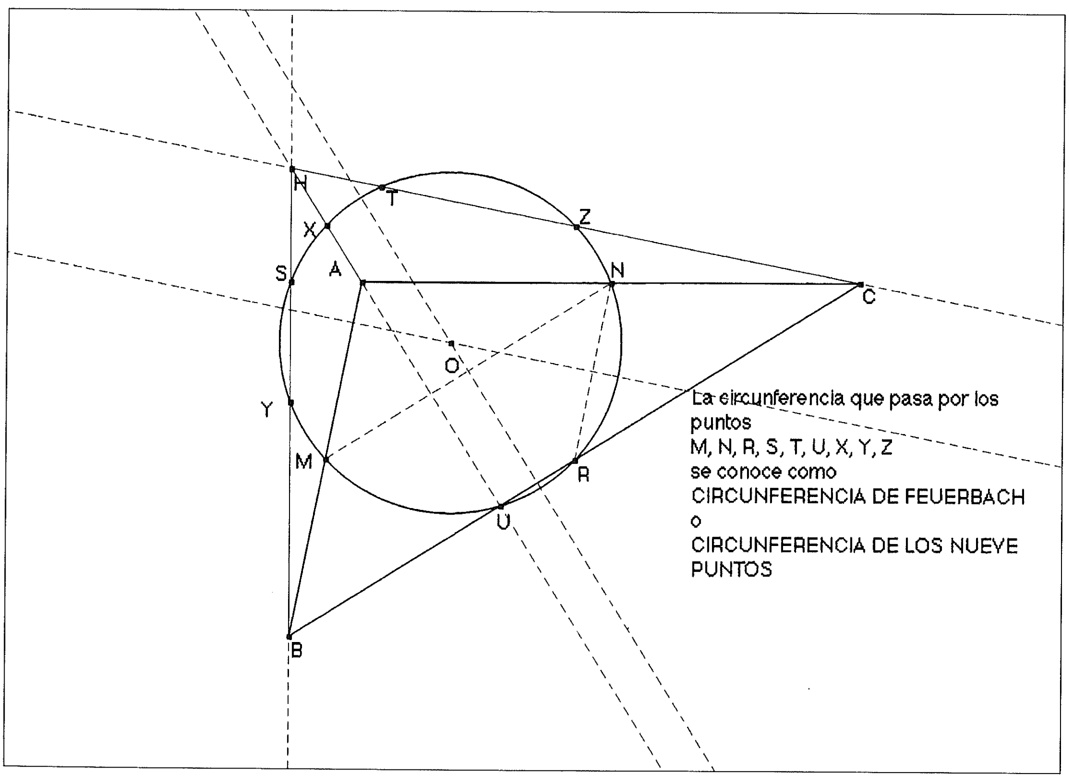

Figura 6

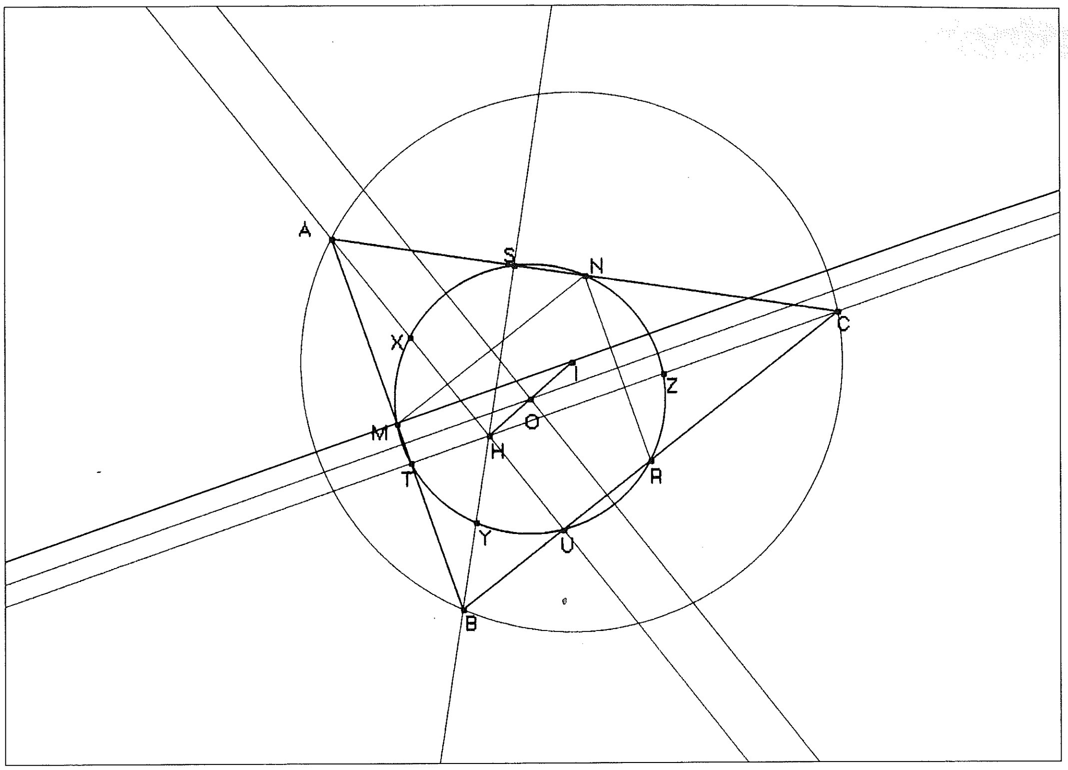

Figura 7

Nota final

Al arrastar con el ratón uno o más vértices sucesivamente, se irán formando otros triángulos arbitrarios que mantienen la construcción completa anterior. Es un proceso muy ilustrativo para comprobar que, cualquiera que sea el triángulo, los nueve puntos siguientes:

- los tres puntos medios de los lados;
- los tres pies de las alturas;
- y los tres puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro con cada uno de los vértices

están siempre sobre una circunferencia, así llamada de los nueve puntos o circunferencia de Feuerbach.

En la figura 5 se tiene el resultado final de la construcción inicial, con la circunferencia en trazo grueso. La figura 6 se ha obtenido arrastrando los vértices. Obsérvese que, al ser el triángulo resultante obtuso, el ortocentro cae «fuera» de este nuevo triángulo.

Notas para la evaluación

La evaluación de esta actividad puede realizarse a partir de cuatro fuentes de información. La primera de ellas se llevaría a cabo *in situ*, durante el desarrollo de la misma. En la segunda, también en el aula de informática, podrían proponerse actividades complementarias que hagan uso de las facilidades previamente utilizadas o incluso investigar nuevas posibilidades del programa. La tercera, ya en el aula habitual, podría ser una prueba escrita donde se comprueben el conocimiento y la asimilación de los conceptos y procedimientos que hayan ido surgiendo en el desarrollo de la actividad. Por último, puede encargarse a cada uno de los grupos de alumnos que trabajen conjuntamente la realización de un «diario» de sesiones, donde se recojan los diferentes pasos que vayan haciéndose.

Desarrollamos brevemente cada una de estas posibilidades:

1. Como se indicó en la introducción, las actuales circunstancias condicionan el uso del ordenador a tres alumnos por puesto de trabajo. Si se opta por rotar dicho uso, podría tomarse nota de las actitudes y aptitudes de cada uno de ellos. La plantilla que proporcionan la mayoría de los «Cuadernos del Profesor» sirve perfectamente al efecto. Si se desea información

más detallada, no es difícil construir una plantilla, a partir de la lista de clase, donde recoger cuantas notas se consideren adecuadas.

2. Utilizando exclusivamente comandos previamente utilizados en el desarrollo del guión anterior puede comprobarse el segundo teorema enunciado en la introducción: «El centro de la circunferencia de Feuerbach es el punto medio entre el ortocentro y el circuncentro».

   En efecto, el ortocentro ha sido ya marcado, el circuncentro es el punto de corte de las mediatrices de los lados (centro de la circunferencia que contiene a los tres vértices) y se sabe cómo marcar segmentos y señalar su punto medio (ver figura 7). La determinación del baricentro es igualmente inmediata.

   Investigando nuevas posibilidades pueden proponerse otras tareas. Así, por ejemplo, la posibilidad de dibujar la bisectriz de un ángulo permite obtener el incentro del triángulo e introducir de este modo nuevos conceptos: bisectriz, incentro, tangencia de circunferencias y rectas, etc. Las posibilidades, como se ve, son prácticamente ilimitadas.

3. La prueba escrita ha tenido y seguirá teniendo su papel importante en la evaluación. La forma queda, como es natural, a criterio del docente: pruebas cortas, tipo test, desarrollo de alguna parte de la actividad, etc. Ejemplos de preguntas cortas pueden ser: ¿Cómo definirías el punto medio de un segmento? ¿Cuántas alturas tiene un triángulo? ¿Siempre se cortan las tres en un punto? ¿Cómo tiene que ser el triángulo para que este punto esté fuera de él?, etc. Preguntas de desarrollo más formal (y más difíciles, ya que requieren de una concatenación de procesos que puede no haberse asimilado aún en su conjunto, aun cuando cada uno de ellos por separado si se haya comprendido) serían: ¿Cómo encontrarías el ortocentro de un triángulo? ¿Cómo encontrarías –sin medir– el punto medio de un segmento?, etc.

4. Elaboración de un cuaderno de trabajo. Si se opta por esta práctica –muy aconsejable, por lo demás–, hay que hacerlo saber previamente a los alumnos para que se repartan las tareas de tomar notas, hacer esquemas de lo que va apareciendo en pantalla, etc. La evaluación de este cuaderno de trabajo se haría de acuerdo a consideraciones habituales de orden, limpieza, claridad de contenidos y de presentación, completitud de la exposición, adecuación de los dibujos a las representaciones de la pantalla, etcétera.

Finalizamos reiterando que la relativa facilidad de preparación y puesta en práctica, unida a la siempre deseable, por parte del alumnado, utilización de material y procedimientos informáticos hacen de esta actividad una tarea de indudable calidad y de muy positivas consecuencias didácticas en el proceso de la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría.

Nota bibliográfica

Las referencias de «Ayuda» incluidas en el programa Cabri permiten, dada la simplicidad de su manejo, su utilización de forma casi inmediata. Por otra parte, los contenidos geométricos de la actividad son de sobra conocidos y están suficientemente detallados en cualquier texto de este nivel, por lo que obviamos hacer referencia específica a cualquiera de ellos.

José María Álvarez
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
Thales

SUMA

ENVÍO DE COLABORACIONES

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza
Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA
Tno.: 976 76 13 49
Fax: 976 76 13 45
E-mail: palacian@posta.unizar.es