SUMA 22
junio 1996, pp. 63-69

El álgebra lineal y la calculadora gráfica. Una experiencia en bachillerato

Luis Millán García

IDEAS Y RECURSOS

La unidad didáctica referida a álgebra lineal suele ser tratada en la mayoría de los libros de texto con un enfoque fundamentalmente referido a destrezas, dejando un poco de lado su aspecto más investigador e innovador. Con esta experiencia pretendemos mostrar cómo es posible compaginar ambos aspectos, utilizando como instrumento de apoyo la calculadora gráfica. Los resultados han sido francamente interesantes y nos permiten albergar esperanzas de que en un futuro cercano, el estudio de matrices pueda ser enfocado hacia un punto de vista más relacionado con su aplicación práctica.

La experiencia que se llevó a cabo, tuvo lugar en el curso 1994/95 con los alumnos de 2.° curso del Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud. Para poder desarrollarla, los alumnos dispusieron durante todo el curso de una calculadora gráfica Texas Instruments, modelo TI-82.

El objetivo de la experiencia era comprobar que el trabajo con álgebra lineal, que habitualmente quedaba hipotecado en su aspecto más investigador por la necesidad de cálculos farragosos y por la dificultad de trabajar con matrices de orden mayor que 4, podía desarrollarse con una mayor ambición sin, por ello, quedar desprovisto de su aspecto «mecánico».

En coherencia con el Diseño Curricular de Bachillerato, todo el enfoque del bloque de álgebra lineal se hizo a través de la resolución de problemas, que pusieran de manifiesto la ventaja que la utilización de la calculadora tiene en su resolución. No significa en absoluto que las destrezas necesarias para el trabajo con matrices y sistemas de ecuaciones se dejen de lado sino que, una vez dominados los conceptos y las estrategias, la calculadora gráfica nos da pie a trabajar en una línea más acorde con los objetivos planteados para el bachillerato.

El trabajo del alumno no es sólo calcular la multiplicación de las matrices, sino traducir un texto en un modelo matemático e interpretar los resultados.

Desarrollo de la experiencia

Mediante unos problemas de introducción, que dan lugar a sistemas de ecuaciones lineales, se llega a la definición de matriz. Con la calculadora gráfica no hay ningún problema en editar matrices, así como las operaciones con ellas: suma, multiplicación por un escalar, multiplicación, potenciación y cálculo de la matriz inversa. Los menús relativos al álgebra lineal son pocos y, por tanto, en este aspecto no hubo grandes dificultades de aprendizaje.

Lo curioso es que hechos como la necesidad de que en la multiplicación de matrices se cumpla una determinada condición o el de que sólo existan determinantes para matrices cuadradas fueran descubiertos por ellos, mediante la utilización de la calculadora.

La calculadora gráfica nos permite realizar cualquier tipo de operaciones con matrices, pero también nos permite operar con filas, calcular determinantes, trasponer, etc. En este artículo se presentan unas actividades representativas del trabajo realizado en el curso mencionado.

Matrices-límites-inducción

Considera la matriz

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

a) *¿Es una matriz de probabilidad?*

b) *Calcula las potencias M^2, M^3.*

Basta con editar (introducir) la matriz y operar con ella. Es conveniente tener la precaución de trabajar en modo fracción para que los resultados sean significativos.

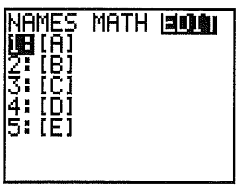


Figura 1

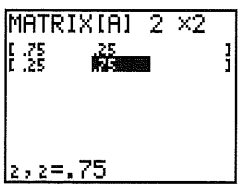


Figura 2

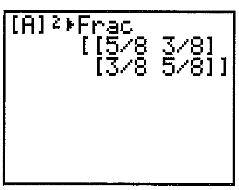


Figura 3

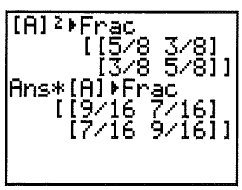


Figura 4

c) *Completa la matriz y generaliza el resultado para la potencia n-ésima de la matriz M.*

(Utilizando la calculadora y después de varias potencias más, se llegó a dos resultados distintos).

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} \end{pmatrix} \qquad M^n = \begin{pmatrix} \frac{2^n + 1}{2^{n+1}} & \frac{2^n - 1}{2^{n+1}} \\ \frac{2^n - 1}{2^{n+1}} & \frac{2^n + 1}{2^{n+1}} \end{pmatrix}$$

...donde el valor de la calculadora gráfica se muestra más potente es en todo el proceso relativo al estudio del rango de una matriz y a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

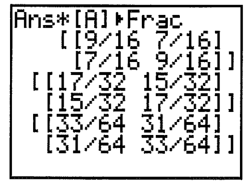


Figura 5

d) *Calcula lim M^n cuando n tiende a infinito.*

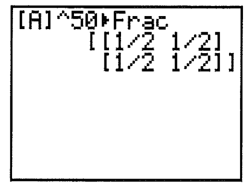


Figura 6

Pero donde el valor de la calculadora gráfica se muestra más potente es en todo el proceso relativo al estudio del rango de una matriz y a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Sería un tanto pesado mencionar todo el proceso que la calculadora desarrolla para aplicar el método de Gauss o la regla de Cramer (mucho más rápido, sin embargo, que el modo manual). Sin embargo, una estrategia para la resolución que muy a menudo no se utiliza por la complejidad del proceso operativo es la siguiente:

Si en AX = B, despejamos X, nos queda

$$X = A^{-1} \cdot B$$

La actividad propuesta fue la referida a continuación, en el siguiente apartado.

Ecuaciones matriciales

Para las ecuaciones matriciales siguientes, determina si hay solución y calcúlala cuando sea posible:

$$a)\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Proceso de resolución:

a) Como sabemos que X = $A^{-1}\cdot B$, editamos A y B.

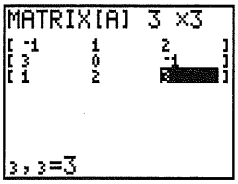


Figura 7

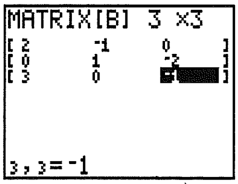


Figura 8

Efectuamos el producto $A^{-1}\cdot B$.

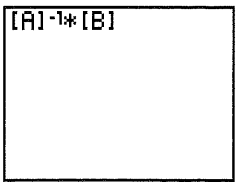


Figura 9

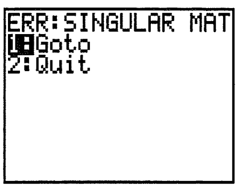


Figura 10

La sorpresa fue mayúscula, ya que no habíamos hablado de determinante de una matriz. La conclusión obtenida por los alumnos en ese momento era:

«Si no existe la matriz inversa de A, el sistema no tiene solución»

b) Si repetimos el proceso:

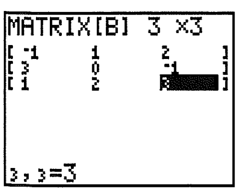


Figura 11

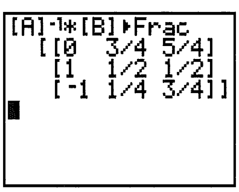


Figura 12

La sorpresa fue mayúscula, ya que no habíamos hablado de determinante de una matriz. La conclusión obtenida por los alumnos en ese momento...

Actividades de investigación con matrices

Para poder ver el interés que el trabajo con matrices puede suponer en su relación con otros campos de la realidad científico-social, las actividades que tratamos fueron las siguientes:

Vectores-matrices-probabilidad

Un vector fila de n componentes p = $(p_1, p_2,\ldots, p_n)$ se denomina un *vector de probabilidad* si todas sus componentes son no negativas y además la suma de sus componentes es igual a 1.

a) *Al lanzar una moneda, podemos considerar el vector de probabilidad p = (1/2, 1/2). Al lanzar un dado el vector de probabilidad asociado es ....*

b) *Si p= (1/4, 1/3, x) es un vector de probabilidad. calcula x.*

Una matriz cuadrada n x n es una *matriz de probabilidad* si cada una de sus filas es un vector de probabilidad.

c) *¿Cuáles de las siguientes matrices son matrices de probabilidad?*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 & -0,1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,5 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$$

d) *Si colocamos un ratón en una caja con tres compartimentos como la de la figura. y no disponemos de más información, podemos suponer que el ratón escoge cualquier puerta al azar y con la misma probabilidad.*

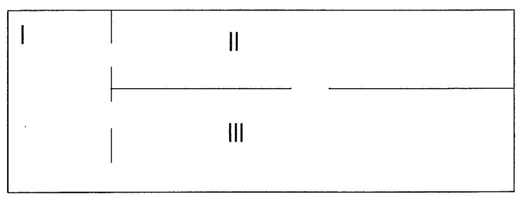


Figura 13

El paso del compartimento I al II tiene una probabilidad de 1/3, lo escribiremos p_{12}=1/3, ¿cuánto vale p_{21}? Podremos escribir en forma de matriz 3x3 todas estas posibles transiciones (cambios de estado en este ejemplo cambio de compartimento).

(A partir de este momento, la calculadora gráfica apoya muchísimo el trabajo investigador)

e) *Hay una propiedad que relaciona los vectores y las matrices de probabilidad.*

«Si p es un vector de probabilidad con n componentes y P es una matriz de probabilidad nxn, entonces p.P es un vector de probabilidad».

Pon algún ejemplo y comprueba esta propiedad. ¿Sabrías demostrar este resultado?

f) *Escribe dos ejemplos de matrices de probabilidad ¿Será cierto que su producto es una matriz de probabilidad? Investígalo.*

g) *¿Será cierta la siguiente propiedad:*

«Si M es una matriz de probabilidad, entonces M^2, M^3,... son matrices de probabilidad»

Movimientos migratorios

En la urbe de Megápolis los estudios realizados acerca de los movimientos de la población indican que el 15% de los habitantes de la ciudad se muda cada año a los suburbios y que el 10% de los habitantes de los suburbios se muda cada año a la ciudad. Si la población de Megápolis estaba repartida en 1989 de forma que el 60% vivía en la ciudad y el resto en los suburbios se pide:

a) *¿Cuál será la proporción de los habitantes en la ciudad en 1990?*

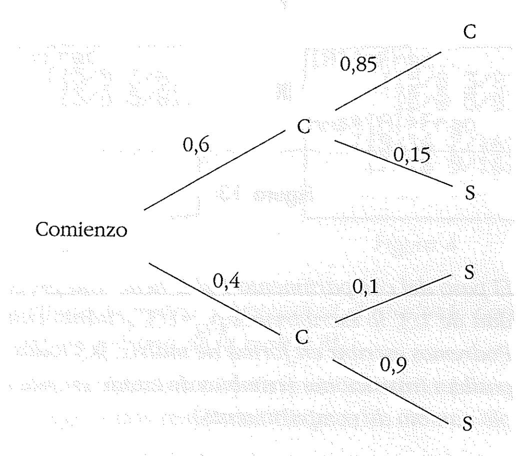
b) *Calcula la probabilidad de vivir en los suburbios en 1990.*

c) *Calcula la probabilidad de vivir en la ciudad en 1991 y la probabilidad de vivir en los suburbios en 1991.*

Comentarios:

Como los alumnos ya habían trabajado anteriormente con diagramas en árbol y con probabilidad, la mayoría enfocaron el problema en esa línea de trabajo.

En efecto, si consideramos el diagrama de árbol:



P(habitar en la ciudad en 1990) = 0,6x0,85 + 0,4x0,1 =

P(habitar en los suburbios en 1990) = 0,6x0,15 + 0,4x0,9 =

Como los alumnos ya habían trabajado anteriormente con diagramas en árbol y con probabilidad, la mayoría enfocaron el problema en esa línea de trabajo.

En estos momentos varios alumnos se dieron cuenta de que podía ser interesante trabajar con una matriz (matriz de transición) y disponer los cálculos utilizando el estado inicial E_1 y la matriz de transición T. Así al efectuar el producto de matrices $E_1 \cdot T$ obtendremos un vector con las probabilidades de vivir en la ciudad en 1990 y de vivir en los suburbios en 1990. Esto es el estado de proporciones de 1990.

	Ciudad	Suburbios
Ciudad	0,85	0,15
Suburbios	0,10	0,90

Surgió el problema del estado inicial, pero muy pronto se planteó que bastaba con considerar una matriz o vector fila, (0'6, 0'4).

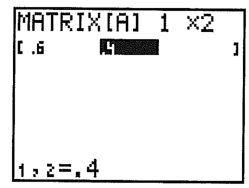


Figura 14

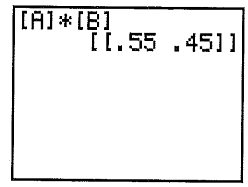


Figura 15

Hasta este punto, la utilización de la calculadora gráfica, parece un poco superfluo, ya que los productos que surgen son sencillos, pero ¿y si vamos generalizando?

Nota: Para que los resultados sean significativos, merece la pena dar los resultados con tres decimales.

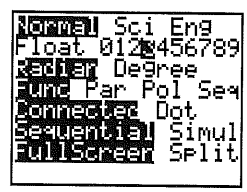


Figura 16

d) *Calcula la probabilidad de habitar en la ciudad en 1999.*

(Basta con ir generalizando el proceso)

```
  [[.550 .450]]
Ans*[B]
  [[.513 .488]]
  [[.484 .516]]
  [[.463 .537]]
  [[.447 .553]]
  [[.436 .564]]
```

Figura 17

Puede ser un buen momento para hablarles de las *cadenas de Markov.* Así para el año 2000, las probabilidades correspondientes a vivir en la ciudad y a vivir en los suburbios se podrá calcular efectuando el producto de matrices

$$E_1 \cdot T^{2000-1989}$$

(¿Por qué?)

```
[A]*[B]^11
  [[.408 .592]]
```

Figura 18

e) *¿Se alcanzará alguna proporción estacionaria o estable en el transcurrir de los años?*

Si hacemos transcurrir, por ejemplo, 50 años:

```
[A]*[B]^50
  [[.400 .600]]
```

Figura 19

Supongamos que las proporciones estacionarias fueran (x, y), con x + y = 1, entonces se verificará (x, y) T = (x, y). T la matriz de transición. (¿Por qué?).

Calcula x,y e interpreta el resultado.

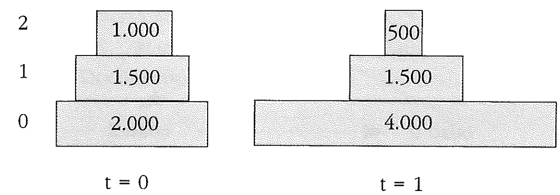
La teoría de las cadenas de Markov demuestra que se alcanza un estado estacionario independientemente del estado inicial de partida. En nuestro caso era el de la proporción en 1989, (0'6, 0'4), pero la proporción estacionaria sería la misma si el estado inicial hubiese sido (0'2, 0'8), por ejemplo. Compruébalo.

e) *La matriz de transición T, ¿es una matriz de probabilidad?*

Pirámide de población

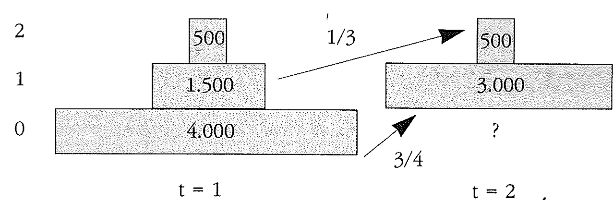
Al cabo del tiempo la distribución de la edad de los habitantes de un país varía. Es conocido el fenómeno de envejecimiento de la población. Las pirámides de población pueden representar los cambios de forma clara. ¿Qué ocurrirá en el año 2050? ¿Es posible hacer predicciones sobre el futuro a partir de pirámides conocidas?

Una estrategia importante consiste en estudiar en primer lugar un ejemplo bastante más sencillo, pero no absurdo. Supongo que dentro de un área del trópico vive una especie de insectos. La distribución de la población es fluctuante. Para los dos años siguientes se tiene:

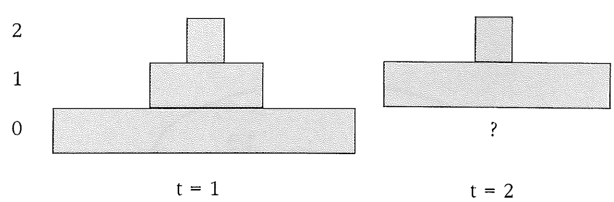


¿Es posible construir la pirámide para el año t = 2?

Es una pregunta muy abierta y, sin duda, dará lugar a una discusión. Es necesario suponer algo sobre la mortalidad y la natalidad. Imaginemos que los porcentajes de muerte de los grupos de edad no varían. Entonces todos los ancianos (edad 2) mueren; para el grupo de mediana edad la probabilidad de muerte es 2/3; para los jóvenes es 1/4.

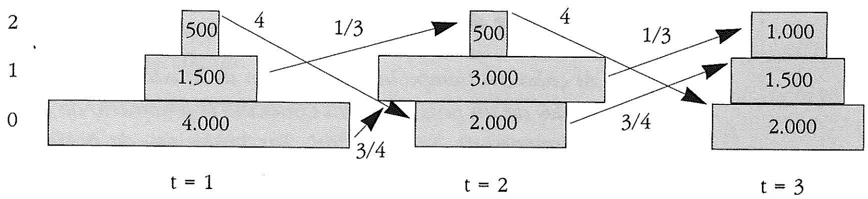


La última pirámide ya necesita una base y la pregunta es: ¿qué generaciones producen los jóvenes? ¿qué sabemos sobre la reproducción?



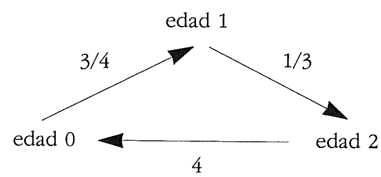
La teoría de las cadenas de Markov demuestra que se alcanza un estado estacionario independientemente del estado inicial de partida.

Podemos hacer otra suposición: sólo los ancianos producen insectos nuevos. Podemos concluir que una pareja de insectos tiene una media de 8 hijos, pues el factor de reproducción por anciano es de 4. Ahora podemos hacer predicciones:



Es sorprendente que la pirámide original vuelve a repetirse.

Partiendo de otra pirámide y suponiendo que los porcentajes de mortalidad y natalidad no varían, se puede esperar un movimiento periódico también. Observa el grafo de transición:



La matriz de transición para un año es:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Para dos años es:

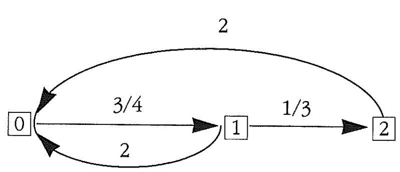
$$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para tres años es:

$$T^3 = \begin{pmatrix} 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La propiedad $T^3 = I$ causa la periodicidad. Si los insectos son menos fértiles, por ejemplo, el factor de reproducción es 2, tendremos $T^3 = (1/2) \cdot I$ y la consecuencia sería la extinción.

Si cambiamos el grafo, por ejemplo:



Usando la calculadora, los alumnos pueden investigar si una población se extinguirá o crecerá explosivamente.

La matriz es ahora:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Y es en estos momentos cuando la calculadora gráfica o el ordenador nos pueden ayudar tremendamente. En clase, no se llegó más que a analizar algunos años.

Usando la calculadora, los alumnos pueden investigar si una población se extinguirá o crecerá explosivamente.

La matriz de transición es ahora:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 0 \\ 2 & 0 & 1/3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Les resultó curioso el cambio de criterio al dar la matriz de transición).

Y si partimos de una población de 6.000 insectos en cada edad, los resultados que vamos obteniendo realizando la multiplicación iterativa: BTT..., donde B es la matriz 1x3 que en cada momento nos da la población, nos encontraríamos:

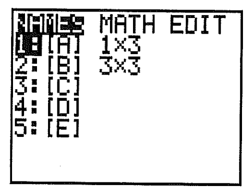


Figura 20

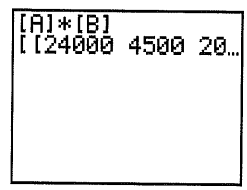


Figura 21

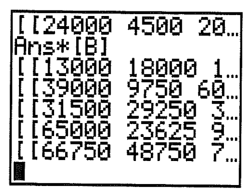


Figura 22

De lo que deducimos la siguiente tabla:

t = 0	t = 1	t = 2
6.000	6.000	6.000
24.000	4.500	2.000
13.000	18.000	1.500
39.000	9.750	6.000
31.500	29.250	3.250
65.000	23.625	9.750

Si continuamos el proceso (cosa sencilla de hacer con la calculadora gráfica), nos encontramos además con la sorpresa de que la proporción entre los grupos de edad no cambia; la distribución de la edad es estable.

Aproximadamente los porcentajes finales son 59,42; 32,62 y 7,96.

Luis Millán
IB Figueras Pacheco
Alicante.
Sociedad de Matemáticas
Al-Khwarizmi

Conclusiones

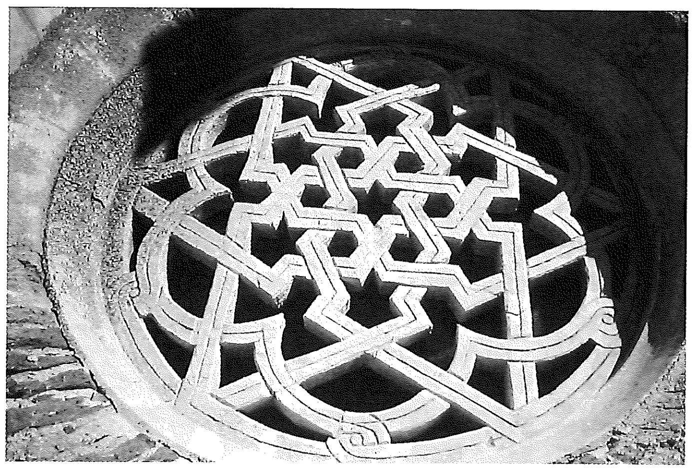
La experiencia resultó muy positiva, tanto desde el punto de vista técnico, ya que la posibilidad de que cada alumno dispusiese de su propia calculadora hizo que se familiarizaran con el uso de menús, teclado, etc., como desde el punto de vista del desarrollo de la unidad didáctica, ya que permitió trabajar unas actividades que en condiciones normales hubiera sido muy difícil llegar a plantear.

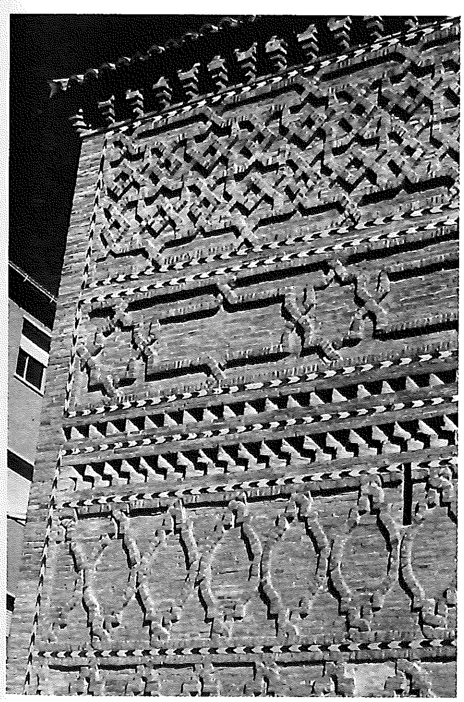
Por otra parte, hubo un aspecto que merece destacarse. Es el cambio que supone la utilización de la calculadora gráfica en lo referente a las actividades propuestas para el proceso evaluador de los alumnos. El tiempo utilizado en cálculos puede dedicarse a hacer más hincapié en las situaciones que pueden dar lugar al trabajo con matrices.

Bibliografía

KINDT, M. (1993): «Matemática discreta como preparación a las Ciencias Sociales», en *Aspectos didácticos de Matemáticas,* 4, ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza, 123-154.

SAVALL, J. V.: *Matrices, operaciones, aplicaciones e interpretación,* Documento CEP Alicante.





Geometría mudéjar
Iglesia de Tobed (Zaragoza).
Siglo XIV
(Fotos: F. Villarroya)