SUMA 21
febrero 1996, pp. 55-62

Los cuadriláteros a comienzos del siglo XIX, a comienzos del siglo XX y a finales del siglo XX, ¿qué ha cambiado?

M. Pedro Huerta

ARTÍCULOS

El análisis de algunos ejemplos, extraídos de influyentes manuales escolares españoles de los siglos XIX y XX, muestra como el contenido geométrico ha estado organizado. Y esta organización ha perdurado a lo largo del tiempo, dando la sensación de ser un producto totalmente acabado que tan sólo admite la contemplación. Se muestra además cómo, desde la consideración de las posibles relaciones significativas entre los cuadriláteros, podemos organizar los conceptos implicados de manera alternativa, siendo ésta más propicia a la actividad matemática.

Introducción

Hace ya algunos años, casi 25, en su libro *Mathematics as an Educational Task*, Freudenthal (1973) consideró conveniente introducir un capítulo que hablase sobre la geometría escolar. Lo tituló «El caso de la Geometría» (pp. 401 y ss.) y lo hizo de esta manera porque consideró que, en aquel momento, la geometría estaba siendo sometida a juicio, acusada por algunos de no ser un sistema axiomático con una estructura deductiva perfecta y que, por esta causa, debería abandonarse su enseñanza. Hablamos claro está de la geometría de Euclides, de la geometría tradicional, que durante los años y siglos anteriores había sido la *prima donna* de los programas escolares. La geometría tradicional que, según Freudenthal, estaba siendo sometida a una especie de juicio sumarísimo en el que no hubo demasiados defensores y sí una sentencia culpatoria casi predeterminada.

Ciertamente surgieron alternativas a la geometría de Euclides, los sistemas axiomáticos de Pasch y Hilbert, seguramente mucho más perfectos desde el punto de vista deductivo pero, como decía Freudenthal, lo único que se podía hacer con ellos era investigar en sus fundamentos, pero ni se podía hacer geometría *dentro* de ellos y, en cualquier caso, ni se podía enseñar la geometría *con* ellos (p. 402).

Así pues, ¿el problema era la propia geometría, sus fundamentos, o había otros problemas latentes, derivados de ellos y que dificultaban su enseñanza? Freudenthal no creyó que el problema estuviese en que la geometría no fuera lo suficientemente deductiva y que, por eso, fracasase su enseñanza, sino que el problema estaba en que la deductividad no era enseñada como reinvención, al modo socrático y que, desde luego para él, la geometría era algo más que deductividad.

Si el problema no estaba en los fundamentos, los cuales ya se veían imperfectos, ¿en qué geometría estaba pensando Freudenthal? En el nivel más alto de enseñanza, dice, la geometría es algo organizado axiomáticamente. En el nivel más bajo, la geometría es comprender el espacio: espacio vivencial del niño, en el que vive, crece y se mueve; el espacio que el niño debe aprender a conocer, explorar, conquistar, para vivir, crecer y moverse mejor en él. Esta visión de la geometría escolar entroncaba con su idea de que las matemáticas, y en este caso la geometría, debería estar atada a la realidad cuando de lo que se trata es de aprenderlas.

En los último años, el estudio de los polígonos de tres y cuatro lados, los triángulos y los cuadriláteros[1] y algunas generalidades sobre polígonos, ha constituido una parte importante del contenido de la geometría escolar elemental. Pronto los niños se encuentran con formas geométricas básicas de tres y cuatro lados que han de ser reconocidas, analizadas, en fin, estudiadas. En esta parte, desde diferentes enfoques, el objetivo ha sido, citando palabras de Vallejo (1825), «averiguar las relaciones y propiedades de la extensión[2], en cuanto terminada o figurada» (p. 2). La diferencia fundamental, en cuanto al enfoque, ha estado y está en el modo en el que se averiguan las relaciones y propiedades de una extensión figurada y, en cuanto figurada, cómo se entiende.

Pretendemos a lo largo de este artículo presentar unos cuantos ejemplos, tomados de algunos libros de texto (del siglo XIX y del siglo XX), en los que se puede observar si han existido diferencias en cuanto a la manera en la que se organiza el contenido geométrico (por razones de utilidad y comodidad hemos escogido cuadriláteros) y cómo esta organización ha perdurado con los años llegando hasta la actualidad, aun cuando es posible concebir otra forma de organizar ese mismo contenido geométrico.

Los cuadriláteros a comienzos del siglo XIX

A principios del siglo XIX y en plena discusión, por parte de los geómetras de la época, sobre la veracidad o no de algunos de los axiomas de Euclides y de la propia construcción de la geometría euclidiana, los cuadriláteros apenas ocupaban un par de páginas de un tratado elemental de geometría (Vallejo, 1825) o de un compendio general de matemáticas (Vallejo, 1840).

Definido el concepto de cuadrilátero, se introducían las clases en las que podrían encontrarse divididas las «figuras terminadas por cuatro líneas». Eran tres: el trapezoide, el trapecio y el paralelogramo, definidas por la disposición de las líneas: ninguna paralela a otra, dos paralelas entre sí y las cuatro paralelas dos a dos, respectivamente. Estas definiciones, que podrían darnos la impresión de ser cerradas y aceptadas de un modo generalizado, no lo son ni lo fueron en su día. En este sentido, recordemos lo que Vallejo cita, en un pie de página, en relación con las definiciones y nombres que él presentaba:

Develey dice que a los trapecios *se les podría llamar paralelogramos truncados o triángulos truncados.*

Mr. Leslie llama trapezoide *al cuadrilátero que tiene dos lados paralelos; y trapecio al que tiene dos de sus lados paralelos, y los otros dos son iguales aunque no paralelos.*

Con este motivo, diremos que Leslie, Legendre y Cresswell critican con mucho fundamento las definiciones que se dan en los libros de Geometría a las diversas especies de cuadriláteros; y me cabe la mayor satisfacción en ver que las que yo doy, y he dado desde luego en todas mis obras, están exentas de cuantos defectos expresan dichos autores (p. 122).

Podemos ver como en esta época establecer una definición para las diferentes formas geométricas era crucial. A partir de ellas, comenzaba un razonamiento deductivo que conducía a las clasificaciones y a las proposiciones. Así, por ejemplo, dentro de las clases de paralelogramos, se presentaban el *romboide*, el *rombo*, el *rectángulo* y el *cuadrado*. Las definiciones aportadas, en nada hacían suponer posibles relaciones entre dichas clases pues estaban dadas de un modo exclusivo. Citemos, por ejemplo las del rombo, rectángulo[3] y cuadrado:

Cuando los ángulos adyacentes a un mismo lado son desiguales, e iguales los lados adyacentes a un mismo ángulos, se llama rombo, *cuando los ángulos adyacentes a un mismo lado son iguales y los lados adyacentes a un mismo ángulo desiguales, se llama* rectángulo; *y cuando los lados contiguos a un mismo ángulo son iguales, y los ángulos contiguos o adyacentes a un mismo lado también son iguales, recibe el nombre de* cuadrado (Vallejo, 1825, 122).

Por tanto, nunca un cuadrado podría ser considerado como una clase especial de rectángulo ya que el primero exigía la igualdad de lados y ángulos,

...dentro de las clases de paralelogramos, se presentaban el romboide, el rombo, el rectángulo y el cuadrado. Las definiciones aportadas, en nada hacían suponer posibles relaciones entre dichas clases pues estaban dadas de un modo exclusivo.

1 No siempre los triángulos y cuadriláteros han sido considerados como polígonos. Vallejo (1825) llama polígono a « una figura que está terminada por más de cuatro líneas» (p. 125).

2 Término utilizado por Vallejo (1825), entendiéndolo como «el espacio que ocupa un cuerpo» (p. 2).

3 Llamado por algunos en aquella época *cuadrilongo*.

mientras que el segundo exigía la desigualdad de los lados cuando éstos eran adyacentes a un mismo ángulo.

Pocas eran las proposiciones que se establecían en relación con la mencionada obtención de propiedades de las figuras. Principal y casi exclusivamente, aquellas que hacían referencia a ciertas propiedades de los paralelogramos en general.

Los cuadriláteros a comienzos del siglo XX

Cuando el enfoque en el que se inscribía la enseñanza de la geometría potenció la intuición frente a la lógica, la presentación del contenido que había de enseñarse y de estudiarse, presentó algunos matices de cambio.

Rey Pastor y Puig Adam (1928)[4] presentaban los cuadriláteros en dos lecciones. Aparte de distinguir, aunque de soslayo, cuadriláteros convexos y cóncavos, distinción que Vallejo no hizo, las lecciones se dividían en «El paralelógramo[5] y el rectángulo», como primera lección de cuadriláteros, y «El rombo, el cuadrado y el trapecio», como segunda y última lección.

Las grandes familias, paralelogramos, trapecios y trapezoides se presentaban de manera idéntica a como lo hacía Vallejo un siglo antes: tener o no lados[6] paralelos.

Las propiedades generales de los paralelogramos también se introdujeron siguiendo la misma secuencia que siguió Vallejo, aunque el lenguaje utilizado fuese más intuitivo que el de éste y las demostraciones (las que se presentaban) sin el rigor formal que en el siglo pasado se demandaba, aunque no exentas de la deductividad necesaria.

Pero algo parecía cambiar. De una parte, el lenguaje usado. De otra, lo ya comentado de las demostraciones y, finalmente, la manera de averiguar aquellas propiedades y relaciones entre las figuras de las que hablábamos en párrafos anteriores. Rey Pastor y Puig Adam (1928) introducían así el rectángulo, el rombo y el cuadrado:

Si uno de los ángulos de un paralelógramo es recto, lo serán los otros tres (por el paralelismo de lados) y el paralelógramo recibe el nombre de rectángulo (p. 100).

Si un paralelógramo tiene dos lados contiguos iguales tiene también iguales a ellos sus opuestos, los otros dos; es decir, los cuatro lados son iguales, *y el paralelógramo se llama* rombo (p. 103).

Si se construye un rombo con un ángulo recto, es decir, rectángulo, se obtiene un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados iguales y sus cuatro ángulos también iguales por ser rectos. Esta figura se llama cuadrado *y tiene,* naturalmente, *reunidas las propiedades del rombo y del rectángulo* (p. 104).

Podemos observar como, de un modo «natural», el cuadrado se presentaba como una clase especial de rombos y de rectángulos y, por tanto, nadie podría extrañarse si se hubiesen definido así las cosas: «Cuadrado es un rombo con ángulos iguales» o «Cuadrado es un rectángulo de lados iguales», por tanto, no sólo la inclusividad se presentaba como algo normal entre las diferentes clases de cuadriláteros, a diferencia de la exclusividad del siglo anterior, sino que algunas clases de cuadriláteros se podrían construir a partir de otras introduciendo alguna condición particular.

...no sólo la inclusividad se presentaba como algo normal entre las diferentes clases de cuadriláteros, a diferencia de la exclusividad del siglo anterior, sino que algunas clases de cuadriláteros se podrían construir a partir de otras introduciendo alguna condición particular.

Los cuadriláteros a finales del siglo XX

De todos es conocido el penoso estatus que se otorgó a la geometría durante la mayor parte del siglo XX y del que ya hemos hablado en la introducción. Su «degradación» escolar obligó a los renovadores curriculares del último tercio de siglo a hablar de una recuperación necesaria de la geometría y de una devolución de su estatus (no ya de privilegio como había ocurrido en siglos anteriores) como área curricular importante en la formación de los alumnos.

No obstante, la geometría no podía presentarse del mismo modo que se había hecho en el pasado. De esta forma, el papel de las definiciones, proposiciones, demostraciones, etc. tan usual en las geometrías escolares anteriores, pierde su protagonismo. El lenguaje riguroso en el que se enuncian, prácticamente desaparece. Las demostraciones dejan de tener presencia en la geometría escolar elemental; las definiciones rara vez se establecen sino que, en todo caso, se construyen. Las proposiciones se descubren en términos de propiedades, etc. Palabras como reconocer, analizar, deducir informalmente..., son de uso común en la enseñanza actual de la geometría (Corberán, Huerta y otros, 1994). El profesor puede disponer de marcos generales sobre el aprendizaje de la geometría, la teoría de los niveles de van Hiele (Corberán, Huerta y otros, 1989), por ejemplo, como punto de referencia para organizar la enseñanza. Esta teoría distingue cinco niveles

4 La primera edición es del año 1928, aunque la referencia que se cita más tarde es del año 1959.

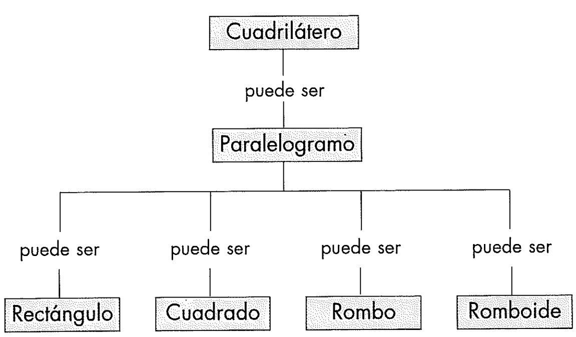
5 Hemos respetado la acentuación original de la palabra paralelógramo tal como aparece en el texto que se cita.

6 Lados ahora, líneas entonces.

jerárquicos de razonamiento[7] en los estudiantes cuando se enfrentan a tareas de geometría, que van desde la manipulación, observación y razonamiento sobre formas geométricas discretas y aisladas, en el nivel más bajo, hasta el razonamiento deductivo formal, en el nivel más alto, pasando por el razonamiento sobre las propiedades de la formas geométricas y el razonamiento deductivo informal sobre las relaciones entre las formas y sus propiedades, en los niveles intermedios. Esta forma de razonar en los estudiantes tiene implicaciones a lo hora de organizar la enseñanza de una materia que está organizada, a su vez, de una manera jerárquica.

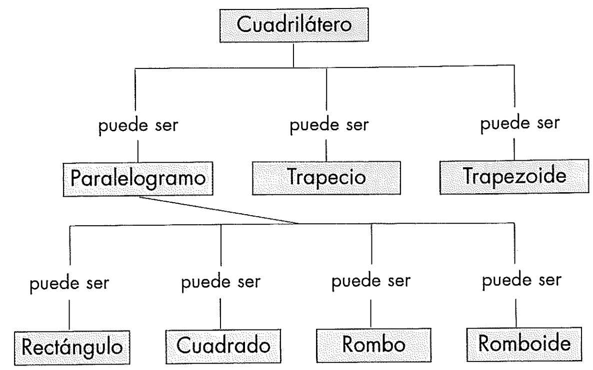
Los cuadriláteros en los libros de texto de la Enseñanza Primaria

La presentación de los cuadriláteros como clases de figuras geométricas que se incluyen unas dentro de otras, comienza, por lo general en 3.° de Enseñanza Primaria. Así, en este nivel, únicamente se consideran los cuadriláteros convexos, los cuales contienen una clase especial de cuadriláteros llamada paralelogramos que, a su vez, contiene a los cuadrados, rectángulos, rombos y romboides. Esta presentación de los primeros cuadriláteros se organiza, por tanto, del modo siguiente*:

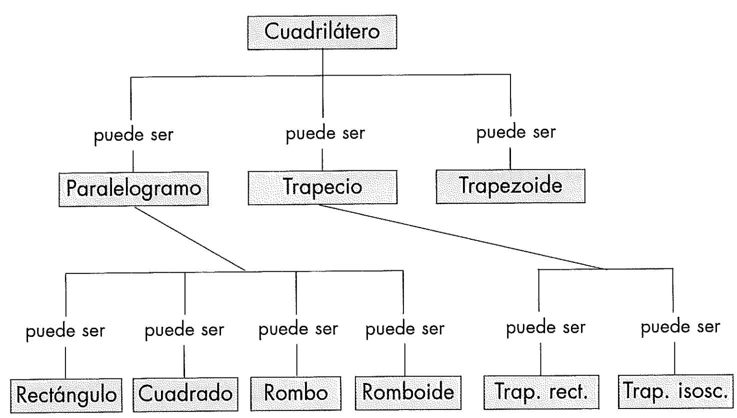


Observemos como, en esta forma de organizar los cuadriláteros paralelogramos, no aparecen relaciones entre conceptos que están en un mismo nivel jerárquico y, por lo tanto, no introduce nuevas jerarquías (¿porque así lo manda la tradición?). Ello supone que los cuadriláteros son presentados de forma exclusiva, sujetos a definiciones (en algunos casos) o ejemplos (en otros casos), que hacen imposible que puedan establecerse relaciones posibles: los cuadrados no son una clase especial de rectángulos pues éstos tienen dos lados más largos que los otros dos y el cuadrado los tienen los cuatro iguales.

En el curso siguiente suelen introducirse dos nuevas clases de cuadriláteros: los trapecios y los trapezoides, los cuales se integran en la organización anterior como clases disjuntas sin tener relación con los ya existentes (por ejemplo, tener dos pares de lados paralelos, un solo par de lados paralelos o ningún par de lados paralelos, ¿también como manda la tradición?):



La incorporación de dos nuevas subclases de cuadriláteros en el curso siguiente, el trapecio rectángulo y el trapecio isósceles, lo que provoca no es la construcción de nuevas relaciones con los cuadriláteros ya existentes, sino la inclusión en la clase de los trapecios de las dos subclases mencionadas de una manera disjunta con los ya existentes:

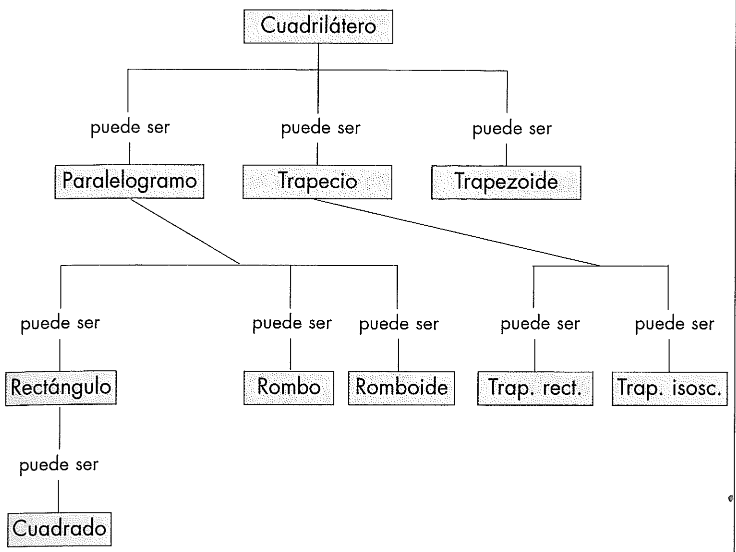


Pocos intentos hay en los libros de texto de relacionar los conceptos que están en un mismo nivel jerárquico entre sí, lo que posibilitaría la construcción de una nueva estructura jerárquica más compleja que la anterior. No obstante, hay libros de texto que definen el rectángulo como «paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos rectos», indicando a continuación que «si además tiene sus cuatro lados iguales, es un cuadrado», lo que modifica la organización de los cuadriláteros incluyendo un nivel jerárquico más. En este caso se

7 Actualmente existe bastante información sobre la teoría de niveles de van Hiele en castellano. Ver, por ejemplo, Jaime y Gutiérrez (1990).

* Hemos utilizado el nexo «puede ser» como sinónimo de «se divide en» o «se clasifica en» u otros similares, como medio de unificación de términos equivalentes. La lectura de arriba a abajo supone la inclusión de una clase de cuadriláteros del nivel (jerárquico) inferior en la/s clase/s de cuadrilátero/s del nivel superior. El no conectar dos o más clases de cuadriláteros supone la no existencia de relaciones entre ellas, es decir, ambas clases de cuadriláteros no se relacionan.

puede formar el diagrama de la figura siguiente.



Situaciones como las anteriores dan por sentado las relaciones inversas en el que el tipo de nexo que une dos conceptos pertenecientes a la familia de los cuadriláteros es, ahora, del tipo «es», lo que supone la inclusión total de una clase en otra. Relaciones éstas que no se establecen de una manera explícita por parte de los libros de texto, sino que subyacen de una manera implícita al introducir los conceptos ya organizados jerárquicamente del modo o modos señalados.

...aunque no lo mande la tradición, un trapecio puede ser un paralelogramo especial con sólo considerar que el primero pueda tener más de un par de lados paralelos.

Los cuadriláteros y sus relaciones

Si enseñar significa, en esencia, iniciar a una actividad, enseñar matemáticas (geometría) no puede consistir en mostrar al alumno un producto acabado, estático. Situar al alumno en el interior de un edificio bello, armoniosamente estructurado, y mostrarle cuáles son los mecanismos que le permitirían su recorrido y cuáles los recursos que le permitirán la corrección o incorrección de sus acciones, puede resultar un ejercicio hermoso de contemplación estética, pero si toda comprensión real supone necesariamente la reinvención por parte del sujeto del objeto de su estudio, bien poco habremos conseguido. Matematizar, organizar matemáticamente una cierta materia y sistematizar los conocimientos progresivamente construidos, va más allá de lo verbal; implica la acción comprensiva, la experimentación, el recurso a la intuición y a la inducción, en definitiva la creación (Corberán, Huerta y otros, 1989).

Tal vez, como parecen mostrar los ejemplos históricos anteriores, la tradición ha mandado en la enseñanza de la geometría. Los conceptos parece que únicamente admitan una definición y de ellas sólo puedan establecerse un tipo de relaciones. Es decir, el producto acabado y estático. Pero la enseñanza actual de la geometría debería combatir esta sensación de producto acabado y estático en el que nada haya que decirse porque todo está dicho ya. Pero ciertamente, y aunque no lo mande la tradición, un trapecio puede ser un paralelogramo especial con sólo considerar que el primero pueda tener más de un par de lados paralelos.

Relaciones entre cuadriláteros

Con estas consideraciones previas, uno se puede preguntar ¿cuántas relaciones significativas puedo considerar para los conceptos relativos a cuadriláteros mencionados más arriba? ¿Únicamente aquéllas que establecen los libros de texto?

Si enfrentamos un concepto con los restantes, en el sentido que aquí se muestra, relacionándolos mediante la inclusión de los nexos apropiados en la línea de puntos:

	....	Cuadrilátero
	....	Cuadrado
	....	Rectángulo
	....	Rombo
	....	Romboide
Trapecio	....	Paralelogramo
	....	Cuadrilátero convexo
	....	Cuadrilátero cóncavo
	....	Trapecio rectángulo
	....	Trapecio isósceles
	....	Trapezoide

aparecen 11 relaciones entre el concepto Trapecio y los once restantes conceptos. Como tenemos 12 conceptos, el resultado de las relaciones posibles es de 11x12=132. Eso significa que entre los conceptos de cuadrilátero mencionados con anterioridad es posible construir un total de 132 proposiciones del tipo «es», «no es» o «puede ser».

¿Cuántas de ellas son de las que podemos llamar significativas, es decir, del tipo «es» o «puede ser»?

Para responder a esta cuestión, es necesario que consideremos la distinción entre inclusividad y exclusividad a la hora de ver los conceptos relativos a cuadriláteros. En el primero de los casos, el número total de relaciones es de 96, de las cuales 55 son del tipo «puede ser» y 41 son del tipo «es». En el segundo de los casos, hay 52 relaciones posibles de las cuales, 26 son del tipo «puede ser» y 26 son, obviamente, del tipo «es».

Por ejemplo, y en función de cómo definamos el concepto de trapecio, podemos establecer dos clases de relaciones:

a) Las relaciones con carácter exclusivo:
   - TRAPECIO es CUADRILÁTERO.
   - TRAPECIO es CUADRILÁTERO CONVEXO.
   - TRAPECIO puede ser TRAPECIO ISÓSCELES.
   - TRAPECIO puede ser TRAPECIO RECTÁNGULO.
   - TRAPECIO ISÓSCELES es TRAPECIO.
   - TRAPECIO RECTÁNGULO es TRAPECIO.

b) Las relaciones con carácter inclusivo, que además de las anteriores, incluyen las siguientes:
   - TRAPECIO puede ser ROMBOIDE.
   - TRAPECIO puede ser PARALELOGRAMO.
   - TRAPECIO puede ser ROMBO.
   - TRAPECIO puede ser RECTÁNGULO.
   - TRAPECIO puede ser CUADRADO.
   - ROMBOIDE puede ser TRAPECIO.
   - PARALELOGRAMO es TRAPECIO.
   - ROMBO es TRAPECIO.
   - RECTÁNGULO es TRAPECIO.
   - CUADRADO es TRAPECIO.

Algunas justificaciones

Podemos justificar, a modo de ejemplo, alguna de estas relaciones, no ya sólo en términos de ejemplos, sino también en términos de propiedades deducidas a partir de las definiciones consideradas. Así, por ejemplo, definimos:

ROMBO: Cuadrilátero con lados paralelos dos a dos y lados iguales. Paralelogramo de lados iguales.

TRAPECIO: Cuadrilátero con, al menos, un par de lados paralelos.

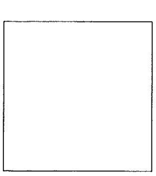
Establecemos las proposiciones:

1) TRAPECIO *puede ser* ROMBO.

2) ROMBO *es* TRAPECIO.

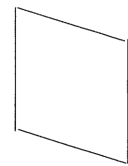
Justificación a través de ejemplos:

1) TRAPECIO *puede ser* ROMBO.



Cuadrado como ejemplo de trapecio que es rombo

2) ROMBO *es* TRAPECIO.



Ejemplo genérico de rombo que lo es de trapecio

Justificación a través de propiedades:

1) TRAPECIO puede ser ROMBO. Si A es la clase de los trapecios, A tiene, por lo menos, un par de lados paralelos. Entonces A puede tener dos pares de lados paralelos. En consecuencia A puede tener los lados iguales dos a dos, que, a su vez, pueden ser iguales. En consecuencia, A puede ser un Rombo porque puede tener los lados paralelos dos a dos y los lados iguales.

2) ROMBO es TRAPECIO. Si A es ahora un Rombo, A tiene los lados paralelos dos a dos, por lo tanto tiene más de un par de lados paralelos, por lo que A es un Trapecio.

Las relaciones del tipo «puede ser»

Decimos que una clase de cuadriláteros de nombre A «puede ser» una clase de cuadriláteros de nombre B, si tenemos uno o más de un ejemplo de los cuadriláteros llamados A que es, también, ejemplo de los cuadriláteros llamados B. Así, por ejemplo, la clase de cuadriláteros llamados Paralelogramos contiene ejemplos de cuadriláteros que son ejemplos de la clase de cuadriláteros llamados Cuadrado, lo que nos permite establecer la relación siguiente: «PARALELOGRAMOS «pueden ser» CUADRADOS». Si esta relación, entre las clases Paralelogramo y Cuadrado, tratamos de justificarla en términos de propiedades, deberemos actuar del modo siguiente: La clase PARALELOGRAMO puede definirse como: «cuadrilátero con lados paralelos dos a dos», de la que se derivan una serie de propiedades: diagonales que se bisecan, lados iguales dos a dos, ángulos iguales dos a dos, etc. Esas propiedades, que adquieren generalidad para toda la clase de los cuadriláteros llamados PARALELOGRAMOS, adquieren particularidad en las distintas subclases de los llamados paralelogramos, recibiendo, entonces, dichas subclases, nombres diferentes. Así, para el CUADRADO, las propiedades generales de los paralelogramos se particularizan en: lados iguales dos a dos se convierte en cuatro lados iguales; ángulos iguales dos a dos se convierte en cuatro ángulos iguales; diagonales que se bisecan se convierte en diagonales que se bisecan perpendicularmente, etc., permaneciendo como invariante la propiedad general lados paralelos dos a dos. Esta propiedad general compartida es la que hace que la clase menos inclusiva (aquella que tiene propiedades particulares de otras más generales), CUADRADO, sea una subclase de la más inclusiva PARALELOGRAMO y que justifique que un PARALELOGRAMO «pueda ser» un CUADRADO.

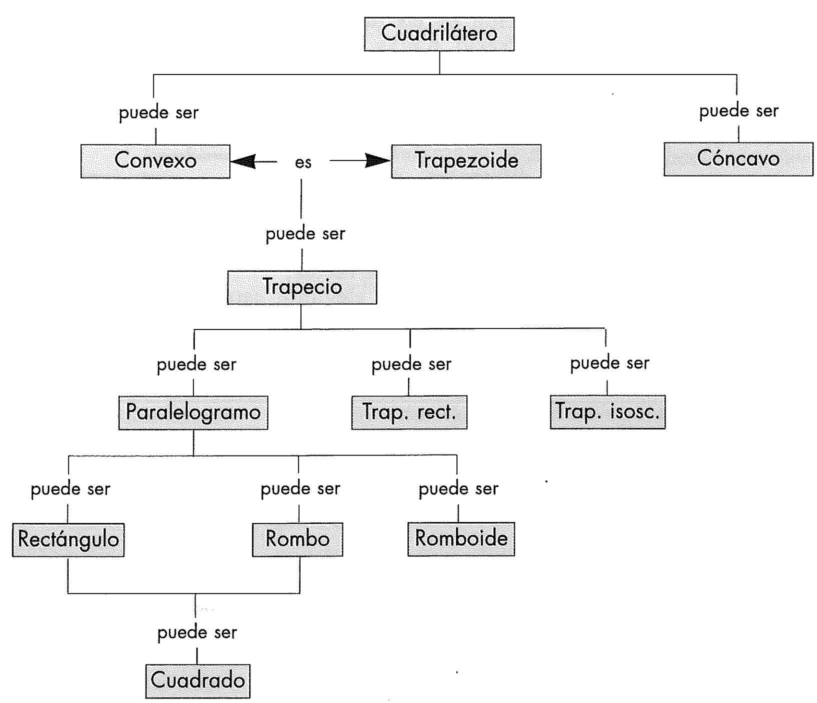
Consideremos otro ejemplo. La clase de cuadriláteros llamada RECTÁNGULO «puede ser» la clase de cuadriláteros llamada ROMBO. Para que una relación de este tipo adquiera sentido, debemos considerar las clases mencionadas en versión inclusiva. Así, en término de ejemplos, sólo sería válida en tanto que el cuadrado, como ejemplo de rectángulo, sea, a su vez, ejemplo de rombo lo cual parece no presentar demasiada dificultad. El problema está en establecer qué propiedades hacen que esta relación pueda quedar justificada. Deberemos restringirnos a la clase de rectángulos que da el ejemplo válido para establecer la relación, es decir, aquel rectángulo que tiene los lados iguales, lo que obliga a particularizar propiedades generales de los rectángulos, lados iguales dos a dos, por ejemplo, a la de su subclase, lados iguales, permaneciendo las demás intactas excepto aquellas que se derivan de esa particularización. Si por ROMBO entendemos aquel cuadrilátero con lados iguales, la relación está establecida porque hay rectángulos que tienen lados iguales (propiedad restringida) y que por tanto son rombos (propiedad general que los caracteriza). En consecuencia, decimos que RECTÁNGULO «puede ser» ROMBO porque hay una propiedad restringida de los rectángulos, lados iguales, que junto a otra u otras generales, ángulos iguales o lados paralelos dos a dos, por ejemplo, se convierten en generales del ROMBO, lados iguales, y/o particulares del ROMBO, ángulos iguales, por ejemplo.

...hemos pretendido mostrar cómo la tradición ha influido en la enseñanza de la geometría elemental.

En el primero de los casos descritos, a la relación A «puede ser» B, le sigue la relación B «es» A, con lo que la justificación es más fácil porque la particularización de la propiedad es en una de las clases, la menos inclusiva; mientras que en el segundo ejemplo, a la relación A «puede ser» B le sigue la relación B «puede ser» A, por lo que la particularización de las propiedades se produce en las dos clases de cuadriláteros que se quieren relacionar, simultáneamente.

Conclusión a modo de resumen

En este artículo hemos pretendido mostrar cómo la tradición ha influido en la enseñanza de la geometría elemental. Los ejemplos reseñados manifiestan una única organización posible de los conceptos de cuadriláteros y, por tanto, de un producto acabado del que nada puede decirse porque todo está dicho ya. Pero esta tendencia puede modificarse si se consideran otras posibilidades de organizar matemáticamente los conocimientos progresivamente construidos. ¿Por qué no considerar, por ejemplo, que los cuadriláteros convexos se organizan, desde la perspectiva jerárquica, del modo que se muestra y actuar en consecuencia?



Referencias bibliográficas

CORBERÁN, R., M. P. HUERTA y otros (1989): *Didáctica de la geometría: modelo de van Hiele*, Universitat de València. Valencia.

CORBERÁN, R., M. P. HUERTA y otros (1994): *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de van Hiele*, CIDE, MEC, Madrid.

FREUDENTHAL, H. (1973): *Mathematics as an Educational Task*, Reidel, Dordrecht, Holanda.

JAIME, A. y A. GUTIÉRREZ (1990): «Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de van Hiele», en LLINARES y SÁNCHEZ (Eds.) (1990): *Teoría y práctica de la Educación Matemática*, Alfar, Sevilla.

REY PASTOR, J. y P. PUIG ADAM (1959): *Elementos de Geometría*, Colección Elemental Intuitiva, Madrid.

VALLEJO, J. M. (1825): *Tratado Elemental de Matemáticas. Tomo primero, parte segunda: la geometría*, Madrid.

VALLEJO, J. M. (1840): *Compendio de Matemática (puras y mixtas). Tomo I*, Madrid.

M. Pedro Huerta
Departament de Didàctica
de la Matemàtica.
Universitat de València

Estuches de compases "Escolar" D. C. P.

Núm. 1750.—D. C. P.—**Estuche de compases "Escolar"** (figura 236), de metal niquelado, conteniendo compás completo de 12 cm. de largo (lápiz, tinta, medidas), mango, tiralíneas de tinta, llave y minas de recambio. Precio, 3'50 ptas.

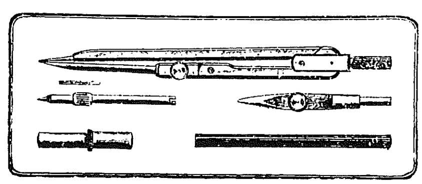


Fig. 236. - D. C. P. - Estuche compases «Escolar»

N.° 1752.-D. C. P. **Estuche de compases "Escolar"**, (fig. 237), en clase mejor, compás de 13 centímetros, con articulación en las dos piernas. Precio, 6 ptas.

N.° 1754.—D. C. P.—**Estuche de compases "Escolar" (fig. 238), de metal blanco, conteniendo 8 piezas diferentes: compás de puntas de 13 cm. largo, compás para tinta y lápiz, mango de madera, tiralíneas de tinta para rectas, llave y minas.** En elegante estuche forrado de terciopelo, 8 ptas

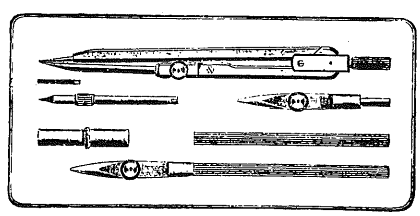


Fig. 237. - D. C. P. - Estuche compases «Escolar»

Compases
Catálogo del Material Escolar
de la casa Dalmáu Carles, Pla. S. A. (Gerona, 1928)