SUMA 25
junio 1997, pp. 23-30

Si el eje de ordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de un triángulo?

Carmen Azcárate

A Gonzalo Sánchez Vázquez: el eslabón que une la generación comprometida en la lucha antifranquista con la generación comprometida en la renovación de la educación matemática

HOMENAJE A GONZALO SÁNCHEZ VÁZQUEZ

Partiendo del uso de la palabra vertical en las clases de matemáticas y de las confusiones habituales de los alumnos en torno al concepto de altura de un triángulo, vamos a exponer algunas reflexiones acerca de cuestiones de lenguaje, de errores de alumnos con algunas explicaciones de sus orígenes, de imágenes mentales y esquemas conceptuales de los estudiantes y del papel de las definiciones en el aprendizaje de las matemáticas.

ENTRE el profesorado de matemáticas, es habitual explicarse las anécdotas más curiosas de nuestras clases, con especial referencia a los errores más o menos estrambóticos de nuestros alumnos y alumnas. Aparte del aspecto jocoso de estos comentarios, se advierte la constante queja y preocupación por las innumerables dificultades de lenguaje que tienen los estudiantes y la repercusión negativa de esta deficiencia sobre el aprendizaje de las matemáticas.

Una de las peores experiencias que, desgraciadamente nos toca vivir con frecuencia, es la comprobación de que los alumnos no han aprendido aquello que enseñamos con tanto esmero, convencidos de la claridad de nuestras explicaciones y de la pertinencia de los ejemplos y ejercicios realizados en la clase. ¿Qué ha sucedido? Es evidente que se trata de un fenómeno que no podemos atribuir sólo a la distracción, al desinterés o a la superficialidad de los estudiantes.

Otro comportamiento característico del profesorado de matemáticas es la tendencia a clasificar las manifestaciones de los alumnos, tanto orales como escritas, según el criterio correcto/incorrecto; por lo demás, todo parece indicar que eso es precisamente lo que esperan de nosotros tanto los propios estudiantes, como sus familias y la sociedad, con lo cual se consolida y se perpetúa dicha tendencia.

En este artículo vamos a exponer algunas reflexiones en torno a cuestiones de lenguaje en la clase de matemáticas, de errores con algunas explicaciones de sus orígenes, de imágenes mentales y esquemas conceptuales de los alumnos y del papel de las definiciones en el aprendizaje de las matemáticas.

El eje de ordenadas, ¿es vertical?

Los mapas de algunas ciudades

Una observación curiosa es que los mapas de muchas ciudades tienen una orientación diferente de la norte-sur de cualquier mapa regional, provincial, estatal o universal. La orientación suele corresponder a la estructura cuadriculada, cuando la hay (Nueva York), o sigue vías principales que se toman como eje «horizontal» o «vertical» (Madrid, el paseo de la Castellana). A título de ejemplos, vamos a fijarnos en algunos mapas en particular:

- Como se puede observar en el mapa de la figura 1, la orientación del mapa de Barcelona no es norte-sur y está determinada por el barrio del Ensanche que tiene una estructura cuadriculada; cuando nos referimos a calles como el Paseo de Gracia o la calle Muntaner, es corriente utilizar los verbos «bajar» o «subir» (que se pueden interpretar montaña-mar o viceversa) pero también se habla de calles «verticales» en contraposición con las calles «horizontales» como la Gran Vía o la calle Aragón.
- La orientación del mapa de Montréal (figura 2) tampoco está orientado norte-sur y también sigue la estructura rectangular de una buena parte de la ciudad, donde también se utilizan las expresiones «subir» y «bajar» en relación al río, y de calles «verticales» u «horizontales».

Me pregunto qué debe pasar en las clases de geografía cuando se describen recorridos urbanos sobre los mapas. Algunos profesores me han confesado que es habitual que se cuelen las palabras «vertical» y «horizontal» en esta acepción tan particular y, por otro lado, tan contradictoria con sus respectivas definiciones ortodoxas. Pero volveremos sobre ello más adelante.

El juego de los barquitos

Todo el mundo conoce este juego que ilustramos en la figura 3.

Creo que cualquiera estaría de acuerdo en considerar perfectamente comprensible una descripción de este juego que incluyera algo así como «se ponen las letras, de la *a* a la *j*, en horizontal y los números, del 1 al 10, en vertical, etcétera».

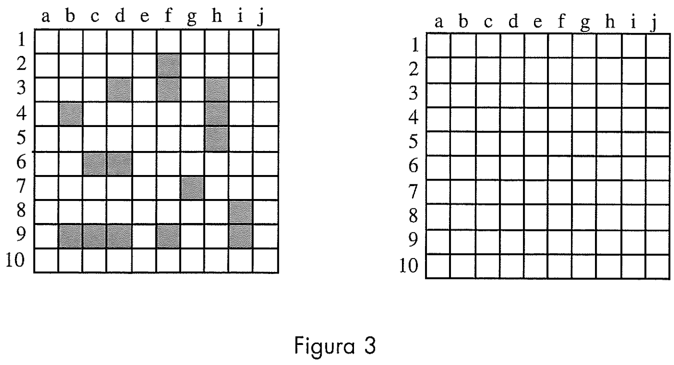

Figura 3

El sistema de ejes cartesianos

En España, en las clases de matemáticas de los últimos cursos de EGB, en BUP o, actualmente, en los cursos de ESO y de Bachillerato, cuando introducimos o utilizamos el sistema de coordenadas cartesianas (figura 4), consideramos como equivalentes las expresiones:

- eje de abscisas, eje de las x, eje «horizontal»;
- eje de ordenadas, eje de las y, eje «vertical».

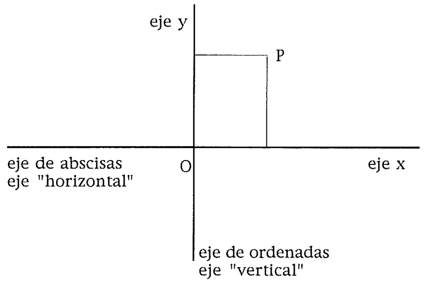

Figura 4

Es muy curioso observar cómo los profesores de matemáticas utilizan normalmente los términos «horizontal» y «vertical» en su expresión oral, pero no los suelen escribir ni aceptar en los escritos de los alumnos, por lo menos en el ámbito cultural de nuestro país. No es mi intención hacer una revisión del uso de dichos términos según el área lingüística, pero sí puedo afirmar que los anglosajones utilizan los vocablos «horizontal» y «vertical» tanto en libros de texto para estudiantes de enseñanza secundaria y superior, como en libros

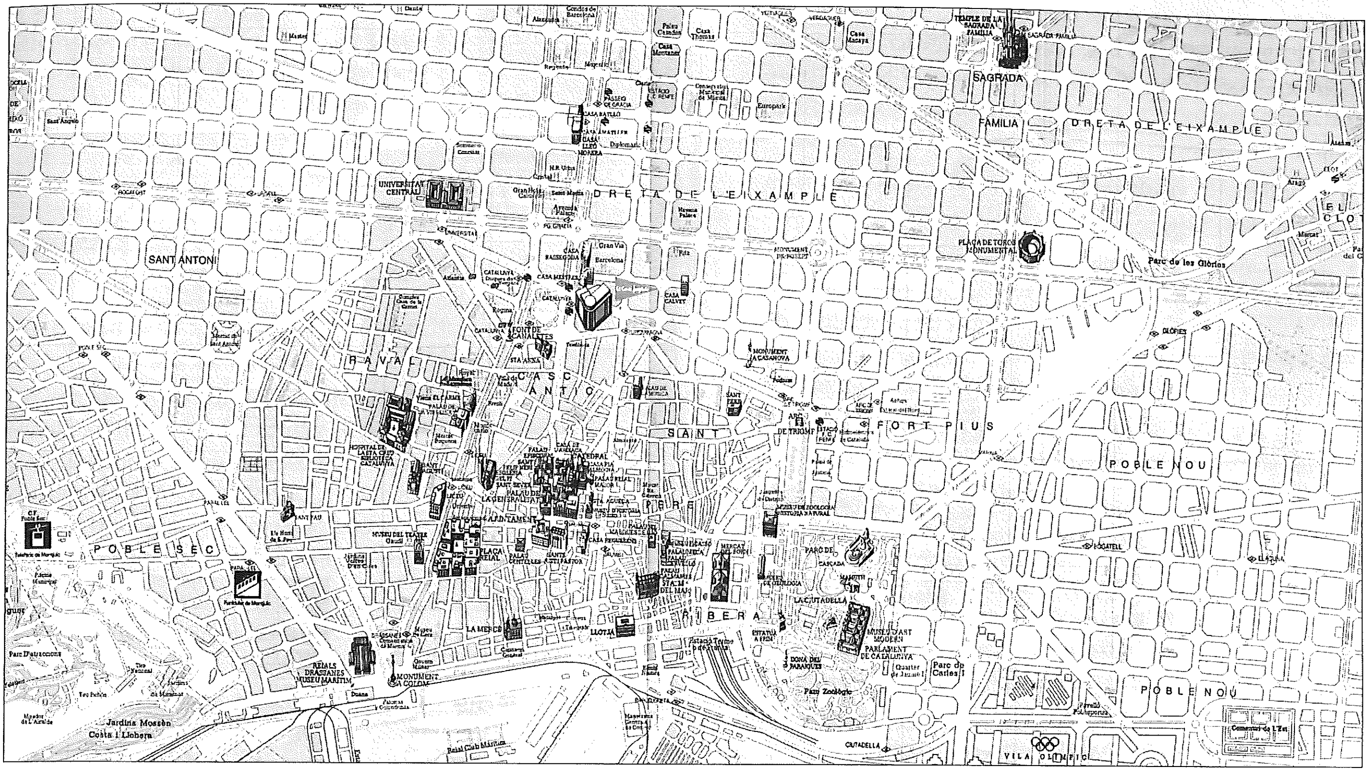

Figura 1

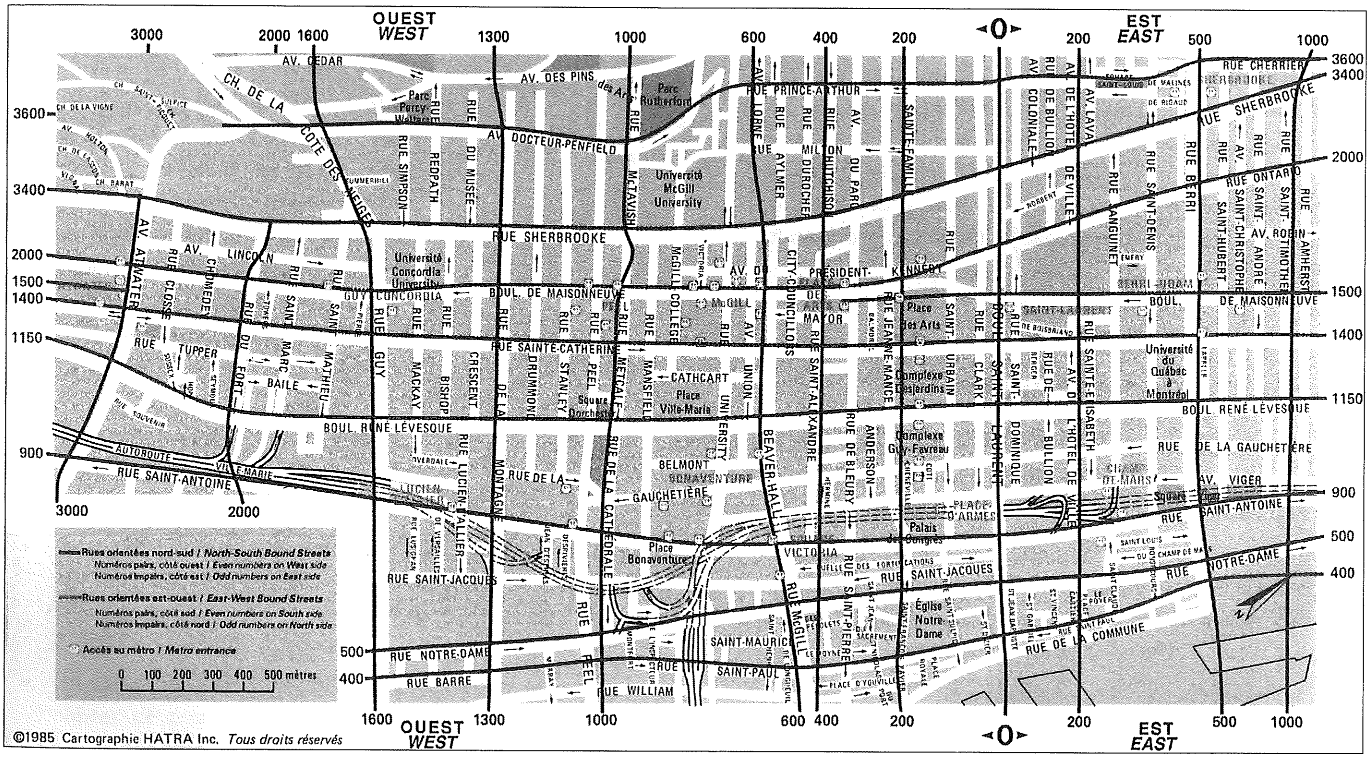

Figura 2

dirigidos a profesores. Así, por ejemplo, podemos leer (el subrayado es mío): «... desgraciadamente esta representación produce confusiones considerables en la mente de los alumnos ya que, si bien la ecuación del *eje horizontal* es y = 0...» (Shuard y Neill, 1977, p. 29)

A partir de estos ejemplo podemos plantearnos cuáles son los diferentes significados de la palabra «vertical»:

- En primer lugar tenemos el significado científico ligado al fenómeno de la gravedad terrestre, que los alumnos estudian en las asignaturas de geografía y de física; es el significado reconocido que hallamos en los diccionarios o enciclopedias. Así, por ejemplo:

  «*Vertical.* Aplícase a la recta o plano perpendicular al del horizonte.» (Casares, 1963)

  «*Vertical de un lugar.* Dirección del hilo de la plomada en este lugar.» (Larousse, 1964)

  «*Vertical.* Que tiene la dirección de una plomada. Dícese de la recta o plano que es perpendicular a una recta o plano horizontal.» (Real Academia de la Lengua Española, 1992).

- Pero hemos visto que en el aula de matemáticas existe otro significado que tiene algo que ver con el paralelismo respecto de los márgenes de la hoja de papel, del cuaderno o de la pizarra. También corresponde a unos ciertos gestos que se pueden describir en función de movimientos o de la posición de nuestro cuerpo: hacia mí, hacia adelante, hacia abajo, hacia arriba...

Este último significado de «vertical» es un buen ejemplo del llamado lenguaje compartido en una clase: todos (profesorado y alumnado) lo comprendemos, lo utilizamos y lo aceptamos en nuestras expresiones orales de uso escolar cotidiano. Sin embargo, no lo escribimos, no lo definimos; en realidad, no somos conscientes de su uso y no lo admitimos.

Las alturas de un triángulo

En muchas ocasiones he planteado las siguientes cuestiones a diferentes grupos de alumnos (octavo de EGB, tercero de ESO, primero y segundo de BUP, primero de Magisterio):

- Imagina un triángulo; ¿qué sabes de la palabra «altura» de un triángulo? (se les deja un tiempo de silencio para que piensen y sean conscientes de lo que piensan).
- Dibuja lo que has imaginado antes.
- En los siguientes triángulos, dibuja las alturas.

En primer lugar, quiero decir que la gran mayoría de triángulos imaginados y representados tienen un aspecto parecido al de la figura 5: acutángulos e isósceles; a veces obtusángulos, alguno escaleno, pero casi todos con la base «horizontal»:

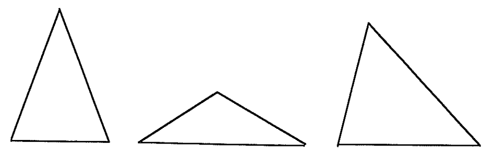

Figura 5

En cuanto a la tercera pregunta, es decir las alturas dibujadas en triángulos dados, mostraré unos ejemplos que invitan a la reflexión.[1] Por de pronto hay que observar que muy pocos alumnos dibujan tres alturas.

El interés de la muestra que presentamos consiste en que las parejas de respuestas (figuras 6, 7, 8 y 9) corresponden a los mismos alumnos:

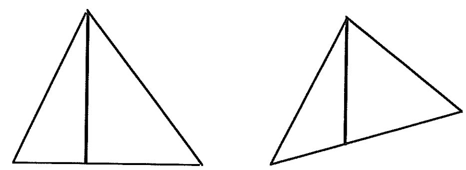

Figura 6

En la figura 6 vemos que en el caso del triángulo de base «horizontal», se puede decir que la respuesta es correcta. Sin embargo, en el otro triángulo el trazado de la altura revela que el criterio seguido no es el de perpendicularidad al lado opuesto sino el de «verticalidad» en el sentido discutido en el apartado anterior.

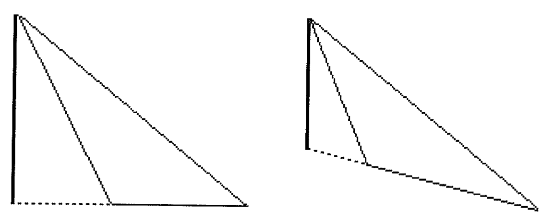

Figura 7

En la figura 7 se puede observar que el error cometido es del mismo tipo que el anterior.

1 Los ejemplos que cito aquí no pretenden ser representativos de todo el alumnado; expresan simplementeun tipo de respuesta bastante común y, en consecuencia, digna de análisis.

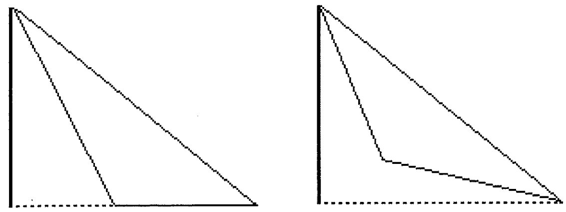

Figura 8

En el caso de la figura 8 pasa lo mismo, pero el alumno ha realizado una acomodación más sofisticada, donde se inventa una horizontal de referencia.

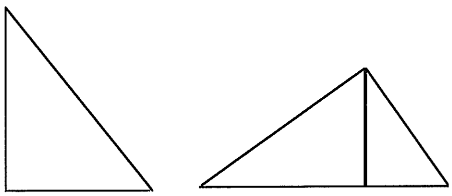

Figura 9

En el caso de los triángulos rectángulos iguales de la figura 9, el primero no tiene ninguna altura mientras el segundo tiene una.

Para explicar estos casos tan frecuentes, creemos que hay que tener en cuenta una serie de distintos factores que se entremezclan y contribuyen a un mal aprendizaje de los alumnos. Se pueden distinguir los siguientes aspectos:

- el significado cotidiano de la palabra «altura» que se aplica a objetos, personas, monumentos, relieves y que se mide verticalmente, según la gravedad;
- el significado de «vertical» en la hoja de papel como «paralelo a ciertos márgenes», tal como hemos visto anteriormente;
- la confusión, frecuente en los alumnos, entre los significados de «perpendicular» y de «vertical» en el sentido de «según la gravedad»;
- el hábito generalizado, tanto en los libros de texto como en las pizarras, de dibujar siempre los triángulos con un lado «horizontal» que se designa como «base».

Sin embargo, una cosa no cabe duda: todos estos alumnos han recibido una enseñanza del concepto de altura de un triángulo como la recta (o el segmento) que pasa por cada uno de los vértices y es perpendicular a su lado opuesto; y todos, en la lección correspondiente, han dibujado las tres alturas de un triángulo con escuadra; incluso algunos las han dibujado con compás.

Estas consideraciones nos abocan a tratar del aprendizaje significativo y del papel que juegan las definiciones en el aprendizaje de las matemáticas. Para analizar mejor este fenómeno didáctico, introduciremos las nociones de imagen mental y de esquema conceptual.

Imágenes mentales

Entre las investigaciones que se ocupan del papel de la visualización en el aprendizaje de las matemáticas, me parece interesante destacar el texto de Tall y Vinner (1981) que define «imagen mental» de un concepto como «cualquier clase de representación (imagen, forma simbólica, diagrama, gráfica, etc.) del estudiante asociada al concepto». Por tanto, podremos decir que la imagen mental que una persona tiene del concepto de altura de un triángulo es el conjunto de imágenes asociadas en su mente al concepto de altura.

Podemos imaginarnos algunas de las posibles imágenes mentales correspondientes a distintas clases de representación. Así, por ejemplo:

- imagen mental gráfica (figura 10):

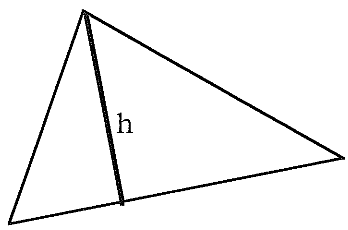

Figura 10

- imágenes mentales simbólicas

  – longitud de la altura como la distancia del vértice P de coordenadas (x_1, y_1) al lado opuesta que es la recta de ecuación $ax + by + c = 0$ (figura 11):

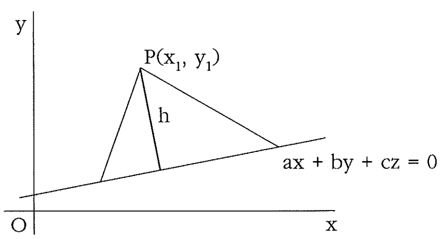

Figura 11

La fórmula que da la longitud de la altura es:

$$h = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

– área de un triángulo de base b y altura h:

$$A = \frac{1}{2} b\,h$$

Vale la pena observar que es curioso que el símbolo castellano que se utiliza para «altura» sea una h. ¿Será influencia del francés o del inglés?[2]

Es evidente que el conjunto de imágenes puede ser más o menos rico y complejo según la imagen mental que la persona en cuestión tenga del concepto de triángulo. La presencia mental de imágenes de triángulos acutángulos, obtusángulos, rectángulos, isósceles, equiláteros, en posiciones diversas... condicionará la riqueza y complejidad de las imágenes mentales de altura: una o tres alturas, alturas interiores y exteriores, existencia del ortocentro...

Esquemas conceptuales

Además de las imágenes mentales, Tall y Vinner (1981) y otros autores en artículos más recientes (Dreyfus y Vinner, 1989; Azcárate, 1990; Vinner, 1991) se refieren a la noción de «esquema conceptual» como una expresión que se refiere a «algo no verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto» (Vinner, 1991), es decir a la estructura cognitiva de un individuo, asociada a un concepto matemático. En palabras de Tall y Vinner (1981) el esquema conceptual es «el conjunto de todas las imágenes mentales del estudiante asociadas al concepto, juntamente con todas las propiedades que le caracterizan». Desarrollaremos algo más esta noción de esquema conceptual, centrándonos en el ejemplo de la altura (o las alturas) de un triángulo.

En este caso, además de las imágenes mentales ya mencionadas en el apartado anterior, cada persona conoce ciertas propiedades que caracterizan el concepto de altura y sirven para reconocerlo; así, por ejemplo:

- las alturas son rectas perpendiculares a los lados del triángulo;
- las alturas son rectas que pasan por los vértices del triángulo;
- la altura es un segmento que corta el lado opuesto a un vértice, en su punto medio;
- la altura es un segmento vertical;
- las alturas se cortan en un punto;
- las alturas son segmentos interiores al triángulo;
- para calcular el área de un triángulo es necesario conocer la base y la altura;...

Es evidente que el conjunto de imágenes puede ser más o menos rico y complejo según la imagen mental que la persona en cuestión tenga del concepto de triángulo.

2 En francés altura se dice *hauteur* y en inglés se dice *height*.

El que dichas propiedades sean, o no, correctas en el campo de la matemática, no afecta al hecho de que formen parte del esquema conceptual de una persona u otra. En efecto, muchos de los errores que cometen los alumnos tienen su origen en estas creencias que tienen categoría de conocimiento, en tanto que están arraigadas en la estructura cognitiva; por tanto, debemos tener en cuenta que serán muy difíciles de modificar.

También forman parte de los esquemas conceptuales los procedimientos asociados al concepto, como pueden ser en nuestro ejemplo de la altura:

- trazar las alturas con regla y escuadra;
- trazar las alturas con regla y compás;
- medir la longitud de una altura;
- calcular la longitud de una altura dadas ciertas condiciones o ciertos datos;...

Finalmente, podemos hablar también de las experiencias asociadas en nuestra mente bien al concepto matemático de altura, bien a la palabra altura, como pueden ser:

- los ejemplos y contraejemplos (altura/mediana/mediatriz/bisectriz de un triángulo);
- las situaciones cotidianas asociadas a la palabra altura;
- las situaciones matemáticas en que se ha visto, se ha estudiado o se ha utilizado el concepto (dibujo lineal; construcciones geométricas; geometría métrica; geometría analítica; figuras geométricas planas como los triángulos, los trapecios o los paralelogramos; cuerpos del espacio como las pirámides, los conos,...);
- las situaciones extramatemáticas en que aparece el concepto de altura (cinemática de la caída de los cuerpos; energía potencial);
- la amplitud mínima que ha de tener un orificio para que pueda pasar por él una forma triangular;
- las impresiones y sentimientos que nos evocan estas experiencias.

Resumiendo, al oir la palabra «altura» cada individuo puede visualizar ciertas imágenes, recordar ciertas propiedades y procedimientos o evocar ciertas experiencias. Se puede decir que el esquema conceptual que una determinada persona tiene de un concepto matemático, está formado por el conjunto de imágenes mentales, por las propiedades características, por los procedimientos y por las experiencias que la persona en cuestión asocia al concepto, más exactamente al nombre del concepto. Es evidente, por tanto, que sólo se puede hablar de esquema conceptual en relación a una persona específica. Por lo demás, hay que tener en cuenta también que una misma persona puede reaccionar de manera diferente ante el nombre de un concepto, en situaciones o contextos diferentes.

El papel de las definiciones

Llegados a este punto, podemos decir que adquirir un concepto matemático significa construir un esquema conceptual del mismo. Por tanto, saberse de memoria la definición de un concepto no garantiza en absoluto comprender su significado; en realidad, comprender quiere decir tener un esquema conceptual de forma que se asocien ciertos significados a la palabra que designa el concepto: imágenes mentales, propiedades, procedimientos, experiencias.

La presentación y la organización de la mayoría de los libros de texto y de buena parte de las clases de matemáticas parecen basarse en la presunción de que los conceptos se adquieren mediante su definición y de que los estudiantes utilizarán las definiciones en la realización de tareas o la resolución de problemas. Existe aquí un conflicto que Vinner (1991) expresa de la manera siguiente: «Las definiciones crean un problema muy serio en el aprendizaje de las matemáticas. Representa, quizá más que cualquier otra cosa, el conflicto entre la estructura de las matemáticas, tal como la conciben los matemáticos profesionales, y los procesos cognitivos de la adquisición de conceptos».

...el esquema conceptual que una determinada persona tiene de un concepto matemático, está formado por el conjunto de imágenes mentales, por las propiedades características, por los procedimientos y por las experiencias que la persona en cuestión asocia al concepto, más exactamente al nombre del concepto. Es evidente, por tanto, que sólo se puede hablar de esquema conceptual en relación a una persona específica.

En efecto, desde un punto de vista cognitivo, parece que los autores de libros de texto y muchos profesores parten del supuesto que los esquemas conceptuales se construyen a partir de las definiciones:

Definición → Esquema conceptual

y, también, que en la resolución de problemas y la realización de tareas es la definición la que se activa en la mente del estudiante y la que va a controlar el proceso.

Sin embargo, lo que ocurre en la práctica, según las investigaciones ya mencionadas que se ocupan de esta cuestión, es que el esquema conceptual se construye a partir de la experiencia del estudiante, es decir a partir de situaciones muy variadas, como ya hemos comentado anteriormente:

Experiencia → Esquema conceptual

Los alumnos tienden a realizar sus tareas de forma espontánea, de acuerdo con los hábitos adquiridos en la vida cotidiana, es decir que elaboran sus respuestas a partir de los elementos de sus esquemas conceptuales evocados por el contexto de la situación. Además, conviene observar que se produce una adaptación de manera que en la mayoría de los casos la respuesta se considera correcta, como en los ejemplos de los trazados de alturas de triángulos con base «horizontal», lo cual no estimula la necesidad de recurrir a las definiciones. Los conflictos debidos a esquemas conceptuales incompletos o mal construidos, sólo pueden aparecer en la realización de tareas no rutinarias.

El problema que nos planteamos es el de la necesidad de educar progresivamente los hábitos de los estudiantes, sobre todo de los que van a realizar estudios de matemáticas no elementales, de forma que las definiciones formen parte de su experiencia y, por tanto, de sus esquemas conceptuales. Nos parece evidente, que en el campo de las matemáticas, las definiciones desempeñan un papel muy importante en la realización de tareas cognitivas y, por consiguiente, en la formación de los esquemas conceptuales. Tendremos, pues, que ingeniar situaciones didácticas adecuadas, en las cuales las definiciones sean imprescindibles para una correcta realización de la tarea.

Conclusiones

El proceso de enseñanza-aprendizaje consiste, en gran parte, en ir compartiendo entre el profesor y los alumnos, los esquemas conceptuales de las nociones matemáticas objeto de estudio. Por tanto, debemos cuidar los lenguajes verbal, gráfico, simbólico, gestual que contribuyen al desarrollo y enriquecimiento de dichos esquemas.

Cuando comentamos los errores de nuestros alumnos o su expresión deficiente y cuando clasificamos sus respuestas como correctas o incorrectas, los profesores de matemáticas debemos afinar más en nuestras apreciaciones, necesitamos de más elementos teóricos que nos ayuden a comprender mejor el origen de dichos errores, a disponer de recursos adecuados para ayudarles a construir, revisar, reconstruir y enriquecer sus esquemas conceptuales.

Si el eje de ordenadas es vertical...

En la primera parte de este artículo, hemos visto que las descripciones gráficas, en el marco del sistema de ejes cartesianos, admiten la denominación de «vertical» y «horizontal» cuando se refieren a la pizarra o a los apuntes de los alumnos. Se puede decir que es una acepción de las palabras «vertical» y «horizontal» que nace en el contexto de la clase. Es útil: todo el mundo la utiliza, la entiende, es clara y no da pie a ambigüedades.

Ahora bien, es evidente que «vertical» y «horizontal» no forman parte de la terminología matemática; tampoco se reconoce dicha acepción en los diccionarios de la lengua (al menos, la española). Nos encontramos ante una situación que necesita explicitarse; es imprescindible que profesores y alumnos discutan los distintos significados de las palabras «vertical» y «horizontal», que analicen las ventajas e inconvenientes de utilizarlas, los elementos contradictorios que implican, y que decidan conjuntamente si van a aceptar su uso y en qué condiciones.

...¿qué podemos decir de las alturas de los triángulos?

Cuando tenemos que decidir acerca de nuestra manera de enseñar las matemáticas, tenemos que tener en cuenta no sólo la forma en que se espera que los estudiantes adquieran los conceptos matemáticos, sino también y sobre todo, la forma en que realmente los estudiantes adquieren dichos conceptos.

Las explicaciones del profesor o las definiciones del libro de texto no son nada si el alumno no ha construido unos esquemas conceptuales a partir de su experiencia en tareas ricas y variadas que le permitirán enfrentarse a situaciones cada vez más complejas, en el proceso dinámico y creciente de la construcción del conocimiento.

La explicación o la definición de las alturas de un triángulo quedan relegadas por los esquemas conceptuales que han construido los alumnos a partir de sus experiencias de la vida cotidiana y de las clases de matemáticas donde se dibujan insistentemente los triángulos con una base «horizontal» y donde el término «perpendicular» está demasiado asociado al de «vertical». Es decir que los errores de los alumnos están condicionados, en buena medida, por las confusiones en torno a la palabra «vertical».

Carmen Azcárate
Secretaria General
de la Federación Española
de Sociedades de Profesores
de Matemáticas

Bibliografía

AZCÁRATE, C. (1990): *La velocidad: introducción al concepto de derivada,* Tesis de doctorado, Universidad Autónoma de Barcelona.

CASARES, J. (1963): *Diccionario ideológico de la lengua española,* Gustavo Gili, Barcelona.

LAROUSSE (1968): *Gran enciclopedia...,* Planeta, Barcelona.

REAL ACADEMIA DE LA LENGUA ESPAÑOLA (1992): *Diccionario de la lengua española,* Espasa Calpe, Madrid.

SHUARD, H. y H. NEILL (1977): *From graphs to calculus,* Blackie, London.

TALL, D. y S. VINNER (1981): «Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity», *Educational Studies in Mathematics,* N.° 12, 151-169.

VINNER, S. y T. DREYFUS (1989): «Images and definitions for the concept of function», *Journal for Research in Mathematics Education,* Vol. 20, 356-366.

VINNER, S. (1991): «The role of definitions in teaching and learning», en TALL, D. (Ed.), *Advanced mathematical thinking,* Kluwer, Dordrecht, 65-81.