SUMA 24
febrero 1997, pp. 77-79

Fermat y Arquímedes en la clase de integrales

Mónica Escudero Baylín

IDEAS Y RECURSOS

En este artículo se incluyen dos actividades que se realizaron en clase al impartir el tema de Integración, en ellas se expone la forma mediante la cual dos matemáticos excepcionales, Arquímedes y Fermat, calcularon el valor exacto del área y del volumen de determinadas superficies y sólidos.

CON intención de romper la monotonía de la clase, cuando se abordó el tema de integración, se buscaron ejemplos históricos del calculo de una integral, y se encontraron dos que se adaptaban a dicha intención:

1.°) El cálculo del área bajo la curva $y = x^n$ desarrollado por Fermat (1601-1665).

2.°) El cálculo del volumen del paraboloide de revolución desarrollado por Arquímedes (287-212 a.C.).

Mantener la atención y el interés del alumnado no es nada fácil. Lo que se puede afirmar es que los temas históricos, despiertan la curiosidad del alumnado en general: la forma de trabajar de los científicos, su forma de ser, los sucesos que les rodearon, sus costumbres, sus rencillas, las repercusión que tuvieron sus investigaciones, etc., les da una diferente concepción de las matemáticas.

Esta es una exposición muy escueta, en la práctica real se apoyó su desarrollo en trasparencias, procurando durante toda la exposición hacer continuas aclaraciones y relatar numerosas anécdotas. (Afortunadamente ambos matemáticos se prestan a ello.)

Los alumnos a veces se ríen, a veces se cansan, también se sorprenden.

Cálculo del área bajo la curva $y = x^n$, desarrollado por Fermat

Fermat se propuso y obtuvo el valor exacto del área bajo la curva $y = x^n$ en el intervalo [0, a] (figura 1).

El área bajo la curva se puede calcular aproximadamente tomando una partición en el intervalo [0, a] y levantando los rectángulos tal como se indica en la figura 2.

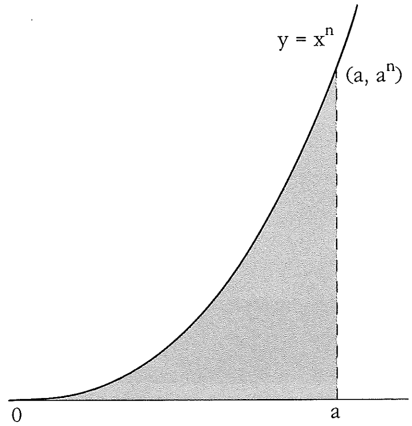

Figura 1

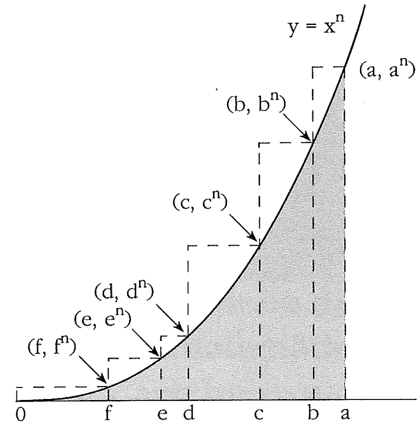

Figura 2

Sea A el área bajo la curva que es aproximadamente igual a la suma de las áreas de los rectángulos, por tanto:

$A \simeq (a-b)a^n + (b-c)b^n + (c-d)c^n + (d-e)d^n + (e-f)e^n + (f-0)f^n$

Para obtener el área exacta Fermat construye la siguiente partición (figura 3) del intervalo [0, a]:

$$a,\ aE,\ aE^2,\ aE^3, \ldots\ (E < 1)$$

que es una progresión geométrica de razón $E < 1$.

El área de los respectivos rectángulos resulta así:

$(a - aE)a^n,\ (aE - aE^2)a^nE^n,\ (aE^2 - aE^3)a^nE^{2n},\ (aE^3 - aE^4)a^nE^{3n}, \ldots$

que es una progresión geométrica de razón $E^{n+1} < 1$. Por tanto:

$A \simeq$ suma de las áreas de los rectángulos.

$A \simeq$ suma infinita de una progresión geométrica de razón < 1

$$A \simeq \frac{t_1}{1-r}$$

$$A \simeq \frac{a^n(a-aE)}{1-E^{n+1}} = \frac{a^{n+1}(1-E)}{1-E^{n+1}} = \frac{a^{n+1}}{\frac{1-E^{n+1}}{1-E}} = \frac{a^{n+1}}{1+E+E^2+L+E^n}$$

El área bajo la curva se puede igualar a la suma anterior haciendo que $E \to 1$ (paso intuitivo al límite, muy anterior a la formalización del concepto de límite), es decir:

$$A = \frac{a^{n+1}}{1+1+1+L+1}$$

$$A = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

es decir, lo que en notación moderna escribimos:

$$\int_0^a x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

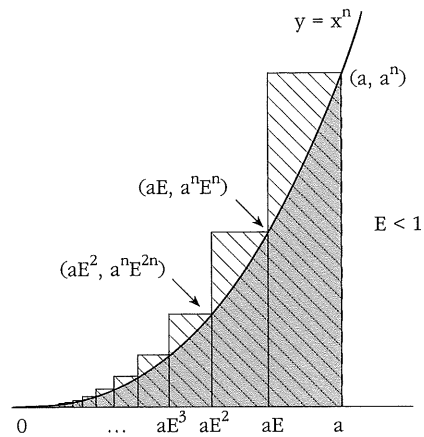

Figura 3

Cálculo del volumen del segmento recto de paraboloide de revolución desarrollado por Arquímedes

Esta demostración mucho más moderna que la anterior y verdaderamente genial, es la que utilizó Arquímedes para demostrar que el volumen de segmento recto de paraboloide de revolución es la mitad del volumen del cilindro circunscrito (figura 4).

Se quiere advertir, como en su día se hizo en clase, que para desarrollar la demostración se utiliza la geometría

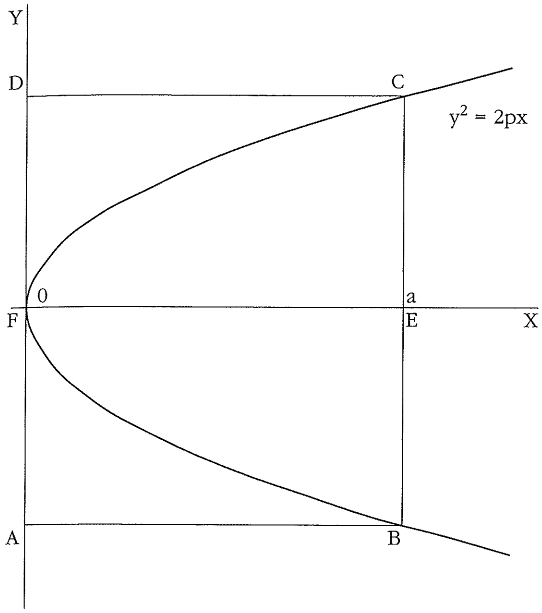

Figura 4

analítica, una herramienta muy posterior en el tiempo, pero que resulta asequible para los alumnos puesto que se había abordado anteriormente.

Para la demostración, Arquímedes divide el eje del paraboloide EF = a en *n* partes iguales, y construye cilindros inscritos y circunscritos, tal como se indica en la figura 5.

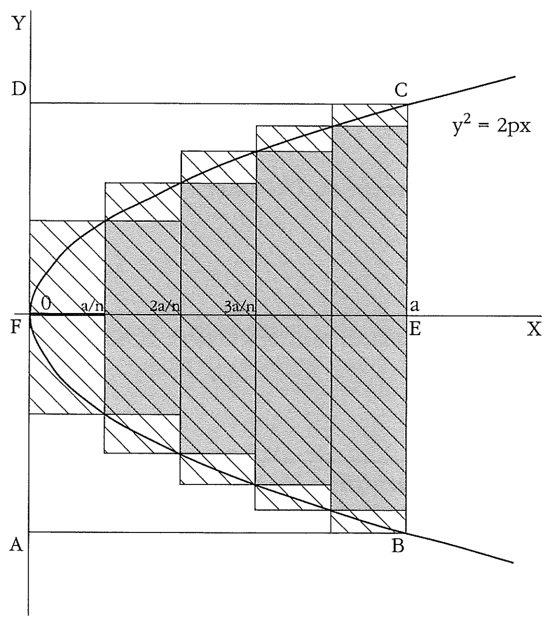

Figura 5

Mónica Escudero
IFP Islas Filipinas
Madrid
SAEM Thales

Los pasos de la demostración son los siguientes:

1) Demuestra que:

$$\frac{V_{\text{cilindro}}}{V_{\text{sólido circunscrito}}} < 2$$

en efecto:

$$\frac{V_{\text{cilindro}}}{V_{\text{sólido circunscrito}}} = \frac{2\pi p a^2}{2\pi p \frac{a^2}{n^2} + 4\pi p \frac{a^2}{n^2} + 6\pi p \frac{a^2}{n^2} + \mathrm{L} + n\pi p \frac{a^2}{n^2}} =$$

$$= \frac{2\pi p a^2}{2\pi p \frac{a^2}{n^2}(1+2+3+\mathrm{L}+n)} = \frac{n^2}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n^2}{\frac{n^2+n}{2}} < \frac{n^2}{\frac{n^2}{2}} = 2$$

2) Demuestra que (la demostración es análoga a la anterior):

$$\frac{V_{\text{cilindro}}}{V_{\text{sólido circunscrito}}} > 2$$

3) Demuestra que:

$$V_{\text{sólido circunscrito}} - V_{\text{sólido inscrito}} = V_{\text{última rodaja}} = 2\pi p \frac{a^2}{n^2}$$

(Como se aprecia claramente en el dibujo, los miembros del sólido inscrito son iguales a los contiguos del sólido circunscrito, y se van eliminando todos término a término a excepción del último. Una demostración analítica puede obtenerse de forma muy sencilla).

4) Finalmente:

Como la diferencia del punto 3) anterior, puede hacerse menor que cualquier número dado de antemano (axioma de Arquímedes), haciendo *n* suficientemente grande se tiene:

$$V_{\text{sólido circunscrito}} = V_{\text{sólido inscrito}} = V_{\text{paraboloide}}$$

De la desigualdad 1): $\dfrac{V_{\text{cilindro}}}{2} \leq V_{\text{paraboloide}}$

De la desigualdad 2): $\dfrac{V_{\text{cilindro}}}{2} \geq V_{\text{paraboloide}}$

De ambas desigualdades: $\dfrac{V_{\text{cilindro}}}{2} = V_{\text{paraboloide}}$

O también: $V_{\text{cilindro}} = 2V_{\text{paraboloide}}$

Bibliografía

BOYER, C. B. (1992): *Historia de la matemática*, Alianza Editorial, Madrid.

COLLETTE, J. P. (1985): *Historia de las matemáticas*, Siglo XXI, México.

ARQUÍMEDES (1966): *El método*, EUDEBA, Buenos Aires.

JERONE KEISLER, H. (1976): *Elementary Calculus*, Weber & Schmidt Incorporated, Boston.