

# La resolución de problemas. Una revisión teórica

**José Lorenzo Blanco**

## **I**ntroducción

Desde la más remota antigüedad la actividad primordial del matemático ha sido la resolución de problemas. Aunque, como veremos más adelante, desde temprano los matemáticos se han preocupado por la naturaleza de los métodos empleados en su resolución, no es hasta la mitad de este siglo cuando, la reflexión sobre todos los parámetros que intervienen en la misma, no se ha generalizado de forma más unánime.

Convendría, antes de adentrarnos en los avatares de la *heurística* o *heurética*, como tradicionalmente se llamaba al arte de la resolución de problemas, definir de modo preciso algunos términos que vamos a emplear en esta exposición.

El estudio que realizaremos trasciende en muchos aspectos el mundo de las Matemáticas, por ello vamos a aceptar una definición de problema muy amplia, que se debe a Bransford y Stein: «Un problema es un obstáculo que separa la situación actual de una meta deseada». Consecuentemente, «resolver un problema consiste en pasar de una situación a la otra».

Las operaciones útiles para la solución de problemas se llamarán *estrategias heurísticas* y aquellas preguntas, pautas o indicaciones dirigidas a centrar la atención del resolutor sobre ciertos aspectos del problema, suelen denominarse *sugerencias heurísticas*.

Se acostumbra llamar *modelo de resolución de problemas* a una doctrina que clasifica y analiza las fases del proceso de resolución de problemas, las sugerencias y estrategias heurísticas, y los distintos aspectos de orden cognoscitivo, emocional, cultural, científico, etc. que intervienen en el proceso.

Según las Orientaciones Didácticas marcadas por el MEC para las Matemáticas de secundaria obligatoria, la resolución de problemas es uno de los ejes vertebradores del área a lo largo de la etapa, por lo que debe estar integrada como una actividad de presencia permanente en el aula. Este artículo es una mirada sobre los aspectos teóricos más relevantes de la resolución de problemas. A partir de una revisión histórica, se examinan los principales modelos propuestos en la literatura. Se completa con un análisis de cierta profundidad sobre la propuesta de Miguel de Guzmán, entendida como síntesis y paradigma de los modelos anteriores.

## Perspectiva histórica

Pappus de Alejandría en su famosa *Colección Matemática* publicada el año 320, y en su libro VII que dedicó a su hijo, incluye una serie de obras de autores anteriores con el propósito de que sirviera para adiestrar en la resolución de problemas. Introduce además unas reflexiones propias sobre los procesos de razonamiento que pueden emplearse. Es famosa su explicación del método de análisis-síntesis. Con todo ello se convierte en el primer gran estudio de heurística que conocemos.

Más de un milenio ha de sucederse para que encontremos matemáticos de talla ocupados del tema. El primero que debemos mencionar es René Descartes (1596-1650), que se propuso encontrar un método universal para la solución de problemas. Proyectó escribir unas «Reglas para la dirección de los ingenios» pero no llegó a concluirlos. A pesar de ello, tras su muerte, reuniendo fragmentos dispersos fueron editadas.

Leibniz (1646-1716) quiso escribir un libro titulado *Arte de la invención* pero nunca lo hizo. Dejó, sin embargo, a lo largo de toda su obra una serie de anotaciones en las que se traslucía su interés por las fuentes de la invención y su funcionamiento.

Hay que avanzar seguramente hasta Bernardo Bolzano (1781-1848) para encontrar una aportación de interés sobre el tema que nos ocupa. Dentro de sus trabajos de lógica dedicó gran atención a la heurística. Con un afán muy de su tiempo, pretendía más que presentar algo nuevo, asentar en términos claros las reglas y los caminos de la investigación.

No es hasta finales del siglo XIX cuando la psicología inicia el estudio sistemático de los procesos de invención. Dewey formula en 1888 un modelo de resolución de problemas que se mantuvo vigente durante mucho tiempo. Según él, las fases del proceso serían:

1. Identificación de la situación problemática.
2. Definición precisa del problema.
3. Análisis medios-fines. Plan de solución.
4. Ejecución del plan.
5. Asunción de las consecuencias.
6. Evaluación de la solución. Supervisión. Generalización.

No vamos a entrar en la descripción precisa de los modelos por evitar la reiteración de muchos aspectos que son comunes a todos. Posteriormente, realizaremos la revisión detallada de uno de ellos, que supone en cierto modo una refundición de los modelos más importantes, y en él analizaremos con detalle muchos de los conceptos que se van a ir mencionando.

Cabe, sin embargo, referirnos a una cuestión de interés. La diferencia más marcada entre los modelos propuestos

*El modelo más relevante entre los primeros propuestos se debe a Wallas en su famoso libro The Art of Thought de 1926. Muchos de los modelos propuestos después le son tributarios.*

para problemas generales y problemas matemáticos está en la inclusión o no de una fase inicial de «identificación del problema». En los modelos matemáticos no está presente, puesto que se supone que los problemas están propuestos desde el exterior y por tanto han sido previamente explicitados. Sin embargo, en otras facetas ello no sucede del mismo modo, y se hace preciso detectar y perfilar la presencia de los mismos. Podemos ilustrar esta fase con un ejemplo mencionado por Bransford y Stein.

Al parecer los hermanos Biro eran correctores de pruebas. Dedicaban mucho tiempo a la búsqueda y corrección de errores tipográficos. Para comunicar estos errores debían utilizar plumas estilográficas, y para no incrementar su número debían hacerlo con mucho cuidado y, por tanto, dedicándole mucho tiempo. Cuando identificaron su problema pusieron las bases de su famoso invento: el bolígrafo. Muchos otros habían pasado por la misma experiencia y habían pensado que era uno más de los inconvenientes de su oficio, nunca habían visto en ello un problema que se podía resolver.

El modelo más relevante entre los primeros propuestos se debe a Wallas en su famoso libro *The Art of Thought* de 1926. Muchos de los modelos propuestos después le son tributarios.

Las cuatro fases de resolución, según Wallas, serían:

1. *Preparación.* Recolección de información e intentos preliminares de solución.
2. *Incubación.* Dejar el problema de lado para realizar otras actividades o descansar.
3. *Iluminación.* Es cuando se produce la aparición de la idea clave para la solución (el famoso ajá o insight).
4. *Verificación.* Se comprueba la solución.

Como se puede apreciar es una descripción del proceso de invención más que un modelo para el análisis o la instrucción en resolución de problemas,

tendencia hacia la que se han ido decantando las propuestas posteriores.

La aparición en 1945 de un librito titulado *How to solve it* del matemático norteamericano de origen húngaro George Polya supuso el nacimiento de una nueva doctrina. A raíz de su publicación un creciente número de matemáticos, lógicos, pedagogos y psicólogos se ha ocupado del tema, asentando con categoría de ciencia independiente lo que ha dado en llamarse *heurística moderna*.

A partir de ese momento se entenderá por heurística el estudio de todas las operaciones mentales típicamente útiles en el proceso de resolución de problemas. Eso conlleva considerar cuestiones de tipo emocional, cultural, etc. que hasta entonces no se habían tenido en cuenta.

Polya basa su programa en la idea del *resolutor ideal*, esto es, el sujeto que al resolver un problema avanza linealmente desde el enunciado hasta la solución.

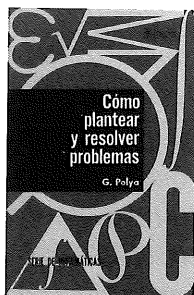
El propósito fundamental del modelo es conseguir que cualquier persona, preferiblemente con la ayuda de un tutor, logre asimilar las técnicas de resolución que se han demostrado efectivas, hasta convertirse en un buen resolutor de problemas.

Para lograr la asimilación de esas técnicas, el alumno debe conocer dos cuestiones fundamentales. La primera es que en la resolución de un problema se presentan cuatro fases, a saber:

1. Comprender el problema.
2. Concebir un plan.
  - Determinar la relación entre los datos y la incógnita.
  - De no encontrarse una relación inmediata puede considerar problemas auxiliares.
  - Obtener finalmente un plan de solución.
3. Ejecución del plan.
4. Examinar la solución obtenida.

La segunda es de índole didáctica. Según Polya el alumno aprende por

*La estructura del modelo propuesto por Polya subyace, casi literalmente, en la mayoría de los que se han presentado con posterioridad...*



*Cómo plantear y resolver problemas.*  
Polya

imitación y práctica, por lo tanto, se debe combinar la orientación del profesor con el empleo personal de las estrategias heurísticas.

La acción del primero se centra en lo que hemos llamado *sugerencias heurísticas*, una serie de preguntas del tipo: ¿qué es lo que queremos determinar?, ¿se han empleado todos los datos?, etc., con lo que consigue que el alumno se fije en ciertos aspectos del problema.

Con el propósito de proporcionar a sus alumnos el más depurado armamento para el ataque de los problemas, Polya expone una detallada relación de estrategias heurísticas.

La estructura del modelo propuesto por Polya subyace, casi literalmente, en la mayoría de los que se han presentado con posterioridad, y que han venido a suponer, en general, una ampliación del estudio a otros campos que intervienen también en la actividad de resolución.

Otro referente básico es el trabajo de Schoenfeld, que divulga en su libro *Mathematical problem solving* (1985) un nuevo programa, basado en el de Polya. Se trata, sin embargo, de un modelo mucho más global, e incluso acompañado por gran número de experiencias que lo validan.

La discriminación de las fases del proceso se basa en la observación del mismo en cientos de individuos. Schoenfeld detecta bloques de conductas homogéneas asociados a una función concreta dentro de la globalidad del proceso.

Con este modelo no se pretende convertir a cada individuo en un resolutor ideal estándar, sino hacerlo mejorar a partir de un doble conocimiento: el de las técnicas consagradas y el de las características del modo en que él mismo se enfrenta a los problemas.

En contra de la idea de Polya, Schoenfeld entiende que el proceso de resolución no es lineal, sino que supone caminos en zig-zag y marchas hacia atrás y hacia adelante, aún así, delimita cuatro fases en el mismo:

1. Análisis.
2. Exploración.
3. Ejecución.
4. Comprobación.

Presenta para cada una de ellas una exhaustiva relación de pautas y estrategias heurísticas. Sin extendernos en ellas vamos a citar las sugerencias, dejando para más adelante una revisión de las estrategias:

#### *Análisis*

- 1) Trazar un diagrama si es posible.
- 2) Examinar casos particulares:
  - a) Elegir valores especiales que sirvan para ejemplificar el problema.

- b) Examinar casos límites, para explorar la gama de posibilidades.
  - c) Asignar a los parámetros enteros que puedan figurar, la secuencia de valores 0, 1, 2,... y buscar una pauta inductiva.
- 3) Probar a simplificar el problema:
- a) Sacando partido a posibles simetrías.
  - b) Mediante razonamientos «sin pérdida de generalidad» (incluidos los cambios de escala).

#### Exploración

- 1) Examinar problemas esencialmente equivalentes:
- a) Por sustitución de las condiciones por otras equivalentes.
  - b) Por recombinación de los elementos del problema de distintos modos.
  - c) Introduciendo elementos auxiliares.
  - d) Replanteando el problema mediante:
    - Cambio de perspectiva o de notación.
    - Considerando el razonamiento por el contrarrecíproco o por contradicción,
    - Suponiendo que se dispone de una solución y determinando cuáles serían sus propiedades.
- 2) Examinar problemas ligeramente modificados:
- a) Elegir subobjetivos (satisfacción parcial de las condiciones).
  - b) Relajar la condición y tratar de volver a imponerla.
  - c) Descomponer el problema en casos y estudiar uno a uno.
- 3) Examinar problemas ampliamente modificados:
- a) Construir problemas análogos con menos variables.
  - b) Mantener fijas todas las variables menos una para determinar qué efecto tiene esa variable.
  - c) Tratar de sacar partido de problemas afines respecto a la forma, los datos o las conclusiones.
  - d) Recordar que, al manejar problemas afines más fáciles se debería sacar partido, tanto del resultado, como del método de resolución.

#### Comprobación de la solución obtenida

- 1) ¿Verifica la solución obtenida los criterios específicos siguientes?:
- a) ¿Utiliza todos los datos pertinentes?
  - b) ¿Está acorde con predicciones o estimaciones razonables?
  - c) ¿Resiste a ensayos de simetría, análisis dimensional o cambio de escala?
- 2) ¿Verifica los criterios generales siguientes?:
- a) ¿Es posible obtener la misma solución por otro método?
  - b) ¿Puede quedar concretada en casos particulares?

- c) ¿Es posible reducirla a resultados conocidos?
- d) ¿Es posible utilizarla para generar algo ya conocido?

Otro aspecto muy importante de la propuesta es lo que el autor llama las *categorías de conocimiento y comportamiento matemático*. Son las siguientes:

- *Recursos*. Conjunto de conocimientos matemáticos básicos, precisos para enfrentarse a los problemas de una materia.
- *Heurísticos*. Técnicas generales de resolución.
- *Control*. El modo con que cada persona se maneja en resolución de problemas, los recursos y heurísticos que conoce.

Esta categoría, una novedad respecto a modelos anteriores, es según el autor la más crítica a la hora de lograr éxitos o fracasos. Por eso, se le concede especial atención y se diseña un programa de mejora del mismo.

- *Belief systems*. (Corrientes de opinión). Según el autor, las opiniones que reinan en nuestro ambiente tienen gran importancia sobre las actitudes que tomamos ante la resolución de los problemas.

Baste quizás recordar la existencia de criterios «estéticos» a la hora de rechazar un procedimiento de resolución, aun antes de que se haya mostrado ineficaz. O un hecho ampliamente comprobado, el que aunque se conozca a fondo una teoría sobre un modelo físico, a la hora de la aplicación en un caso real, tendemos a incluir elementos provenientes de «nuestra experiencia cotidiana», que muchas veces son contradictorios con el cuerpo de la teoría.

El modelo de Schoenfeld ha sido ampliamente aplicado, desde el ajedrez a la electrónica o desde la medicina a la arquitectura. Muchos investigadores en psicología del comportamiento han trabajado sobre él y han desarrollado algunos aspectos que el autor sólo había iniciado.

Es el caso de Mason, Burton y Stacey, que en su libro *Pensar matemáticamente*

*El modelo de Schoenfeld ha sido ampliamente aplicado, desde el ajedrez a la electrónica o desde la medicina a la arquitectura.*

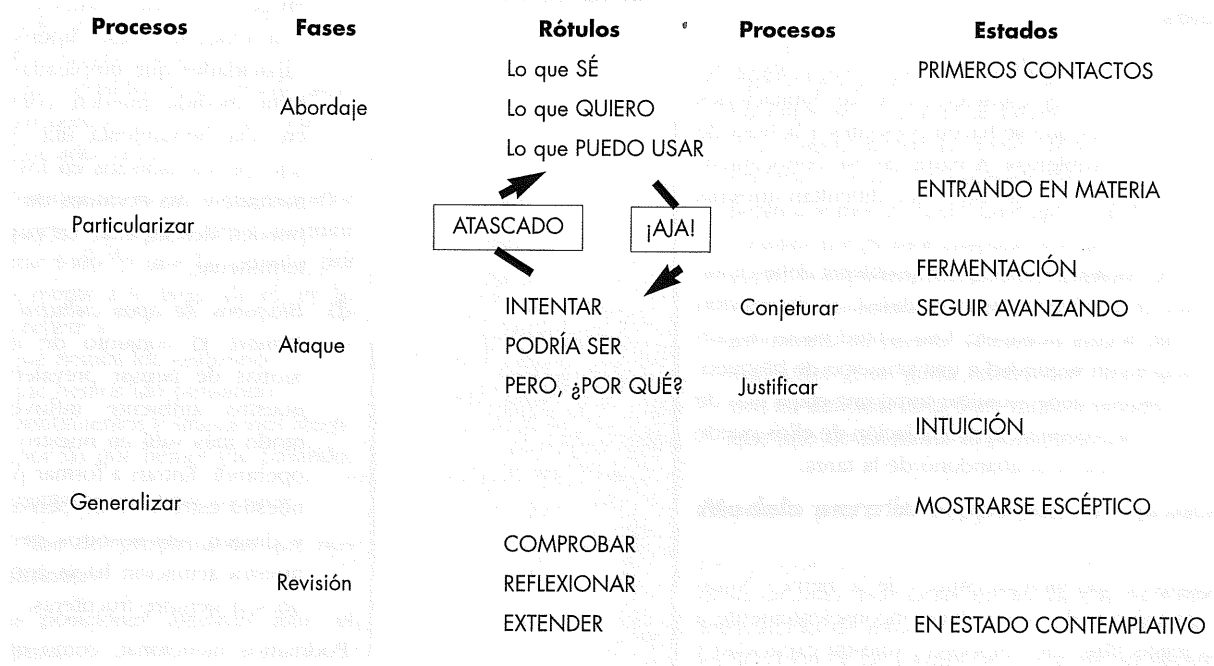
*Muchos investigadores en psicología del comportamiento han trabajado sobre él y han desarrollado algunos aspectos que el autor sólo había iniciado.*

presentan una propuesta que pretende no sólo ser un instrumento de análisis sino de ayuda a la instrucción. Entienden que analizar *a posteriori* el proceso permite retroalimentar nuestra experiencia.

Partiendo de la idea de Schoenfeld sobre la trascendencia del Control en el proceso, proponen la idea de un *monitor*; una especie de tutor interior que desde arriba, sin implicarse, vigila y dirige los procesos, tanto personales como técnicos, que se despliegan en la resolución de problemas.

Dicho monitor puede desarrollarse siempre que demos ocasión al análisis. Los autores proponen la técnica del *rotulado*, como medio de propiciarlo. Se trata de emplear una serie de convenciones simbólicas para describir los momentos claves de la resolución y los estados afectivos que provocan. De este modo, se diferencia entre el proceso mismo de pensamiento y la propia conciencia del proceso.

Este modelo ha tenido gran divulgación, y el cuadro-resumen que presentamos a continuación, tomado del citado libro, puede encontrarse en gran número de libros, trabajos y artículos.



A partir de la famosa disertación de Kilpatrick de 1967, se ha ido desarrollando un nuevo concepto, el de *protocolo*. Otros autores como Schoenfeld, Mason, Burton, etc. lo han ido perfilando a lo largo del tiempo. Empleando la desenfadada definición de M. de Guzmán, «el protocolo es el acta en que queda constancia de los fenómenos interesantes que han ocurrido a lo largo de nuestra ocupación en el problema».

Entiende la mayoría de los autores que por medio de la realización y el análisis

de estos protocolos se realimenta nuestra experiencia y, por tanto, podemos mejorar en nuestro papel de resolutores.

La resolución de problemas es un tema en permanente discusión. Basta comprobar el número de libros que cada año se publican o la ingente cantidad de artículos que nos ofrecen las revistas especializadas. Como sería inabarcable describir todas las vías de investigación y experimentación en este campo, vamos a analizar con detalle uno de los últimos modelos presentados que goza de mayor aceptación. Se trata del propuesto por Guzmán (1991) que recoge las aportaciones más importantes de los principales modelos anteriores.

## El modelo de Guzmán

Su propuesta fue completamente desarrollada en el libro *Para pensar mejor*, aunque se ha ido perfilando a lo largo de otras publicaciones anteriores.

Debe entenderse que, aunque respetaremos la estructura expositiva del autor, en el análisis de los distintos aspectos del modelo emplearemos ideas y aclaraciones de otros autores, especialmente de muchos de los que ya hemos mencionado. Respetaremos también el empleo de la primera persona en la exposición y el tono didáctico, que manifiestan la intención del autor de que su propuesta sirva de entrenamiento personal para la mejora en la resolución de problemas.

### **Actitud inicial. Condicionantes personales y culturales**

Para mejorar nuestra cualificación como resolutores debemos, primeramente, ser conscientes de las limitaciones personales y sociales que se hacen presentes a la hora de enfrentarse a los problemas. A partir de ese conocimiento se podrá actuar sobre los lastres que dificultan nuestras actuaciones.

La actitud adecuada para abordar un problema debe caracterizarse por la confianza, la tranquilidad, la disposición para aprender, la curiosidad, etc. Una actitud inicial negativa nos conduce con seguridad a una situación de bloqueo. Aunque un bloqueo debe asumirse como una etapa más de la solución de un problema, la acumulación de ellos puede conducir al desánimo y al abandono de la tarea.

Hay muchos tipos de bloqueos y se debe estar alerta para combatirlos:

- a) *Bloqueos de tipo inercial* (surcos de la mente). Nuestro proceder suele acomodarse inconscientemente a unas reglas fijas, ello empobrece nuestra capacidad y reduce nuestras posibilidades de éxito.

Para superar ese tipo de bloqueos es preciso habituarse a colocarse en posiciones distintas de la nuestra. (Si se es profesor mirar con ojos de alumno, adoptar la perspectiva del hijo si se es padre, etc.).

- b) *Bloqueos de origen afectivo*. Hay una amplia gama de sentimientos que favorecen el bloqueo, como la apatía, la pereza ante el comienzo, el miedo al fracaso, la ansiedad, etc. La actuación sobre este tipo de sentimientos no es sencilla. En general, el reconocimiento, la asunción de su existencia suele abrir vías para su superación. Si detectamos un origen justificado, quizás se deba a alguna carencia de nuestra formación que podemos tratar de enmendar. Si su origen no es racional, diferenciando su procedencia podremos, tal vez, reducir sus efectos.

*La actitud adecuada para abordar un problema debe caracterizarse por la confianza, la tranquilidad, la disposición para aprender, la curiosidad, etc.*

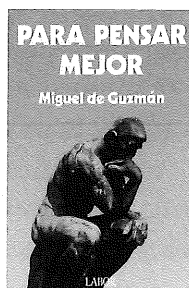
- c) *Bloqueos de tipo cognoscitivo*. Cuando tenemos dificultad para percibir el problema, identificarlo, definirlo o desglosarlo en tareas más sencillas, corremos un alto riesgo de derivar en un estado de bloqueo.

Hay además otras actitudes que suelen conducirnos a la misma situación: una tendencia hipercrítica hacia nuestro trabajo, la rigidez mental en el empleo de procesos o en la espera de resultados, la incapacidad para dilucidar cuándo disponemos de suficiente información para abordar el problema, etc. En general, estas actitudes suponen una aplicación descompensada de capacidades que empleadas en su justa medida pueden convertirse en una herramienta útil. Este es uno de los aspectos en los que el monitor y sus acciones de control pueden desempeñar un papel determinante.

- d) *Bloqueos de tipos cultural y ambiental*. El conjunto de ideas y formas de pensar prevalentes en nuestro ambiente influyen del modo más sutil en nuestro modus operandi. Entran a formar parte de nuestra estructura de pensamiento y dirigen, sin nosotros percibirlo, nuestra actuación hacia zonas que no son siempre fructíferas.

Podríamos mencionar, como ejemplo, las ideas acendradas de nuestro acervo cultural que son erróneas, pero que han mantenido a lo largo del tiempo su predicamento. También lo que Whitehead denominó «ideas inertes», aquellas que tuvieron su virtualidad en algún momento, que la ciencia ha invalidado en ciertos dominios pero que, sin embargo, siguen impregnando nuestro modo de razonar (piénsese en las leyes de Newton sobre la gravitación universal y la teoría de la relatividad).

La actuación sobre estas actitudes nocivas se basa en la detección de las mismas y su postergación en beneficio de ideas más apropiadas.



*Para pensar mejor*  
Guzmán

## **Protocolo. Retrato heurístico**

Si habitualmente no reflexionamos sobre la resolución de los problemas, cuando solucionamos otro similar recaemos en muchos de los caminos sin salida a que nos habían conducido otros. Y así, sólo tras un gran número de repeticiones el proceso comienza a ser ágil, claro y riguroso. Sin embargo, si examinamos a fondo nuestros propios procesos mentales, iremos depurando nuestra técnica de forma mucho más rápida y efectiva.

Para lograrlo el autor recomienda la realización de un *protocolo* del proceso. Posteriormente, deberá proceder a *analizarlo, evaluarlo* en sí mismo y, si es posible, en comparación con otros, y finalmente establecer el *tratamiento* sobre los puntos que se hayan detectado menos adecuados.

Un protocolo no es un mero borrador del proceso, sino que debe permitir recuperar todo lo que ha pasado por nuestra mente a lo largo de él, en lo que se refiere a:

- Lo que hemos ido realizando.
- Lo que hemos ido pensando.
- Los sentimientos y situaciones afectivas por las que hemos ido pasando.

Fundamentalmente debe anotarse:

- a) La fase del problema en que nos hallamos.
- b) Las posiciones afectivas ante el mismo.
- c) El estado emocional (aburrimiento, interés, etc.)
- d) Los cambios de actividad mental ante el problema.
- e) Los orígenes de las posibles ideas que vayan apareciendo en nuestra mente.

Una vez finalizado el protocolo se encontrarán en él dos tipos de anotaciones: las que se refieren al contenido del proceso y las correspondientes a la observación del mismo. El análisis consiste en enmarcar el sentido de cada una de las anotaciones dentro del propio proceso.

*Conocernos a nosotros mismos como resolutores nos proporciona la posibilidad de utilizar nuestros propios recursos de forma más eficaz.*

La evaluación y el tratamiento están muy relacionados con la fase de «revisión» que veremos más adelante.

Conocernos a nosotros mismos como resolutores nos proporciona la posibilidad de utilizar nuestros propios recursos de forma más eficaz. Los rasgos más característicos de nuestra capacidad heurística conforman lo que ha dado en llamarse el *retrato heurístico*. El mejor mecanismo para obtener un retrato fiel es la realización y el estudio de protocolos, en sí mismos y por comparación con los de los demás.

Dicho autorretrato heurístico debe contemplar, al menos, tres aspectos distintos:

- *Aspectos externos.* Debe responder a preguntas del tipo: ¿En qué momentos y lugares preferimos trabajar? ¿Qué favorece nuestra concentración? ¿Qué es lo que más nos distrae? ¿En qué circunstancias suele surgir la inspiración? ¿Qué postura física solemos adoptar? ¿Cuántas horas de descanso precisamos?, etc.
- *Aspectos afectivos.* Debemos reflexionar sobre: ¿Qué sentimientos se producen al enfrentarnos a un problema? ¿Nos cuesta iniciar la tarea? ¿Tenemos altibajos en el esfuerzo o somos constantes? ¿Nos inclinamos al desaliento o somos tenaces? ¿Qué tipo de trabajos nos gustan y cuáles no? ¿Somos chapuceros o perfeccionistas?, etc.
- *Aspectos cognoscitivos.* Estudiar también: ¿Qué tipos de materias, procesos y tareas son más próximos a nuestra manera de pensar? ¿Tenemos curiosidad por lo desconocido? ¿Nos gusta reflexionar? ¿Nos gusta centrarnos en una sola cosa o en varias a la vez? ¿Cuánta y de que tipo de memoria disponemos?, etc.

## **Modelo para la ocupación con problemas**

Esta propuesta se basa, según confesión del autor, en las observaciones realizadas en su propia actividad, en el intercambio de experiencias con sus compañeros, en la exploración de las formas de pensar de sus alumnos en la universidad y en el estudio de las obras de otros autores.

Para Guzmán la resolución de un problema pasa por cuatro fases:

1. Familiarización con el problema.
2. Búsqueda de estrategias.
3. Desarrollo de la estrategia.
4. Revisión del proceso.

Vamos a proceder a estudiarlas detalladamente, incluyendo las sugerencias heurísticas más adecuadas para cada una de ellas.

### *Familiarización con el problema*

Engloba todas las acciones encaminadas a comprender del modo más preciso posible la naturaleza del problema a que vamos a enfrentarnos.

Las sugerencias heurísticas que el autor ofrece son:

- ¿De qué trata el problema?
- ¿Cuáles son los datos?
- ¿Qué pide determinar o comprobar el problema?
- ¿Disponemos de datos suficientes?
- ¿Guardan los datos relaciones entre sí? Etc.

#### *Búsqueda de estrategias*

Se trata de determinar unas cuantas estrategias heurísticas para abordar el problema. No ha llegado aún el momento de aplicarlas, sino de seleccionar, dentro de nuestro archivo de estrategias, cuáles parece que se adecúan más a la naturaleza del problema.

Enumeramos aquí una serie de estrategias heurísticas, las más usuales. Remitimos a las obras de Miguel de Guzmán para un estudio más detallado de las mismas.

- Simplificación. Particularización.
- Ensayo y error.
  - Explorar simetrías.
  - Explorar casos límites.
- Realización de un esquema, una figura, un diagrama o una tabla.
- Organización y codificación.
- Analogía. Semejanza.
- Razonamiento regresivo.
- Reducción al absurdo.
- Técnicas generales.
  - Principio de inducción.
  - El principio de descenso de Fermat.
  - Principio del palomar de Dirichlet.
  - Etc.
- Estrategias específicas de la materia concreta en que se encuadra el problema.

#### *Desarrollo de la estrategia*

Momento en el que pasa a aplicarse la estrategia seleccionada. Aquí es de interés tener en cuenta la siguiente relación de sugerencias heurísticas.

- Llevemos adelante las mejores ideas que se nos hayan ocurrido, una a una.
- No hay que desanimarse a la primera dificultad, pero tampoco porfiar si las cosas se complican demasiado.
- Reflexionemos sobre la validez de cada paso.
- Preguntémonos si lo que hemos obtenido es la solución. Estudiémosla a fondo.

#### *Revisión del proceso*

Quizás el momento más fructífero sea aquel en que hemos resuelto el problema. Nos volvemos sobre él y sobre nuestro proceso de pensamiento e iniciamos una

*Tanto el modelo de Schoenfeld como el de Guzmán están, tanto por su origen como por sus principales experimentaciones, ligados al mundo universitario.*

reflexión, cuya guía puede ser la siguiente serie de sugerencias.

- Examinemos a fondo el camino seguido. ¿Como hemos llegado a la solución? ¿O, por qué no la hemos alcanzado?
- Busquemos ahora un camino más simple.
- Tratemos de entender no sólo que la cosa funciona sino por qué funciona.
- Reflexionemos sobre el proceso de pensamiento y obtengamos consecuencias de él.
- Estudiemos qué otros resultados podríamos obtener con este método.

Para esta cuarta fase es primordial disponer de un protocolo completo de nuestro proceso de resolución.

### **Notas finales**

Tanto el modelo de Schoenfeld como el de Guzmán están, tanto por su origen como por sus principales experimentaciones, ligados al mundo universitario. A pesar de ello, con alguna corrección, han sido aplicados en otros ámbitos como en las enseñanzas secundaria y primaria.

Conviene señalar a este respecto que bastantes autores entienden que en las enseñanzas no universitarias el desarrollo del *monitor interior* exige un grado de madurez intelectual que no suele encontrarse en los alumnos que cursan esos estudios. Por ello, en la mayoría de las experimentaciones que se han llevado a cabo en estos niveles, ese aspecto ha quedado un tanto relegado cuando no totalmente apartado.

Además de modelos de tipo global, en Matemáticas se han publicado otros referidos a distintos tipos de problemas y ámbitos escolares. Suelen basarse en los modelos ya mencionados, aunque en su adaptación sufren algunas modificaciones. Es el caso, por ejemplo, del modelo de De Corte y Werschaffel para problemas aritmético verbales en la enseñanza primaria.



## Bibliografía

- ANTÓN, J. L. y otros (1994): *Taller de Matemáticas*, MEC-Narcea, Madrid.
- BOYER, C. B. (1986): *Historia de la matemática*, Alianza Universidad Textos, Madrid.
- BRANSFORD, J. D. y B. S. STEIN (1897): *Solución ideal de problemas. Guía para mejor pensar, aprender y crear*, Labor, Barcelona.
- BRIHUEGA, J. y otros (1992): *Currículo oficial del Taller de Matemáticas*, MEC, Madrid.
- DECA, Grupo (1990): *Didáctica de la resolución de problemas*, Centro de Profesores, Burgos.
- GOLDIN, G. A. y C. E. McCLINTOCK (1979): *Task variables in Mathematical Problem Solving*, ERIC/SMEAC, Columbus, Ohio.
- GÓMEZ CHACÓN, I. M. (1989): «Los protocolos de resolución en la enseñanza de las matemáticas», *Suma*, n.º 3.
- GUZMÁN, M. de (1984): *Cuentos con cuentas*, Labor, Barcelona.
- GUZMÁN, M. de (1988): *Aventuras matemáticas*, Labor, Barcelona.
- GUZMÁN, M. de (1991): *Para pensar mejor*, Labor, Barcelona.
- HERNÁNDEZ, J. y M. SOCAS (1994): «Modelos de competencia para la resolución

José Lorenzo  
IES Venancio Blanco  
Salamanca

- de problemas basados en los sistemas de representación en Matemáticas», *Suma*, n.º 16.
- KILPATRICK, J. (1967): *Analyzing the solution of word problems in mathematics. An exploratory study*, Universidad de Stanford. No publicado.
- MASON, J., L. BURTON y K. STACEY (1988): *Pensar matemáticamente*, MEC-Labor, Barcelona.
- MCLEOD, D.B. y V. M. ADAMS (1989): *Affect and Mathematical Problem Solving*, Springer-Verlag, Nueva York.
- MEC (1992): *Currículo oficial de Matemáticas en la ESO*, MEC, Madrid.
- MEC (1992): *Currículo oficial de los Bachilleratos*, BOE, Madrid.
- POLYA, G. (1945): *How to solve it*. (Traducción española, *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, México, 1976).
- POLYA, G. (1954): *Mathematics and Plausible Reasoning* (2 vols.), Princeton University Press. Princeton, NJ. (Traducción española: *Matemáticas y razonamiento plausible*, Tecnos, Madrid, 1966).
- PUIG, L. y F. CERDÁN (1988): *Problemas aritméticos escolares*, Síntesis, Madrid.
- REY PASTOR, J. y J. BABINI (1985): *Historia de la Matemática*, Gedisa, Barcelona.
- SHELL CENTRE FOR MATHEMATICAL EDUCATION (1984): *Problems with patterns and Numbers*, Universidad de Nottingham. (Traducción española: *Problemas con pautas y números*, Universidad del País Vasco, 1993).
- SCHOENFELD, A. H. (1979): «Explicit Heuristic Training as a Variable in Problem Solving Performance», *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 10.
- SCHOENFELD, A. (1985): *Mathematical problem solving*, Academic Press, New York.

N.º 230.—**Medidas para áridos.** — (Fig. 53). Colección de medidas de hierro para áridos, desde el medio decalitro hasta el decilitro (6 medidas). Precio, 16'50 pesetas.

N.º 231. El decalitro suelto, 11 pesetas.

N.º 232. El doble decalitro (sin asas). Precio, 13'50 pesetas.

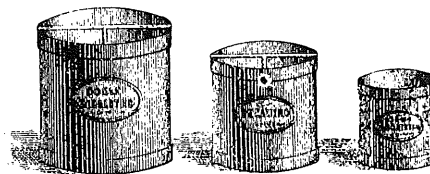


Fig. 53  
Pesas y medidas del Sistema Métrico Decimal

**Medidas para líquidos.** — (Fig. 54). — Colección de medidas de hojadelata, desde el doble litro hasta el centilitro (8 medidas) 7 pesetas.

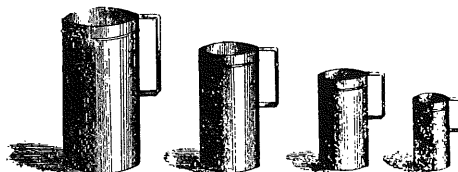


Fig. 54  
Pesas y Medidas del Sistema Métrico Decimal

Núm. 233.—Forma alta.

Núm. 233 A.—Forma baja.

# FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Presidente: Gonzalo Sánchez Vázquez  
Secretario General: Luis Balbuena Castellano  
Tesorero: Florencio Villarroja Bullido  
Apartado de Correos 329. 38201-LA LAGUNA (Tenerife)

## Sociedades federadas

### **Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya**

Presidenta: María Antonia Canals  
Apartado de Correos 1306. 43200-REUS (Tarragona)

### **Organización Española para La Coeducación Matemática «Ada Byron»**

Presidenta: Adela Salvador  
Apartado de Correos 4051. 28080-MADRID

### **Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»**

Presidente: Gonzalo Sánchez Vázquez  
Apartado 1160. 41080-SEVILLA

### **Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo»**

Presidenta: Rosa Pérez García  
ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

### **Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»**

Presidente: J. Horacio Gutiérrez Álvarez  
Apartado de Correos 830. 33400-AVILÉS (Asturias)

### **Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»**

Presidente: Manuel Fernández Reyes  
Apartado de Correos 329. 38201-LA LAGUNA (Tenerife)

### **Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas**

Presidente: Constantino de la Fuente Martínez  
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Villalar, s/n. 09006-BURGOS

### **Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)**

Coordinador: Andrés Marcos García  
Facultad de Económicas. Universidad de La Coruña

### **Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»**

Presidente: Ricardo Luengo  
Apartado 536. 06080-MÉRIDA (Badajoz)

### **Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira» Matematika Iraskasleen Nafar Elkarte Tornamira**

Presidente: José Ramón Pascual Bonis  
Departamento de Matemática e Informática. Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006-PAMPLONA

### **Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»**

Presidente: Javier Brihuega  
Apartado de Correos 14610. 28080-MADRID

### **Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas**

Presidente: José Javier Etayo Gordejuela  
Despacho 3517. Facultad de Educación. Universidad Complutense. 28040-MADRID

### **Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»**

Presidente: Luis Puig Espinosa  
Departament de Didàctica de la Matemàtica. Apartado 22045. 46071-VALENCIA