SUMA 24

febrero 1997, pp. 81-88

Fractales en la ESO

Tomás Queralt Llopis

En el presente artículo se muestra el planteamiento, justificación y la puesta en práctica de algunas actividades que forman parte de un taller de Fractales. Estas se han tratado en clase en grupos de segundo ciclo de ESO, y se han utilizado para iniciar el curso con un resultado satisfactorio. Con este trabajo se pretende romper con algunos estereotipos y con algunas creencias que los estudiantes tienen acerca de las matemáticas, así como crear el contexto más adecuado para que el alumno haga matemáticas

CON motivo de la celebración de las II Jornadas de Educación Matemática de la Comunidad Valenciana (La Safor, mayo de 1995) y de las VII JAEM (Madrid, septiembre de 1995), tuve ocasión de presentar un taller con idéntico título que este artículo y que, con sus mismas ideas y exposición, es ahora la base del mismo. Los materiales que de él obtuvimos han sido puestos en práctica con los alumnos de Segundo Ciclo de ESO del IES de Benifairó de les Valls (Valencia).

La idea que impulsa este material parte de considerar que las posibilidades actuales de utilizar las nuevas tecnologías en el aula como soporte didáctico son cada vez mayores; prueba de ello es que las calculadoras y ordenadores están introduciéndose en las clases de matemáticas con pie lento pero firme. Estos nuevos elementos, utilizados de forma razonable como canal transmisor de contenidos matemáticos, permiten situar al estudiante en el contexto idóneo de la actividad matemática. Así, enfocando el trabajo matemático básicamente como una labor de búsqueda y de investigación, se potencia esta actitud en el estudiante. Por otro lado, resulta altamente motivador para los alumnos la utilización del ordenador como herramienta de trabajo, ya que la interacción alumno-ordenador siempre es atractiva.

Justificación del material

El presente trabajo es una propuesta de material para llevar al aula en grupos de Secundaria Obligatoria. Este material no es una unidad didáctica, porque no tiene un eje en torno al cual se vertebra el diseño de una parcela curricular con entidad propia. Únicamente se pretende, partiendo de un elemento conductor como es el concepto de *fractal*, trabajar determinados contenidos matemáticos adaptados a la etapa 12-16. Estos contenidos forman parte de los componentes de la competencia matemática: hechos, destrezas, estructuras conceptuales, estrategias generales y cualidades personales. Se pueden tratar con diferente grado de profundización según el curso y las características del grupo de alumnos.

El artículo pretende, por un lado, mostrar al profesorado que estos nuevos elementos matemáticos, los fractales, se pueden incluir en la programación del área como un contenido objeto de estudio, y también utilizarlo como un recurso para trabajar aquellos contenidos con los que estén involucrados. Por otro lado, se pretende que el profesorado reflexione sobre la importancia de establecer redes conceptuales como una de las principales formas de aprendizaje. El material elaborado supone enseñar de forma activa, es decir, que los alumnos trabajen y construyan fractales. Así, se intentan presentar las actividades en forma de problema, de manera que sea el profesor quien exija el grado de profundización que considere oportuno. Por otra parte, como hemos dicho, la interacción que se produce entre el ordenador y el alumno resulta altamente motivadora, ya que supone la salida del entorno habitual del aula y de la mera relación profesor-alumno.

Tenemos la responsabilidad de trabajar en un área que de forma tradicional se ha interpretado como cerrada, donde todo estaba ya inventado. Se pretende romper con este estereotipo y con otras creencias que los estudiantes tienen sobre las matemáticas: «las matemáticas son cálculos», «los problemas de matemáticas se tienen que resolver rápidamente con unos cuantos pasos», «las matemáticas tienen como objetivo obtener respuestas correctas», «el papel de un estudiante de matemáticas es recibir conocimientos matemáticos y demostrar que los han recibido», «el papel del profesor de matemáticas es transmitir estos conocimientos y comprobar que los estudiantes los han recibido».

Hay que considerar además que los fractales son en sí mismo objeto de interés: a partir de su análisis y manipulación surgen nuevos «modelos» o figuras geométricas elementales, con lo que se favorece el enriquecimiento del alfabeto matemático; existen muchos ejemplos en la realidad cotidiana que tienen carácter fractal, y en su descripción se tiene que recurrir a los elementos que definen los fractales: ramificación de los bronquios, cadena de montañas, una coliflor...; favorece también la inversión de la tendencia en el seno de la matemática contemporánea en el sentido de retornar a la concepción de la matemática como ciencia de la naturaleza.

Hay que considerar además que los fractales son en sí mismo objeto de interés: a partir de su análisis y manipulación surgen nuevos «modelos» o figuras geométricas elementales, con lo que se favorece el enriquecimiento del alfabeto matemático...

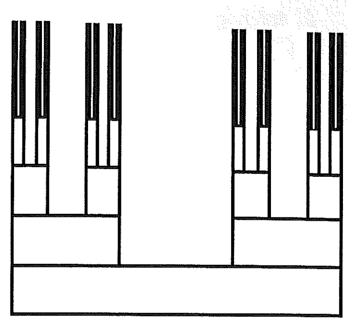
Metodología

Las actividades que a continuación se exponen son algunas de las propuestas a los alumnos de 3.° y 4.° de ESO con la intención de tratar los contenidos de NÚMEROS. El planteamiento de trabajo supone tomar como modelo metodológico el *investigador*, basado en el esquema *problemas-actividades sobre problemas-conclusiones-informe*. Este esquema permite al alumno trabajar los contenidos previstos desde la óptica de la *resolución de problemas*, es decir, situa al alumno en la posición más cercana a lo que podríamos entender por *hacer matemáticas*. Teniendo en cuenta las recomendaciones del Informe Cockcroft, así como el informe Kuwait y otros trabajos de investigación en Educación Matemática, pensamos que la resolución de problemas debería ser el eje en torno al cual centrar la actividad de las matemáticas escolares.

El esquema de trabajo de las actividades suele ser siempre el mismo. Cada actividad lleva aparejada un programa en Basic, que al ejecutarlo proporciona una imagen del fractal que va a servir de soporte de la actividad. En primer lugar los alumnos observan en la pantalla del ordenador la evolución que sigue el fractal en su construcción tras varias iteraciones, normalmente seis o siete, pues la definición de la pantalla no permite mejorar la imagen con un mayor número de éstas. A continuación, se les pide que describan del mejor modo posible la imagen que aparece en la pantalla. Esto permite al profesor observar la utilización por parte de los alumnos del lenguaje específico de las matemáticas, así como exigirles una mayor propiedad y precisión en las expresiones utilizadas. Posteriormente, se pide a los alumnos contestar una pregunta que aun siendo accesible para ellos, la investigación necesaria para responderla les permite manipular conceptos y operar con expresiones numéricas que no son tan evidentes, y que su tratamiento surge como exigencia y no como una mera ejercitación. Por último, en ocasiones se solicita al alumno que vaya más allá de lo que supone el análisis de un caso particular y generalice.

El peine de Cantor[1]

1. Describe la imagen que aparece en la pantalla.
2. Supongamos que el segmento original es el [0,1]. Por construcción, el conjunto de Cantor es un conjunto infinito de puntos, pero de medida cero. ¿El número 0,752 es del conjunto de Cantor?
3. ¿Cómo identificaríais los elementos de este conjunto?



La imagen que aparece en la pantalla es el llamado «Peine de Cantor» debido a su característica forma, y cuya construcción está basada en el conjunto de Cantor. El proceso de construcción de éste parte de considerar el intervalo [0, 1] inicialmente, dividirlo en tres partes iguales y eliminar el subintervalo central. En la siguiente iteración repetimos esta acción en cada uno de los dos subintervalos cerrados restantes, obteniendo con ello cuatro pequeños intervalos; y así sucesivamente, de manera que en el límite nos encontramos con un conjunto de infinitos puntos.

Para averiguar si el número 0,752 es del conjunto de Cantor partimos del intervalo [0,1], vamos obteniendo las expresiones decimales de los puntos que determinan los extremos de los subintervalos del conjunto de Cantor (ver figura adjunta) y observamos en cual de ellos se encuentra el valor 0,752.

Entonces, el número 0,752 quedará eliminado del conjunto de Cantor.

Para identificar los elementos de este conjunto hagamos notar que la dirección del número 0,752 en el conjunto de Cantor la vamos obteniendo cogiendo los intervalos a derecha (D) e izquierda (I), y es al llegar al intervalo central cuando queda eliminado:

D I D I D D I C

Así, podríamos escribirlo en base 3 a partir de las tres posibilidades de elección de una dirección:

0,752 = 0.20202201...

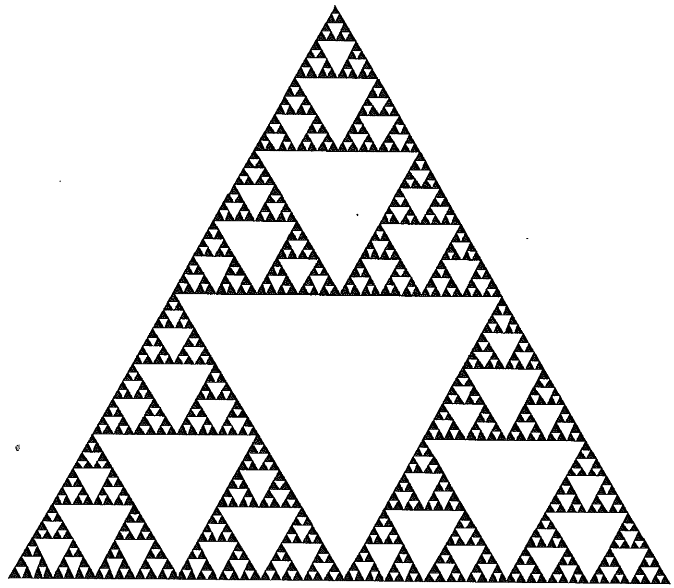
Por tanto, se puede comprobar que el conjunto de Cantor está formado por aquellos números que en base tres tienen únicamente ceros y doses.

1 Actividad basada en una propuesta de trabajo de José Ángel Bolea Oliván.

0			1
0	$\frac{1}{3}=0,333\ldots$	$\frac{2}{3}=0,666\ldots$	1
$\frac{2}{3}=\frac{6}{9}=0,666\ldots$	$\frac{7}{9}=0,777\ldots$	$\frac{8}{9}=0,888\ldots$	1
$\frac{6}{9}=\frac{18}{27}=0,666\ldots$	$\frac{19}{27}=0,703703\ldots$	$\frac{20}{27}=0,740740\ldots$	$\frac{21}{27}=0,777\ldots$
$\frac{20}{27}=\frac{60}{81}=0,740740\ldots$	$\frac{61}{81}=0,753086419\ldots$	$\frac{62}{81}=0,765432098\ldots$	$\frac{63}{81}=0,777\ldots$
$\frac{60}{81}=\frac{180}{243}=0,740740\ldots$	$\frac{181}{243}=0,74485596\ldots$	$\frac{182}{243}=0,74897119\ldots$	$\frac{183}{243}=0,75308641\ldots$
$\frac{182}{243}\equiv\frac{546}{729}=0,748971193\ldots$	$\frac{547}{729}=0,750342935\ldots$	$\frac{548}{729}=0,751714677\ldots$	$\frac{549}{729}=0,753086419\ldots$
$\frac{548}{729}\equiv\frac{1644}{2187}=0,75171467\ldots$	$\frac{1645}{2187}=0,752171925\ldots$	$\frac{1646}{2187}=0,752629172\ldots$	$\frac{1647}{2187}=0,753086419\ldots$
$\frac{1644}{2187}\equiv\frac{4932}{6561}=0,75171467..$	$\frac{4933}{6561}=0,751867093\ldots$	$\frac{4934}{6561}=0,752019509\ldots$	$\frac{4935}{6561}=0,752171925\ldots$

El triángulo de Sierpinski

1. Describe cómo se construye la imagen que aparece en la pantalla.
2. Si en la construcción partimos de un triángulo equilátero, y vamos haciendo agujeros de triángulos equiláteros semejantes, (o sea, si hacemos el proceso inverso al de la pantalla), ¿nos podemos quedar sin triángulo?
3. Si partimos de un triángulo equilátero de área A, y vamos sumando las sucesivas áreas de los triángulos que aparecen, ¿cual será el área total de la figura que al final obtenemos?



Se puede pedir que solamente sean dos o tres alumnos los que describan la construcción de la imagen, mientras que los demás dibujen aquello que sus compañeros les describen y, posteriormente, compararlo con la imagen de la pantalla.

Para responder a la cuestión 2 podemos hacer una tabla que nos indique como va evolucionando el triángulo inicial a medida que le vamos quitando los triángulos menores. Así, cabe preguntarse qué parte respecto del triángulo inicial nos queda tras cada iteración:

Decimal	***Fracción***	***Porcentaje***
0,25	1/4	25,00
0,4375	7/16	43,75
0,578125	37/64	57,81
0,6835937	175/256	68,36
0,7626953	781/1024	76,27
0,8220214	3367/4096	82,20
0,866516113	14197/16384	86,65
0,899887085	58975/65536	89,99
0,9249153	989527/1048576	94,37

Entonces, en el límite nos quedará una figura que tendrá área total cero.

3. Si partimos de un triángulo equilátero de área A, y sumamos las áreas de los sucesivos triángulos que vamos añadiendo, por el apartado anterior se intuye que el área total de la figura que tendremos en el límite será 4A. (Ver en el recuadro adjunto, para cada una de las fases, las áreas de los triángulos que se van añadiendo y las áreas totales.)

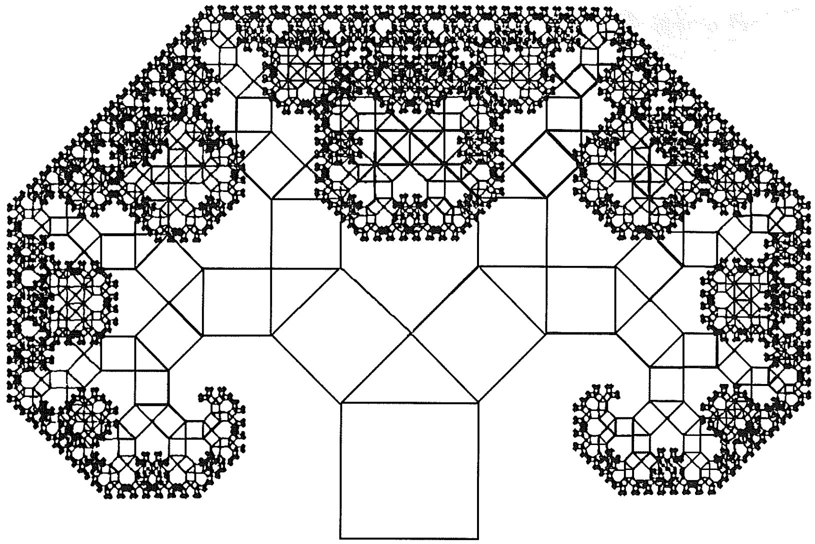
En el límite, la suma de las áreas de los sucesivos triángulos se reduce al cálculo de la suma de una serie numérica, que es una progresión geométrica de razón menor que 1:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n} A = A\,\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = A\,\frac{1}{\frac{1}{4}} = 4A$$

Fase	***Área del triángulo añadido***	***Área total***
1	A	A
2	$\frac{1}{4}A$	$A + \frac{3}{4}A = \frac{7}{4}A$
3	$\frac{1}{16}A$	$A + \frac{3}{4}A + \left(\frac{3}{4}\right)^2 A = \frac{37}{16}A$
4	$\frac{1}{64}A$	$A + \frac{3}{4}A + \left(\frac{3}{4}\right)^2 A + \left(\frac{3}{4}\right)^3 A = \frac{148}{64}A$
...	...	...
n	$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} A$	$A + \frac{3}{4}A + \left(\frac{3}{4}\right)^2 A + \left(\frac{3}{4}\right)^3 A + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} A$

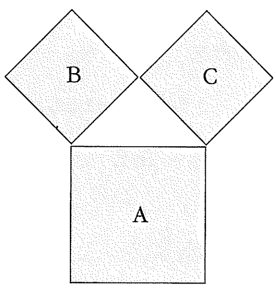
El árbol de Pitágoras básico

1. Describe la construcción del árbol de manera que cualquier compañero pueda hacer el dibujo a partir de tu descripción.
2. Si partimos de un cuadrado que tiene de superficie 1 m^2, ¿sabrías obtener la sucesión de las áreas de los cuadrados en cada iteración?



Podemos resolver este problema desde distintas perspectivas:

Método 1. Utilizando el Teorema de Pitágoras, sabemos que al ser rectángulo el triángulo que se forma en cada iteración, la suma del área de los cuadrados construidos es igual al área del cuadrado del que parten.



Área A = Área B + Área C

Y como B y C son iguales, entonces el área de cada cuadradito es la mitad del área del cuadrado del que parten.

Así, podríamos obtener el siguiente cuadro:

Iteración	**N.° de cuadrados**	**Área de cada uno**	**Área total**
0	$1 = 2^0$	1	1
1	$2 = 2^1$	1/2	1
2	$4 = 2^2$	$1/4 = 1/2^2$	1
3	$8 = 2^3$	$1/8 = 1/2^3$	1
...	...	...	...
n	2^n	$1/2^n$	1

Método 2. Como el triángulo rectángulo que nos aparece en cada iteración tiene los catetos iguales, entonces los ángulos interiores salvo el recto serán de 45°. Si llamamos «h» a la hipotenusa, tendremos que la longitud «l» de los lados de los cuadraditos que construimos en cada iteración será:

$$l = h \cdot \sin 45° = h \cdot \cos 45° = h \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad m$$

y el área de cada cuadradito será:

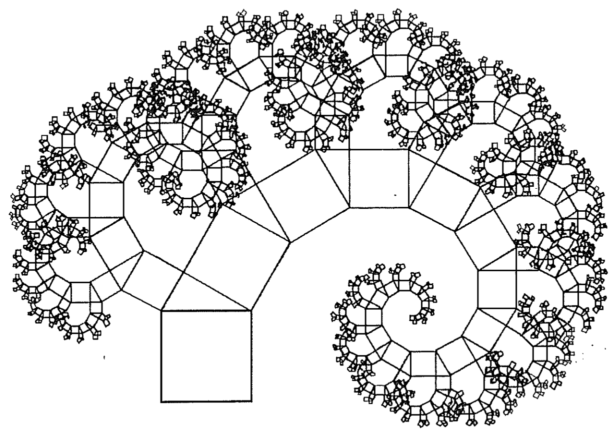
$$\text{Área} = l^2 = \left(h \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = h^2 \cdot \frac{2}{4} = \frac{h^2}{2} \quad m^2$$

Así:

Iteración	**N.° de cuadrados**	**Longitud del lado**	**Área de cda uno**
0	$1 = 2^0$	1	1
1	$2 = 2^1$	$\sqrt{2}/2$	1/2
2	$4 = 2^2$	1/2	1/4
3	$8 = 2^3$	$\sqrt{2}/4$	1/8
4	$16 = 2^4$	1/4	1/16
...	...	...	...
n	2^n	$\left(\sqrt{2}/2\right)^n$	$1/2^n$

El árbol de Pitágoras desequilibrado

1. Describe la construcción del árbol.
2. Supongamos que el triángulo que genera la construcción del árbol tiene un ángulo de 30°. Identifica cuál será la longitud de los lados (y, por tanto, el área) de cada cuadradito en el árbol construido si el cuadrado inicial tiene de área 1 m^2.



Según el enunciado, los ángulos del triángulo que va generando el árbol son de 30°, 60° y 90°. Como el cuadrado inicial tiene unos lados de longitud 1 m, si llamamos «l» y «L» las longitudes de los lados de los cuadrados pequeño y grande respectivamente que van apareciendo, entonces tendremos que:

$$l = 1 \cdot \sin 30° = 1 \cdot \cos 60° = \frac{1}{2} \text{ m}$$

$$L = 1 \cdot \cos 30° = 1 \cdot \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m}$$

Entonces, las áreas respectivas serán:

Área del cuadrado pequeño = 1/4 m^2.

Área del cuadrado grande = 3/4 m^2.

Según este resultado podemos pensar que los cuadrados que van apareciendo en el árbol en cada iteración, tienen área en relación 3:1, es decir, el pequeño es la cuarta parte del cuadrado de origen y el grande las tres cuartas partes. Hay que hacer notar que en cada iteración la suma de las áreas de los cuadrados que se generan también será 1, al igual que en la actividad anterior.

Así, tendremos el siguiente árbol que representa las sucesivas áreas:

Si ordenamos y contamos los cuadrados que tienen la misma área de menor a mayor en cada iteración, observamos la siguiente regularidad:

Iteración 0	1(1)				
Iteración 1	1(1/4)	1(3/4)			
Iteración 2	1(1/16)	2(3/16)	1(9/16)		
Iteración 3	1(1/64)	3(3/64)	3(9/64)	1(27/64)	
Iteración 4	1(1/256)	4(3/256)	6(9/256)	4(27/256)	1(81/256)
...					

Iteración n: El número de cuadrados que corresponda a una determinada área será:

$$\binom{n}{k}$$

y el área de cada uno de ellos $3^k/4^n$, donde k = 0, 1, 2,...,n, siendo n el número de la iteración.

Iteración 0	1							
Iteración 1	1/4	3/4						
Iteración 2	1/16	3/16	3/16	9/16				
Iteración 3	1/64	3/64	3/64	9/64	3/64	9/64	9/64	27/64

Los programas

Los siguientes programas están escritos en Qbasic y se pueden ejecutar en un ordenador compatible PC con sistema operativo DOS 4.0 o superior, y pantalla gráfica VGA. Para otros tipos de pantalla es posible que haya que hacer algunos cambios en la selección del modo gráfico (Screen) y en las instrucciones relativas a orígenes y escalas.

PEINE

```
' El peine de Cantor
' Nombre: PEINE
SCREEN 7: COLOR 5, 10: CLS
WINDOW (-.3, -.4)-(1.3, .8)
' La instrucción siguiente pretende ralentizar el dibujo para
que se aprecie el
' proceso de construcción del peine. Primero el mango.
FOR Z=1 TO 20000: NEXT Z
DIM A(729), B(729): A(0) = 0: A(1) = 1
B = .1: LINE (0, 0)-(1, 0): LINE -(1, -B): LINE -(0, -B): LINE -(0, 0)
' Haremos 6 iteraciones debido a la definición de la pantalla.
FOR P = 1 TO 6
   FOR I = 0 TO 2 ^ P - 1
     B(I) = A(I) / 3: B(I + 2 ^ P) = 1 - (1 - A(I)) / 3
   NEXT I
   FOR J = 1 TO 2 ^ (P + 1) - 1
     A(J) = B(J): NEXT J
' Ahora ralentizamos el dibujo de los dientes en cada iteración.
   FOR Z=1 TO 20000: NEXT Z
   FOR K = 0 TO 2 ^ (P + 1) - 1 STEP 2
     LINE (A(K), B * P)-(A(K + 1), B * P)
     LINE (A(K), B * P)-(A(K), B * P - B)
     LINE (A(K + 1), B * P)-(A(K + 1), B * P - B)
   NEXT K
NEXT P
BEEP: A$ = INPUT$(1): END
```

SIERPINSKI .

```
' El triángulo de Sierpinski
' Nombre: SIERPINSKI
SCREEN 7 : COLOR 14,9 : CLS : PI=3.141593
WINDOW (-2.6,-2.4) - (2.6,1.5)
P=5 : DIM T(P) : A=SQR(3)
FOR M=0 TO P
   FOR N=0 TO 3^M-1
      N1=N
      FOR L=0 TO M-1
          T(L)=N1 MOD 3 : N1=N1/3
      NEXT L : FOR Z=1 TO 2000: NEXT Z
      X=0 : Y=0
      FOR K=0 TO M-1
          X=X+COS((4*T(K)+1)*PI/6)/2^K
          Y=Y+SIN((4*T(K)+1)*PI/6)/2^K
      NEXT K
      U1=X+A/2^(M+1) : U2=X-A/2^(M+1)
      V1=Y-1/2^(M+1) : V2=Y+1/2^M
      LINE (U1,V1)-(X,V2)
      LINE -(U2,V1) : LINE -(U1,V1) : FOR Z=1 TO 2000: NEXT Z
   NEXT N
NEXT M : BEEP : A$=INPUT$(1) : END
```

ÁRBOL DE PITÁGORAS BÁSICO

```
' El árbol de Pitágoras
' Nombre: PITAG1
SCREEN 7: COLOR 2, 7: CLS : PI = 3.141593
WINDOW (-3.5, -2)-(4.5, 4)
DIM X(2048), Y(2048)
' Elección del ángulo
F = PI / 4: C = COS(F): S = SIN(F)
A1 = -C * S: A2 = C ^ 2: B1 = A1 + A2: B2 = -A1 + A2
C1 = B2: C2 = 1 - B1: D1 = 1 - A1: D2 = 1 - A2
X(2) = 0: Y(2) = 0: X(3) = 1: Y(3) = 0
```

```
LINE (.5, -1)-(.5, 0)
FOR M = 1 TO 9
    FOR J = 0 TO 2 ^ (M - 1) - 1
        X0 = X(2 ^ M + 2 * J): Y0 = Y(2 ^ M + 2 * J)
        X1 = X(2 ^ M + 2 * J + 1): Y1 = Y(2 ^ M + 2 * J + 1)
        U = X1 - X0: V = Y1 - Y0
        XA = X0 + A1 * U - A2 * V: YA = Y0 + A2 * U + A1 * V
        XB = X0 + B1 * U - B2 * V: YB = Y0 + B2 * U + B1 * V
        XC = X0 + C1 * U - C2 * V: YC = Y0 + C2 * U + C1 * V
        XD = X0 + D1 * U - D2 * V: YD = Y0 + D2 * U + D1 * V
        X(2 ^ (M + 1) + 4 * J) = XA: Y(2 ^ (M + 1) + 4 * J) = YA
        X(2 ^ (M + 1) + 4 * J + 1) = XB: Y(2 ^ (M + 1) + 4 * J + 1) = YB
        X(2 ^ (M + 1) + 4 * J + 2) = XC: Y(2 ^ (M + 1) + 4 * J + 2) = YC
        X(2 ^ (M + 1) + 4 * J + 3) = XD: Y(2 ^ (M + 1) + 4 * J + 3) = YD
        LINE ((X0 + X1) / 2, (Y0 + Y1) / 2)-((XA + XB) / 2, (YA + YB) / 2)
        LINE ((X0 + X1) / 2, (Y0 + Y1) / 2)-((XC + XD) / 2, (YC + YD) / 2)
    NEXT J
    FOR P = 1 TO 8000: NEXT P
NEXT M
BEEP: A$ = INPUT$(1): END
```

ÁRBOL DE PITÁGORAS DESEQUILIBRADO

```
' El árbol de Pitágoras desequilibrado
' Utilizando sistema de números binarios
' Nombre: PITAG2
SCREEN 7: COLOR 1, 4: CLS : PI = 3.141593
WINDOW (-2.5, -2)-(5.5, 4)
DIM X(2048), Y(2048)
' Elección del ángulo
F = PI / 3: C = COS(F): S = SIN(F)
A1 = -C * S: A2 = C ^ 2: B1 = A1 + A2: B2 = -A1 + A2
C1 = B2: C2 = 1 - B1: D1 = 1 - A1: D2 = 1 - A2
X(2) = 0: Y(2) = 0: X(3) = 1: Y(3) = 0
LINE (0, 0)-(1, 0): LINE -(1, -1): LINE -(0, -1): LINE -(0, 0)
FOR M = 1 TO 9
    FOR J = 0 TO 2 ^ (M - 1) - 1
        X0 = X(2 ^ M + 2 * J): Y0 = Y(2 ^ M + 2 * J)
        X1 = X(2 ^ M + 2 * J + 1): Y1 = Y(2 ^ M + 2 * J + 1)
        U = X1 - X0: V = Y1 - Y0
        XA = X0 + A1 * U - A2 * V: YA = Y0 + A2 * U + A1 * V
        XB = X0 + B1 * U - B2 * V: YB = Y0 + B2 * U + B1 * V
        XC = X0 + C1 * U - C2 * V: YC = Y0 + C2 * U + C1 * V
        XD = X0 + D1 * U - D2 * V: YD = Y0 + D2 * U + D1 * V
        X(2 ^ (M + 1) + 4 * J) = XA: Y(2 ^ (M + 1) + 4 * J) = YA
        X(2 ^ (M + 1) + 4 * J + 1) = XB: Y(2 ^ (M + 1) + 4 * J + 1) = YB
        X(2 ^ (M + 1) + 4 * J + 2) = XC: Y(2 ^ (M + 1) + 4 * J + 2) = YC
        X(2 ^ (M + 1) + 4 * J + 3) = XD: Y(2 ^ (M + 1) + 4 * J + 3) = YD
        LINE (X0, Y0)-(XA, YA): LINE -(XB, YB)
        LINE -(X1, Y1): LINE -(XD, YD)
        LINE -(XC, YC): LINE -(X0, Y0)
    NEXT J
NEXT M
BEEP: A$ = INPUT$(1): END
```

Tomás Queralt
CEP de Torrent (Valencia)
SEMCV
Al-Khwarizmi

Bibliografía

BANNON, T. J. (1991): «Fractals and Transformations», *The Mathematics Teacher*, 3, n.° 84, 178-185.

BARTON, R. (1990): «Chaos and Fractals», *The Mathematics Teacher*, 7, n.° 83, 524-529.

CAMP, D. R. (1991): «A Fractal Excursion», *The Mathematics Teacher*, 4, n.° 84, 265-275.

CIBES, M. (1990): «The Sierpinski Triangle: Deterministic versus random models», *The Mathematics Teacher*, 8, n.° 83, 622.

COCKROFT, W. H. (1985): *Las matemáticas sí cuentan*, MEC, Madrid.

FRANTZ, M. y S. LOAZARNICK (1991): «The Mandelbrot Set in de Classroom», *The Mathematics Teacher*, 3, n.° 84, 173-177.

GUZMÁN, M. y otros (1993): *Estructuras fractales*, Labor, Madrid.

HEWITT, D. (1987): «Syllabus as fractal», *Mathematical Teaching*, n.° 119, 43.

ICMI (1986): *Las matemáticas en primaria y secundaria en la década de los 90. Kuwait 1986,* Mestral, Valencia.

MANDELBROT, B. (1977): *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman & Co. Publishers, New York.

MARTÍN, M. A., M. MORÁN y M. REYES (1995): *Iniciación al caos*, Síntesis, Madrid.

ORTON, A. (1990): *Didáctica de la matemática*, MEC, Madrid.

RIPPON, P. (1991): «What exactly is a fractal», *Mathematical Teaching*, n.° 134, 46-47.

STEPHENSON, P. (1991): «"Fractals" and rationals», *Mathematical Teaching*, n.° 134, 23-26.

THOMAS, N. (1991): «Chaos in the classroom», *Mathematical Teaching*, n.° 134, 8-10