SUMA 22
junio 1996, pp. 59-62

La calculadora gráfica en análisis

Enrique Salinas Butrón

IDEAS Y RECURSOS

En este artículo se pretende hacer ver a los alumnos que el uso de una calculadora gráfica ayuda a comprender el rápido crecimiento de la función exponencial.
Por otra parte, en la actividad del cálculo de un límite indeterminado, podemos observar cómo el uso de la calculadora nos permite justificar la necesidad de la descomposición factorial de polinomios para obtener este tipo de límites, ya que la calculadora, debido a que utiliza un número finito de cifras decimales, puede llegar a introducir errores de bulto.

La experiencia se llevó a cabo con alumnos de 1.° del nuevo Bachillerato de Ciencias, y dado que la amplitud del bloque de Análisis (que abarca en este curso desde el concepto de función hasta el concepto de derivada y su interpretación geométrica, así como su relación con el crecimiento de una función), no permite incluir actividades que abarquen todo el desarrollo del mismo, paso a exponer dos de ellas que me han parecido más interesantes.

Actividades

Comparando crecimientos

¿Qué crece más rápidamente, la función $f(x)=2^{x/2,5}$ o la parábola $y=100x^2$?

Esta pregunta que parece un poco hecha al azar, surgió en clase después de estudiar la función exponencial.

Los ejemplos elegidos en el enunciado, lo fueron por los alumnos y surgieron de manera natural. La función exponencial apareció al intentar resolver la siguiente actividad:

Cierta clase de algas, llamada Clorella, se reproduce doblando su número en dos horas y media. Al cabo de otras dos horas y media vuelve a doblar su número y, así, sucesivamente. De este modo, si la cantidad inicial de clorella es de 1 kg, ¿cuántos habrá dentro de 5 horas? ¿y de 10 horas? ¿y de 100 horas? ¿Con qué velocidad se reproducen las algas?

Al resolver esta actividad, la función obtenida fue $y=2^{x/2,5}$ y, además, los alumnos se dieron cuenta de que la función exponencial crece rápidamente. Pero, ¿cómo de rápidamente? ¿Más rápido que una recta? ¿Más rápido que una parábola? Estas preguntas dieron lugar al siguiente debate de clase:

Alumnos: Seguro que crece más rápido que una recta

Profesor: ¿Que cualquier recta?

Alumnos: ...Sí, porque las rectas siempre crecen lo mismo al tener la pendiente constante y, por muy grande que sea ésta, la exponencial llegará un momento que la sobrepasará.

Profesor: ¿Y más rápido que una parábola?

Alumnos: Dependerá de la parábola.

Profesor: ¿Por ejemplo?

Entonces los alumnos eligieron el ejemplo de la exponencial que acababan de estudiar y buscaron una parábola que a ellos les dio la impresión que crecía muy rápidamente: $y = 100x^2$.

El hecho de que dispusiéramos de calculadora gráfica en la clase de matemáticas, nos permitió abordar el problema de la siguiente manera: comenzamos introduciendo en el editor de funciones de la calculadora ambas gráficas, eligiendo la escala de la forma en que se ve a continuación.

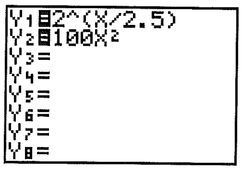

Figura 1a

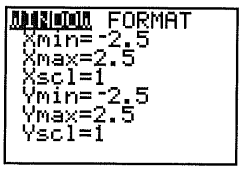

Figura 1b

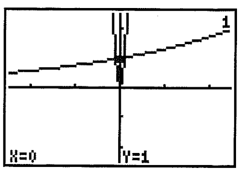

Figura 1c

Se observa que la parábola aparenta crecer mucho más rápidamente. Así que los alumnos pensaron que ellos tenían razón. Sin embargo, en este momento se hizo necesario explicar qué pretendíamos decir al preguntar *¿qué función crece más rápidamente?*

Hecha la pregunta de esa forma, ¿bastaría con mirar la gráfica en el intervalo en que la hemos representado [-2'5, 2'5], o deberíamos ver qué ocurre para valores más grandes de x?

En este momento recurrimos a un símil deportivo:

Profesor: Imaginemos que cada una de las funciones es un corredor de fondo. ¿Qué pretendemos?:

a) Saber cuál de los dos es más rápido en un tramo del recorrido.

b) Saber cuál de los dos es más rápido en todo el recorrido.

...los alumnos eligieron el ejemplo de la exponencial que acababan de estudiar y buscaron una parábola que a ellos les dio la impresión que crecía muy rápidamente...

Acordamos entonces que la respuesta a la primera pregunta es la que ellos habían dado: en el intervalo [-2'5, 2'5] crece más rápidamente la parábola que la función exponencial.

La pregunta del profesor era casi obvia :

Profesor: Pero, ¿«pillará» la gráfica de la función exponencial a la de la parábola más adelante, es decir, para valores de x más grandes?

Alumnos Si vemos la gráfica, parece que no será así, porque la función exponencial está muy por debajo y además su crecimiento es más lento.

Profesor: ¿Y cómo podríamos asegurarnos de que verdaderamente es así?

Alumnos: Obteniendo valores de cada función para valores cada vez más grandes de x. Es decir... obteniendo una tabla de cada función. Eso resulta fácil hacerlo con la calculadora.

Definimos en la calculadora las funciones $y_1=2^{x/2,5}$ e $y_2=100x^2$, y algunos alumnos comenzaron a dar valores grandes a x. De pronto un alumno vio que si a x le daba el valor 1.000 en la tabla de la función exponencial se obtenía como resultado ERROR, mientras que la otra función valía 10^8. La pregunta por parte del profesor era casi obligada:

Profesor: ¿A qué creéis que es debido que la calculadora nos dé un mensaje de ERROR para la función exponencial?

Alumnos: ¿...? Porque no se podrá calcular ese valor.

Profesor: ¿A qué será debido? Acaso x=1000 no pertenece al dominio de la función? ¿No se podrá calcular $2^{1000/2,5}=2^{400}$*?*

Alumnos: ¿...?

Profesor: ¿Qué hemos de hacer para calcular 2^{400}*? ¿De qué orden de magnitud será el número que resulte? ¿Será grande, muy grande,...?*

Alumnos: ¡Ya sé qué está pasando!, dijo uno de ellos. Lo que ocurre es que el número es tan grande que «no le cabe a la calculadora».

Esto nos dio pie para que pensaran en la magnitud de los números que se iban obteniendo con una y otra función, y utilizamos la calculádora gráfica para buscar un intervalo de valores de x en el que la función exponencial pase de tener valores menores que la parábola a tener valores mayores. Obtuvimos entonces estas tablas de valores:

X	Y_1	Y_2
0	1	0
1	1.3195	100
2	1.7411	400
3	2.2974	900
4	3.0314	1600
5	4	2500
6	5.278	3600

X=0

Figura 2a

X	Y_1	Y_2
0	1	0
10	16	10000
20	256	40000
30	4096	90000
40	65536	160000
50	1.05E6	250000
60	1.68E7	360000

X=0

Figura 2b

Una vez localizado un intervalo en el que el valor de la función exponencial está por encima del valor de la parábola, podemos afinar un poco más, obteniendo la tabla de forma manual en la calculadora, por ejemplo, dando los valores que se indican a continuación:

X	Y_1	Y_2
40	65536	160000
45	262144	202500

X=45

Figura 3

Queda entonces claro, sobre la tabla, que la función exponencial pasa a tomar valores mayores que la parábola. Pero podemos verlo gráficamente si modificamos la escala elegida al principio (ver figuras 1 y 2) de la siguiente forma:

WINDOW FORMAT
Xmin=40
Xmax=45
Xscl=1
Ymin=60000
Ymax=260000
Yscl=10000

Figura 4

...y utilizamos la calculadora gráfica para buscar un intervalo de valores de x en el que la función exponencial pase de tener valores menores que la parábola a tener valores mayores.

Vemos entonces que ambas gráficas se cortan en dicho intervalo:

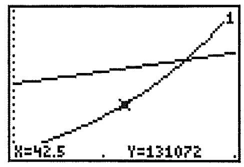

Figura 5

Si además queremos calcular el punto en que ambas curvas se cortan, la calculadora nos permitiría hacerlo fácilmente. Podemos verlo en la siguiente figura:

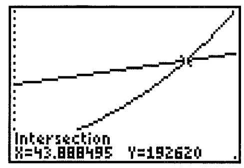

Figura 6

En esta actividad, el uso de la calculadora gráfica resulta tremendamente eficaz, porque en un principio resulta engañoso, y la conclusión que se obtiene al final es tremendamente clara para todos los alumnos, ya que ven que lo que les parecía tan claro al principio, no era así en modo alguno.

Un límite indeterminado

Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

Podemos utilizar la calculadora gráfica para obtener este límite, y para ello, definimos la función

$$y_1 = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

y de forma manual, obtenemos su tabla para aquellos valores cercanos a x=1, tanto por la derecha como por la izquierda. Son las tablas 7a y 7b que aparecen a continuación:

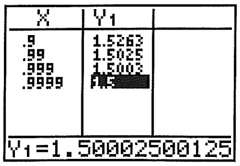

Figura 7a

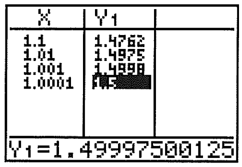

Figura 7b

Observando las tablas, parece claro que dicho límite será 1,5.

Al intentar obtener dicho límite con la calculadora gráfica, en principio todo parecía normal, pero se dieron dos situaciones curiosas, por parte de dos alumnos (un alumno y una alumna para ser más exactos):

- La alumna dio directamente a x el valor 0,9999999, con lo cual, la calculadora da como valor de la función $Y_1 = 0$, como puede verse en la tabla siguiente:

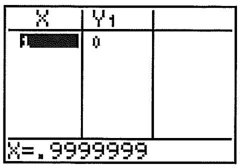

Figura 8

- El alumno intentó obtener dicho límite a partir de la gráfica de la función, desplazándose con el cursor en la zona de la gráfica próxima al valor de x=1, para lo cual utilizó la opción ZOOM tantas veces como creyó necesario, obteniendo unas gráficas tan raras como las que representadas en las figuras 9a-9d, a las que también adjuntamos las escalas utilizadas.

Como podemos observar, esta gráfica es totalmente irregular y no se corresponde con la realidad.

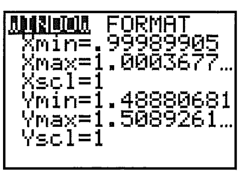

Figura 9a

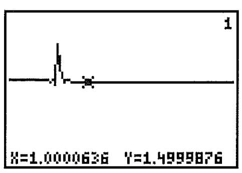

Figura 9b

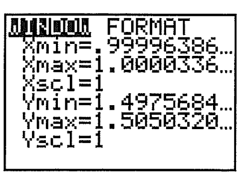

Figura 9c

Figura 9d

...en algunos casos se hace necesario utilizar la descomposición factorial y simplificar todo lo posible, para evitar errores, ya que los problemas que se observan se deben a las aproximaciones que utiliza la calculadora...

Las preguntas no se hicieron esperar:

¿A qué se debe este comportamiento?

¿Falla la calculadora, o es que el límite no es 1,5?

Gracias a esto, vimos que en algunos casos se hace necesario utilizar la descomposición factorial y simplificar todo lo posible, para evitar errores, ya que los problemas que se observan se deben a las aproximaciones que utiliza la calculadora, para valores de x cercanos a 1.

Para comprobar esto último, definimos tres funciones: $y_1 = x^3\text{-}3x+2$ (que corresponde al numerador), $y_2 = x^3\text{-}x^2\text{-}x\text{-}1$ (denominador) e $y_3 = y_1/y_2$. Podemos observar entonces que la calculadora da para x = 0.9999999 el valor de $y_1 = 0$ y de $y_2 \neq 0$. Estas aproximaciones son las que hacen necesaria la descomposición factorial y la posterior simplificación para poder calcular el límite pedido. (Ver figuras 10a y 10b).

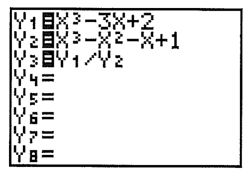

Figura 10a

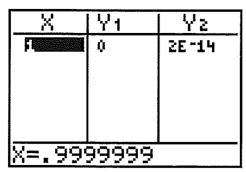

Figura 10b

Esta actividad resultó interesante, porque también les hizo ver que en ocasiones pueden superar a la calculadora que, por tratarse de una máquina, sólo puede operar con un número finito de cifras decimales y eso, en ocasiones como ésta, produce errores que pueden dar lugar a conclusiones equivocadas, por lo que se hace necesario utilizar el álgebra de polinomios (su descomposición factorial).

Enrique Salinas
IB Figueras Pacheco
Alicante.
Sociedad de Matemáticas
Al-Khwarizmi