SUMA 21
febrero 1996, pp. 81-87

# Papel pericial de las matemáticas. Los repartos

Lina María Cecilia Gámiz
Pablo Flores Martínez

IDEAS Y RECURSOS

¿Hay un matemático en la sala..?
*Les Aventures d'Anselme Luturlu,*
Jean-Pierre Petit

Con objeto de contextualizar la proporcionalidad, hemos planteado en diversos niveles de enseñanza de las matemáticas, el clásico problema de la herencia de camellos. En este artículo presentamos la solución y las reflexiones que ha realizado sobre el problema una estudiante para profesora de matemáticas de secundaria. Estas reflexiones nos han permitido profundizar sobre el significado matemático de reparto y sobre el papel pericial de las matemáticas.

En las matemáticas de enseñanza primaria y secundaria se suelen estudiar los repartos como aplicación de las propiedades y cálculos proporcionales. Los múltiples problemas relacionados con herencias, pagos, mezclas y aleaciones, grifos, jornales, etc. nos han servido para contextualizar la proporcionalidad directa o inversa. Los profesores estamos convencidos de que en estas situaciones se ha requerido una utilización pericial de las matemáticas, lo que da lugar a que el matemático se convierta en un Salomón que establece criterios objetivos de reparto.

Esta labor pericial de la matemática se restringe al aula, ya que los repartos proporcionales, realizados en los problemas reales similares a los planteados en clase, no siempre dejan contentos a los implicados, que pueden despreciar por simplista la solución matemática. La complicación real de los problemas de reparto hace que se pongan en juego otros datos y circunstancias que no siempre son reducibles a aplicaciones lineales. Así, los repartos de terrenos no pueden hacerse por simple división de la superficie, ya que, por ejemplo, la forma del terreno puede introducir aspectos no repartibles (acceso a un camino, orografía del terreno, etc.) (Alonso y otros, 1991). También pueden influir la vegetación del terreno o la conveniencia o no de partirse para poder edificar. Una herencia compuesta por una casa, un coche y los muebles sólo admite un reparto proporcional si se traduce en dinero y se reparte éste, con la consiguiente pérdida de la integridad de los bienes que los herederos quisieran conservar.

Recientemente, la revista *Muy Interesante* presenta un artículo de un matemático y un sociólogo, quienes se ocupan de la forma de repartir entre dos personas, tres, cuatro, etc., tartas y objetos reales, de manera que todos ellos se sientan satisfechos (Hively y Sardón, 1995). También está de actualidad el reparto del tiempo de publicidad gratuita a los partidos políticos en tiempo de elecciones, o el de los minutos dedicados a cada partido en los noticiarios.

En vista de la dificultad de afrontar en clase de matemáticas estos repartos, los profesores seguimos haciendo uso de los problemas tradicionales para hablar de repartos proporcionales. Pero la introducción del debate en clase, como forma de validar la resolución de problemas, vuelve a poner en evidencia lo incompleto de los procedimientos estándares de resolución.

En este artículo vamos a referirnos a problemas típicos de reparto, y cómo estos problemas han sido resueltos en diferentes niveles de enseñanza. Un enunciado que ha suscitado diversas respuestas, y ha llegado a interesar a los alumnos por la validez de cada una de ellas, se refiere al reparto de los gastos en una oficina. Por ejemplo:

Un abogado, un gestor y un contable comparten una oficina. El abogado la utiliza 5 días por semana, el gestor 3 y el contable 2. El alquiler semanal de la oficina es de 12.000 pts. ¿Cuánto debe pagar cada uno?

La expectativa del profesor al plantear este problema es que los alumnos hagan un reparto proporcional, y efectivamente, algunos estudiantes lo resuelven sin dudar sumando días, dividiendo el precio entre la suma de días y multiplicando esta cantidad por el número de días que asiste cada uno. Esta respuesta tiene la ventaja de que la suma de lo que pagan los tres es 12.000 pts. y que las proporciones relativas entre las cantidades pagadas es la misma que existe entre los días que emplean la oficina (el abogado paga 5/3 de lo que paga el gestor, etc.).

Al plantear este problema en 1.° de BUP, algunos alumnos me preguntaron por el número de días en que coincidían dos o tres de los inquilinos. Esta pregunta, aparentemente improcedente, me hizo reflexionar sobre la interpretación que hacían los alumnos de las condiciones del problema y de los criterios de reparto. Sólo entonces caí en la cuenta de que el papel pericial del que se arropa el profesor de matemáticas choca a veces con la realidad de la situación. Pero, además, observé que, en general, el grupo de alumnos aceptaba como equitativas otras formas de reparto, en las que se consideraba que cada uno debería pagar menos el día que coincidía con otros que si iba solo.

Este problema lo he planteado también en cursos de formación inicial de profesores, tanto a estudiantes para profesor de enseñanza primaria, como a futuros profesores de matemáticas de enseñanza secundaria. En estos tres ámbitos han surgido cuestiones similares y, aunque en el caso de los estudiantes de los últimos cursos de la licenciatura de matemáticas la disposición inicial fue resolverlo por el reparto proporcional, no rechazaron de plano otras soluciones e interpretaciones posibles.

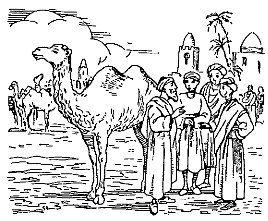

Ilustración del «problema de los camellos» que aparece en *Aritmética Segundo grado.* Editorial Luis Vives, Zaragoza, 1955.

Una situación similar se planteó con un problema típico, que ha tenido diversos enunciados: el *problema de los camellos:*

Un señor deja en herencia a sus tres hijos, 11 camellos. En su testamento manifiesta su voluntad de que el hijo mayor reciba la mitad de su fortuna, el segundo un cuarto de la misma y el tercero un sexto. ¿Cuántos camellos le corresponden a cada hijo?

Como no se pueden partir los camellos, el notario pide prestado un camello al vecino. De esta forma junta 12 camellos, la mitad de los cuales, 6, corresponden al hijo mayor, la cuarta parte, 3 camellos, corresponden al segundo hijo, y 2 camellos, un sexto de 12, corresponden al pequeño. Se han repartido así 6 +3 + 2 = 11 camellos, con lo que se puede devolver el camello prestado. ¿Cómo es posible que sobre este camello al hacer el reparto?

Al plantear este problema, mi expectativa, como profesor, es que los alumnos descubran que el reparto previsto por el difunto no es exhaustivo.

He planteado este problema también en los tres ámbitos descritos: primero de BUP, primero de Magisterio y formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Se obtuvieron respuestas diversas. La primera reacción, de los alumnos de 1.° de BUP y algunos de Magisterio, fue el aceptar el reparto como perfecto, ya que: se repartían los 11 camellos, no tenía que intervenir el carnicero y se respetaban los criterios del padre. Algunos se limitaron a considerar que lo entendían, ya que habían comprendido que 6 es la mitad de 12, etc. Otros se extrañaban de un reparto en el que sobra justamente lo prestado, pero no llegaban a encontrar la razón. Los más aventajados de BUP y Magisterio, así como todos los estudiantes de la licenciatura de matemáticas, sumaron las fracciones y mostraron la incompletitud del reparto propuesto.

Sin embargo, una profesora de matemáticas de los cursos de formación propuso una solución original a la que había llegado junto con su hermano, graduado social. La naturaleza de la solución y las reflexiones que realizaron me ha parecido tan interesante que le sugerí a la autora que las generalizara y las escribiera para su publicación. El texto que aparece a continuación refleja este razonamiento de la profesora en formación. Posteriormente, establecemos unas conclusiones en relación con los repartos y a las soluciones propuestas.

## El problema de los camellos

Este tipo de problemas «con truco» no dejan de ser curiosos e intrigantes para muchas mentes matemáticas y otras «no tan matemáticas». En este caso, resulta un tanto extraño el hecho de que haga falta pedir prestado un camello para poder repartir y, luego, sobre justamente ese camello. Es cierto que mediante este procedimiento se reparte toda la herencia y se supone que todos quedan conformes... ¿o no?

Socialmente, cabría plantearse si se ha respetado realmente la voluntad del difunto. Si no fuera así, alguno de los hermanos podría protestar. Pero ocurre que en este particular reparto todos salen ganando, porque se llevan un poco más de lo que les corresponde (6 camellos es más de la mitad de 11 camellos, etc.). Así, todos quedan contentos. Sin embargo, alguno podría plantearse si sus hermanos han ganado más o menos que él.

En teoría, las matemáticas deberían dar respuesta a cualquier problema de reparto. Entonces, habrá que justificar de algún modo el que los camellos se hallan distribuido de esa forma.

Estas son algunas de las reflexiones que surgieron al afrontar este problema. Primeramente, llegué a la conclusión de que las fracciones de la herencia propuestas por el padre no sumaban el total, que es la respuesta que se pretende obtener de los alumnos. Así, se explicaba el hecho de que al pedir un camello y realizar las divisiones correspondientes con doce camellos, sobrara uno. Es decir, como

*Este tipo de problemas «con truco» no dejan de ser curiosos e intrigantes para muchas mentes matemáticas y otras «no tan matemáticas».*

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{11}{12}$$

si tomamos estas proporciones de cualquier cantidad, siempre va a sobrar 1/12 de esa cantidad. En particular, para 11 camellos se tendría:

$$\frac{11}{12}+\frac{11}{4}+\frac{11}{6}=11\times\frac{11}{12}=\frac{121}{12}$$

Si tomamos un camello prestado, efectivamente se reparten los 11 camellos y sobra 1 (que es un doceavo de 12):

$$\frac{12}{2}+\frac{12}{4}+\frac{12}{6}=6+3+2=11$$

Llegados a este punto, yo pensaba que el problema no estaba totalmente resuelto, que había que dar una respuesta más concreta sobre si el reparto final era justo o no. Fue entonces cuando se lo planteé a mi hermano, que tampoco quedó satisfecho con la respuesta anterior y, entre los dos, empezamos a discutir y a reflexionar sobre lo que ocurría en este reparto. Llegamos así a la conclusión de que era «relativamente justo», tal como pone de manifiesto la formalización matemática de este razonamiento, desarrollado a continuación.

En principio, no se reparte la herencia como quiere el padre, puesto que esto es imposible sin que intervenga el carnicero. Además, ¿quién se lleva lo que sobra de la herencia? La solución está en intentar dividir el total de la herencia respetando en lo posible los deseos del padre.

Veamos primero cuánto le correspondería exactamente a cada hermano:

1.°: 11/2 = 5 + 1/2, 5 camellos y 1/2 de camello.

2.°: 11/4 = 2 + 3/4, 2 camellos y 3/4 de camello.

3.°: 11/6 = 1 + 5/6, 1 camellos y 5/6 de camello.

Como 11/2 + 11/4 + 11/6 = 121/12, sobraría

$$11-\frac{121}{12}=\frac{11}{12}$$

de un camello o, lo que es lo mismo, un doceavo de la herencia. Lo más justo sería ahora dividir esta cantidad restante en la proporción especificada por el padre. De este modo, al primer hermano le correspondería (1/2)x(11/12), al segundo (1/4)x(11/12) y al tercero (1/6)x(11/12), además de lo que tenían (podemos apreciar que les faltaba justamente 1/2, 1/4 y 1/6 a cada uno para completar un camello, pero éstas son proporciones de 1, y no de 11/12, que es lo que sobra). En total, se tiene:

$$1.^{\circ}:\ 5 + \frac{1}{2} + \frac{11}{24} = 5 + \frac{23}{24}$$

$$2.^{\circ}:\ 2 + \frac{3}{4} + \frac{11}{48} = 2 + \frac{47}{48}$$

$$3.^{\circ}:\ 1 + \frac{5}{6} + \frac{11}{72} = 1 + \frac{71}{72}$$

Pero la herencia aún no se ha repartido del todo, puesto que, de los 11/12 sobrantes, sólo se han distribuido

$$\frac{1}{2}\times\frac{11}{12} + \frac{1}{4}\times\frac{11}{12} + \frac{1}{6}\times\frac{11}{12} = \frac{121}{144}$$

Quedan todavía

$$\frac{11}{12} - \frac{121}{144} = \frac{11}{144}$$

por repartir (un doceavo de 11/12).

Reiterando este proceso, vemos que siempre va a sobrar un doceavo de lo que se reparte, si lo hacemos según la fórmula inicial del testamento. Es fácil comprobar por inducción que en el n-ésimo reparto sobran $11/12^n$:

Para n=1, repartimos 11 camellos y sobran 11/12.

Supongamos que la n-ésima vez sobran $11/12^n$. Entonces, en la (n+1)-ésima vez hay que repartir dicha cantidad.

Así:

$$\frac{1}{2}\times\frac{11}{12^n} + \frac{1}{4}\times\frac{11}{12^n} + \frac{1}{6}\times\frac{11}{12^n} = \frac{11}{12}\times\frac{11}{12^n}$$

y sobran

$$\frac{11}{12^n} - \frac{11^2}{12^{n+1}} = \frac{11}{12^{n-1}}$$

Observamos que, cuando n tiende a infinito, $11/12^n$ tiende a cero. Así, en un número infinito de pasos, se repartiría el total de la herencia de la manera adecuada. Veamos cuánto le correspondería a cada hermano, suponiendo realizado este reparto en sus infinitos pasos:

$$1.^{\circ}:\ \frac{11}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{11}{12} + \frac{1}{2}\times\frac{11}{12^2} + \ldots = \frac{11}{2}\left(1 + \frac{11}{2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{12^3} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{11}{2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{12}} = \frac{11}{2}\times\frac{12}{11} = 6$$

$$2.^{\circ}:\ \frac{11}{4} + \frac{1}{4}\times\frac{11}{12} + \frac{1}{4}\times\frac{11}{12^2} + \frac{1}{4}\times\frac{11}{12^3} + \ldots = \frac{11}{4}\times\frac{12}{11} = 3$$

$$3.^{\circ}:\ \frac{11}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{11}{12} + \frac{1}{6}\times\frac{11}{12^2} + \frac{1}{6}\times\frac{11}{12^3} + \ldots = \frac{11}{6}\times\frac{12}{11} = 2$$

*La idea de «infinito actual» presente en este razonamiento no es fácilmente comprensible por personas no matemáticas.*

Al primero le corresponderían justamente 6 camellos, al segundo 3 y al tercero 2. Por tanto, el reparto que se ha efectuado es *el que sería justo, después de un número infinito de pasos*. Podemos observar, por otro lado, que se conservan las proporciones relativas (el primero se lleva el doble que el segundo y el triple que el tercero, etc.).

La idea de «infinito actual» presente en este razonamiento no es fácilmente comprensible por personas no matemáticas. Mi hermano hizo un comentario curioso al respecto: según él, tal reparto era imposible de realizar, puesto que nosotros no podemos concebir el infinito como algo real; sólo podemos aceptarlo como justo si «creyéramos en el infinito», de la misma forma en que se tiene fe en Dios. Esto me hizo reflexionar sobre el concepto de infinito, que si a veces es difícil de comprender incluso para un matemático, más aún lo es para los que no lo son. De acuerdo con esta idea, sería probablemente una ardua tarea convencer a los tres hermanos del problema de que el reparto ha sido «lo más justo posible». Pero, al menos matemáticamente, se ha llegado al fondo del asunto.

No obstante, quedaría aún una cuestión por resolver en el aspecto matemático: ¿por qué funciona el «truco» de pedir prestado un camello? Este es el recurso práctico que se emplea para solucionar el problema de una manera sencilla y rápida. Pero hay que justificarlo.

En el caso que nos ocupa, se ve claro que, como 12 es múltiplo de 2, 4 y 6, se obtienen números enteros al repartir y, además, se reparten justamente 11, que son 11/12 de 12. Por otro lado, hemos demostrado que estos números coinciden con los «justos».

Pero, si inicialmente tuviéramos un número de camellos distinto de 11, ¿cuántos tendríamos que pedir prestados para que se repartieran de la forma adecuada? ¿Y si las proporciones exigidas por el padre fuesen otras distintas?

Nos estamos planteando, como es usual en matemáticas, la posibilidad de generalización de este problema. Si consideramos una cantidad genérica $c$ de objetos cualesquiera, a repartir entre 3 personas, según unas proporciones $1/a_1$, $1/a_2$, $1/a3$, de manera que su suma sea menor que 1, podríamos seguir el mismo proceso anterior para repartir totalmente $c$ (evidentemente, $c$, $a_1$, $a_2$ y $a_3$ son números naturales):

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{\frac{m}{a_1} + \frac{m}{a_2} + \frac{m}{a_3}}{m} < 1$$

donde m= mcm $(a_1, a_2, a_3)$.

Si denominamos $s$ a la suma (que obviamente es un número entero), podemos escribir:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{s}{m}$$

La proporción sobrante es

$$1 - \frac{s}{m} = \frac{m - s}{m}$$

Por tanto, a la primera persona le correspondería:

$$\frac{c}{a_1} + \frac{c}{a_1} \times \frac{m-s}{m} + \frac{c}{a_1} \times \left(\frac{m-s}{m}\right)^2 + \ldots =$$

$$= \frac{c}{a_1} \times \left(1 + \frac{m-s}{m} + \left(\frac{m-s}{m}\right)^2 + \ldots\right) =$$

$$= \frac{c}{a_1} \times \frac{1}{1 - \frac{m-s}{m}} = \frac{c}{a_1} \times \frac{m}{s}$$

Procediendo de forma análoga, la segunda persona se llevaría $cm/a_2s$ y la tercera $cm/a_3s$.

Se ve fácilmente que la suma de las tres cantidades es c:

$$\frac{cm}{a_1s} + \frac{cm}{a_2s} + \frac{cm}{a_3s} = \frac{cm}{s} \times \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) = \frac{cm}{s} \times \frac{s}{m} = c$$

De este modo, se consigue repartir totalmente la cantidad inicial. Pero lo ideal sería que cada una de esas tres cantidades fuese un número entero, para poder resolver un caso análogo al de los camellos. Esto no siempre va a ocurrir. Únicamente será cierto si $cm$ es múltiplo de $a_1s$, $a_2s$ y $a_3s$. Para cantidades y proporciones que no verifiquen esto, no se podría resolver el problema por esta vía, sin tener que «partir» los objetos.

Busquemos, pues, condiciones para la cantidad inicial y para las proporciones del reparto. Consideremos la primera cantidad, $cm/a_1s$. Se tiene que cumplir que $a_1s \mid cm$, pero sabemos que $a_1 \mid m$, por definición. Entonces, lo que hay que imponer es que

$$s \mid c \times \frac{m}{a_1}$$

Igualmente, se ha de verificar que

$$s \mid c \times \frac{m}{a_2} \quad y \quad s \mid c \times \frac{m}{a_3}$$

Distinguimos dos casos:

1) Si $s$ es un número primo, como $s \mid c(m/a_1)$, el teorema de Euclides afirma que $s \mid c$ o $s \mid (ma_1)$. Pero $s$ no puede dividir a $m/a_1$ porque

$$s = \frac{m}{a_1} + \frac{m}{a_2} + \frac{m}{a_3} > \frac{m}{a_1}$$

luego, necesariamente, $s \mid c$. Considerando las otras dos cantidades se obtiene la misma condición. Esta condición es necesaria y suficiente, ya que

$$\text{si } s \mid c \Rightarrow s \mid c\frac{m}{a_1},\ s \mid c\frac{m}{a_2},\ s \mid c\frac{m}{a_3}$$

2) Si s no es primo, y $s \mid c(m/a_1)$, $s \mid c(m/a_2)$, $s \mid c(m/a_3)$, puede ser que $s$ no divida a ninguno de los dos factores de cada producto. Supongamos que $s$ no divide a $c$. Entonces, $s$ tiene factores primos comunes con $m/a_1$, $m/a_2$, $m/a_3$ y c. Si llamamos $p$ al producto de los factores de $s$ comunes con $c$ y $q$ al producto del resto de los factores de $s$ ($q \neq 1$, puesto que $s$ no divide a $c$), tendríamos que $s = pq$, con $p \mid c$ y $q \mid (m/a_1)$ , $q \mid (m/a_2)$ y $q \mid (m/a_3)$.

$$\text{Si } q \mid \frac{m}{a_1} \Rightarrow \frac{m}{a_1} \times a_1 = m \Rightarrow \frac{m}{q} \text{ es entero.}$$

Por otro lado

$$\text{si } q \mid \frac{m}{a_1} \Rightarrow a_1q \mid \frac{m}{a_1} \times a_1 \Rightarrow a_1 \mid \frac{m}{q}$$

Análogamente, se deduce que $a_2 \mid m/q$ y $a_3 \mid m/q$.

Pero esto es una contradicción, ya que $m/q$ sería múltiplo de $a_1$, $a_2$ y $a_3$, y $m/q < m = \text{mcm}(a_1, a_2, a_3)$. En consecuencia, se ha de cumplir que $s \mid c$.

En cualquier caso, se llega a que *c ha de ser múltiplo de s*. Es decir, la cantidad inicial a repartir debe ser divisible por el numerador de la suma de las proporciones. Esto se cumple en el caso particular de los camellos, en donde $c = 11$ y $s = 11$.

En la práctica, como ya he señalado, para hacer este reparto nos convendría saber cuántos objetos hemos de pedir prestados para dividir y obtener las cantidades adecuadas, de manera que se reparta sólo la cantidad inicial y podamos devolver lo prestado. Si notamos por *c'* a la nueva cantidad a repartir, debe verificarse lo siguiente:

$$\frac{c'}{a_1} = \frac{cm}{a_1 s} \qquad \frac{c'}{a_2} = \frac{cm}{a_2 s} \qquad \frac{c'}{a_3} = \frac{cm}{a_3 s}$$

Por estas igualdades, se tiene que

$$c' = \frac{cm}{s} = \frac{c}{s}m$$

Esto implica que *c' es múltiplo de m,* ya que c/s es un número entero, por la condición obtenida anteriormente.

El número de objetos que tendríamos que pedir sería la diferencia:

$$c' - c = \frac{cm}{s} - c = c\left(\frac{m}{s} - 1\right) = c\frac{m-s}{s} = \frac{c}{s}(m-s)$$

Es decir, el número buscado sería la diferencia entre el denominador y el numerador de la suma de las fracciones multiplicada por el número de veces que *c* contiene al numerador.

Así, en el caso de los camellos, $c' = (11/11) \times 12 = 12$ y $c' - c = 1$.

Veamos más ejemplos, variando el número de camellos y las proporciones:

1) Si $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ y $a_3 = 6$, necesitamos un *c* que sea múltiplo de 11, puesto que $1/2 + 1/4 + 1/6 = 11/12$. En este caso, $s = 11$ y $m = 12$.

Tomemos $c=2\times11=22$. Entonces, $c'=(22/11)\times12=2\times12=24$ y hay que pedir 2 camellos.

Si $c=3\times11=33 \Rightarrow c' = 3\times12 = 36$, hay que pedir 3 camellos.

Si $c=4\times11=44 \Rightarrow c' = 4\times12 = 48$, hay que pedir 4 camellos.

Se puede observar que si tomamos $c = ns$, con *n* un número natural, entonces $c' = nm$ y $c' - c = n(m-s)$, o sea, *todas las cantidades se multiplican por el mismo número.*

2) Si $a_1 = 2$, $a_2 = 5$ y $a_3 = 6$, $1/2 + 1/5 + 1/6 = 26/30$, luego $s = 26$ y $m = 30$ (no debemos simplificar la fracción porque el denominador dejaría de ser múltiplo de 2, 5 y 6, y no saldrían números enteros).

Tomemos distintos valores para *c*:

$c = 26 \Rightarrow c' = (26/26)\times30 = 30$, hay que pedir 4.

$c = 52 \Rightarrow c' = (52/26)\times30 = 2\times30 = 60$, hay que pedir 8.

$c = 78 \Rightarrow c' = (78/26)\times30 = 3\times30 = 90$, hay que pedir 12.

*El nivel de prefracción se caracteriza por la no exhaustividad de la partición o por obtener una partición desigual.*

Aquí también se aprecia claramente que c, c' y c–c' se van multiplicando por el mismo número.

En resumen, será posible resolver un problema de este tipo si *partimos de una cantidad que sea múltiplo del numerador de la suma de las fracciones, y bastará con sumar a* c *tantas veces la diferencia entre el denominador y el numerador como* c *contiene al numerador, y luego dividir según las proporciones establecidas.*

Se puede seguir un procedimiento análogo para repartir una cantidad entre *n* personas, según *n* proporciones cualesquiera (considerando siempre fracciones irreducibles) con suma menor que 1. El razonamiento presenta ligeras variaciones en el caso de que algunas de las fracciones tengan numerador distinto de 1, pero las conclusiones son las mismas.

## Conclusión

Hetú y Desjardins (1978) establecen tres niveles en el dominio de las fracciones. El nivel de prefracción se caracteriza por la no exhaustividad de la partición (figura 1) o por obtener una partición desigual (figura 2).

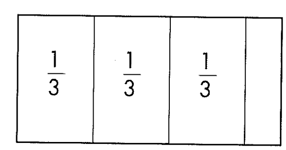


Figura 1

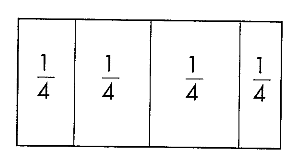


Figura 2

La proporcionalidad realiza los repartos de manera *exhaustiva, igualitaria* y *manteniendo las proporciones relativas,* con lo que salva simultáneamente tres exigencias:

- *Equitatividad de reparto* (las partes son una porción establecida de la cantidad total).
- *Exhaustividad* (la suma de las partes cubre el total a repartir).
- *Proporciones relativas* (los trozos resultantes guardan entre sí la misma relación que las fracciones que los definen).

Cuando el reparto tiene unas condiciones que impide la proporcionalidad, la matemática también puede ayudar a realizarlo salvando alguna de estas tres exigencias. Este estudio matemático es el que lleva a Hively y Sardón (1995) a proponer el reparto de «Salomón», que no es exhaustivo (ya que en el caso de repartos entre más de dos personas tienen que prescindir de porciones del total).

En el caso de los camellos, o bien el reparto no es exhaustivo (si se considera que el total a repartir son los 11 camellos más el prestado), o bien no respetan las proporciones (ya que 6 no es la mitad de 11, 3 no es la sexta parte, etc). Sin embargo, si se respeta la relatividad de las proporciones: 6 es el doble de 3, como 1/2 es el doble de 1/4, etc.

Sin embargo, el reparto propuesto por Lina mantiene la proporcionalidad relativa y le da exhaustividad en relación a la población de 11 camellos, aunque no respete las proporciones. Observamos, pues, que esta forma de entender el reparto ha mejorado la interpretación que hacemos en clase al plantear el dilema. Da un paso en la utilización de métodos matemáticos para la resolución de problemas de reparto, en aquellos casos en que es imposible hacerlo mediante la proporcionalidad. La generalización realizada le da una mayor profundización matemática.

Las reflexiones que se han suscitado en Lina son dignas de tener en cuenta en el contexto de formación de profesores por dos razones: primero porque muestran el papel que ha jugado el análisis de situaciones escolares (de reparto) para generar esas reflexiones; segundo, porque nos ha ayudado a criticar el papel pericial (reparto como proporcionalidad) de la matemática, llevándonos a profundizar en otros tipos de empleos de la matemática.

**Lina M.ª Cecilia**
Profesora de Secundaria
en formación
**Pablo Flores**
Departamento de Didáctica
de la Matemática,
Universidad de Granada

## Bibliografía

ALONSO, C. y otros (1991): «Análisis de cuatro problemas», *Epsilon*, n.° 21, 89-127.

HETU, J. C. y M. DESJARDINS (1978): *L'activité mathematique dans l'enseignement des fractions*, Presses de l'Université de Quebec.

HIVELY, W. y A. SARDÓN (1995): «La fórmula de Salomón», *Muy Interesante*, n.° 171, 52-55.

PETIT, J. P. (1980): *Le Géométricon*, Belin, París.

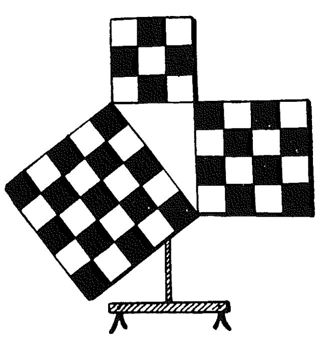

Fig. 65. — Aparato para la comprobación experimental del teorema de Pitágoras

N.° 340.—D. C. P.—(Fig. 65). — **Aparato para la comprobación experimental del teorema de Pitágoras.** — En madera, excelente presentación, 20 pesetas.

Núm 341. — D. C. P. — **Caja para la comprobación experimental de la relación que existe entre los volúmenes del cilindro, cono y esfera.** — Los sólidos, con la probeta graduada, en estuche de madera. Precio, 24 pesetas.

Núm. 343. — D. C. P. — **Modelo para la demostración del valor de π. del arco de círculo equivalente al diámetro.** En madera, con caja estuche, 10 ptas.

Teorema de Pitágoras
*Catálogo del Material Escolar*
*de la casa Dalmáu Carles, Pla. S. A.* (Gerona, 1928)