SUMA 20
noviembre 1995, pp. 85-90

La calculadora gráfica. Una herramienta para resolver un problema de evolución de especies

Leandro Tortosa Grau

IDEAS Y RECURSOS

En este artículo se recoge brevemente el contenido y resultado de una experiencia llevada a cabo en clase, con un grupo de alumnos de 4.° curso de ESO. Se plantea el problema inicial de la evolución de un grupo de peces en una charca se obtiene un modelo matemático simple (la llamada función logística), que aproxima el problema, y después se estudian algunos casos interesantes de los que se obtienen diversos comportamientos, tanto regulares como caóticos.

Desarrollo de la experiencia

Planteamiento inicial

La experiencia llevada a cabo con un grupo de alumnos de 4.° de ESO. consistió básicamente en el planteamiento de un problema inicial general, y el desarrollo del mismo utilizando herramientas matemáticas «poco convencionales», como son los procesos iterativos, tanto numéricos como gráficos,basados en la utilización de la calculadora gráfica del tipo TI-82.

El problema inicial planteado fue: ¿cómo evolucionará una población cualquiera, con el transcurso de los años? ¿Se extinguirá la población con los años, rebosarán en el medio físico en que se encuentren, o sufrirán fluctuaciones cíclicas en cuanto al número de individuos en la especie? Así, en nuestro afán por modelizar y generalizar, nos preguntamos ¿seremos capaces de predecir la evolución de una población en un espacio físico a lo largo de los años?

Obtención del modelo. La función logística

Para responder a estas preguntas debemos obtener un modelo matemático sencillo que nos permita abordar el problema desde el punto de vista funcional y numérico. Vamos a particularizar este problema al caso de una población de peces en una charca, de forma que pretendemos estudiar su evolución. Establecemos el siguiente criterio de notación: representamos la población anual mediante

$$x_{(0)}, x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots\ldots, x_{(n)}, \ldots$$

donde $x_{(0)}$ representa el valor inicial de la población; $x_{(1)}$ representa el valor de la población al primer año; $x_{(2)}$ al segundo año y así sucesivamente.

El propósito del modelo es determinar las variaciones en la población debido al crecimiento y a la competencia por los recursos.

- Si la población es pequeña, hay recursos para que se produzca un crecimiento de la especie a lo largo de los años; esto lo podemos definir mediante la siguiente iteración: $x_{(n+1)} = R\, x_{(n)}$ con $R > 1$.
- Si la población crece muy rápidamente, los recursos se irán agotando poco a poco hasta que resulten insuficientes para todos los elementos. Por esto, a la expresión anterior hay que añadirle un término que frene la expansión, quedando la expresión anterior así:

$$x_{(n+1)} = R\, x_{(n)} - A\, x^2_{(n)}$$

De esta expresión pasamos a otra, haciendo A = R, obteniendo:

$$x_{(n+1)} = R\, x_{(n)}\, (1 - x_{(n)})$$

En esta última expresión hemos escalado la variable $x_{(n)}$ en el intervalo [0,1], lo que significa que el valor máximo para la población es 1; así, este valor representa una saturación total en la charca, es decir, está llena de peces. También debemos notar que R es una constante que está relacionada con la tasa de nacimientos de la especie, así como con otros factores ambientales y propios de cada especie; por lo tanto, es una constante que estudian y determinan los biólogos, y no nos cuestionamos, desde el punto de vista matemático, su obtención. Lo único que nos interesa saber es que su valor varía entre 0 y 4.

Vemos, pues, que hemos obtenido un modelo matemático basado en la primera ecuación para estudiar numéricamente el problema planteado. Dicha ecuación recibe el nombre de «función logística».

Ejemplo: supongamos que para una charca con peces, el valor de R = 2, y que inicialmente $x_{(0)} = 0.1$, (es decir, la charca está rellena de peces en un 10% de su capacidad), y queremos saber cómo va a evolucionar esa población con los años. Para realizar esto basta con que vayamos calculando los sucesivos iterados con la calculadora, que son:

Iterado	$x_{(0)}$	$x_{(1)}$	$x_{(2)}$	$x_{(3)}$	$x_{(4)}$	$x_{(5)}$	$x_{(6)}$	$x_{(7)}$
Valor iterado	0.1	0.18	0.2952	0.416	0.486	0.499	0.5	0.5

En la tabla anterior: $x_{(1)} = 2*0.1*(1-0.1)$

$x_{(2)} = 2*0.18*(1-0.18)$

Como vemos, a partir de $x_{(6)}$ obtenemos el valor 0.5, lo que significa que a partir del 6.° año la población se estabiliza en el valor 0.5, es decir, llenando en un 50% la capacidad total de la charca en la que se encuentran.

Pero esto no es más que un ejemplo. Para estudiar el problema en su conjunto podemos dar los valores iniciales que queramos entre 0 y 1 y estudiar qué ocurre al ir variando R entre 0 y 4. ¿Será similar en todos los casos el comportamiento de la población? El problema que nos encontramos es que todos estos procesos iterativos son muy lentos de realizar a mano. Aquí es donde nos vamos a ayudar de la calculadora gráfica para agilizar todos los cálculos, y además vamos a utilizar algunas de las posibilidades gráficas que nos ofrece para «visualizar» gráficamente el problema.

La calculadora gráfica

En este punto, ya nos centramos en la utilización de la calculadora gráfica como herramienta básica para el tratamiento del problema. Este tratamiento con calculadora lo podemos realizar de dos formas distintas.

- La primera forma sería a partir de las posibilidades que nos ofrece este modelo de calculadora (TI-82), en cuanto a manejo y manipulación de sucesiones de números.
- La segunda forma sería mediante la utilización de algún programa para la calculadora que nos resolviera estos procesos iterativos de forma mecánica.

Vamos a comenzar con la primera de ellas.

Esta calculadora nos ofrece la posibilidad de trabajar con sucesiones y dibujar puntos de la misma. La tecla MODE nos da las distintas variantes en cuanto al modo de trabajo. Lo vemos en la figura 1.

En la pantalla MODE debemos seleccionar 3 dígitos de precisión, modo Seq y Dot, para que pinte punto a punto. Si seleccionamos esto y presionamos Y= tenemos la segunda pantalla que aparece en la gráfica anterior; debemos teclear la sucesión a representar, que en nuestro caso es $R*u_{n-1}(1-u_{n-1})$. Debemos darle a R un valor para que pueda ir calculando los iterados. Para conseguir que calcule los iterados de esa ecuación que hemos introducido, debemos ajustar la ventana de representación gráfica por medio de la tecla WINDOW. Los valores para que podamos visualizar los primeros 50 iterados de la ecuación aparecen en los siguientes dibujos de la gráfica anterior. Notar que el valor u_nStart = 0.1 corresponde con el valor inicial $x_{(0)}$ = 0.1 para la población de peces.

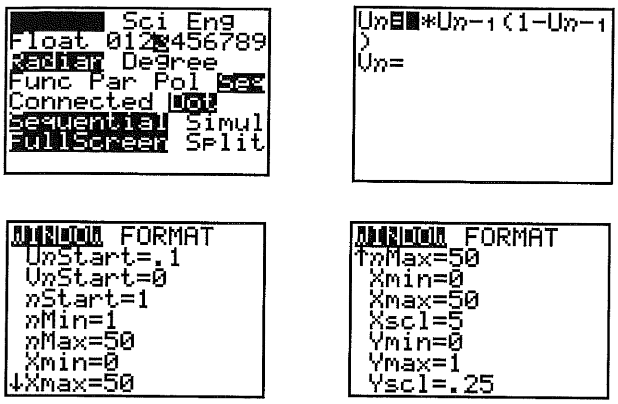

Gráfico 1

El gráfico 2 nos muestra el dibujo de los primeros 50 iterados para la función logística de parámetro R = 2 y para el valor inicial 0.1. Se advierte como los iterados tienden a un valor estable; la población se estabiliza para el valor 0.5.

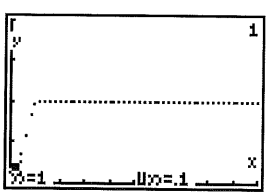

Gráfico 2

Como vemos en el gráfico 3, también tenemos la opción de visualizar la tabla de valores correspondientes a los iterados anteriores; puede ser de gran utilidad visualizar la tabla, ya que podemos identificar de una forma mucho más clara la evolución de la población y si se estabiliza en algún valor o no.

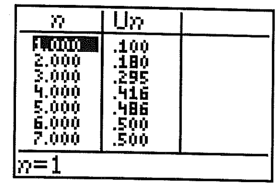

Gráfico 3

Una vez visto este primer caso, se trataría de ir estudiando qué ocurre para valores distintos de R y ver si hay alguna variación para diferentes condiciones iniciales. Vemos cómo podemos usar las capacidades gráficas de la calculadora para obtener conclusiones.

Ahora vamos a ver algunos dibujos realizados con la calculadora para algunos valores de R en los que suceden comportamientos distintos.

El conjunto de valores más interesantes para R, con condición inicial 0.1, en los que cambia el comportamiento de la iteración son los siguientes:

2.0; 2.95; 3.05; 3.24; 3.5; 3.68; 3.74; 3.8; 4

Para cada uno de estos valores podemos estudiar distintos valores iniciales sin más que cambiar u_nStart en la ventana WINDOW. Algunas gráficas son:

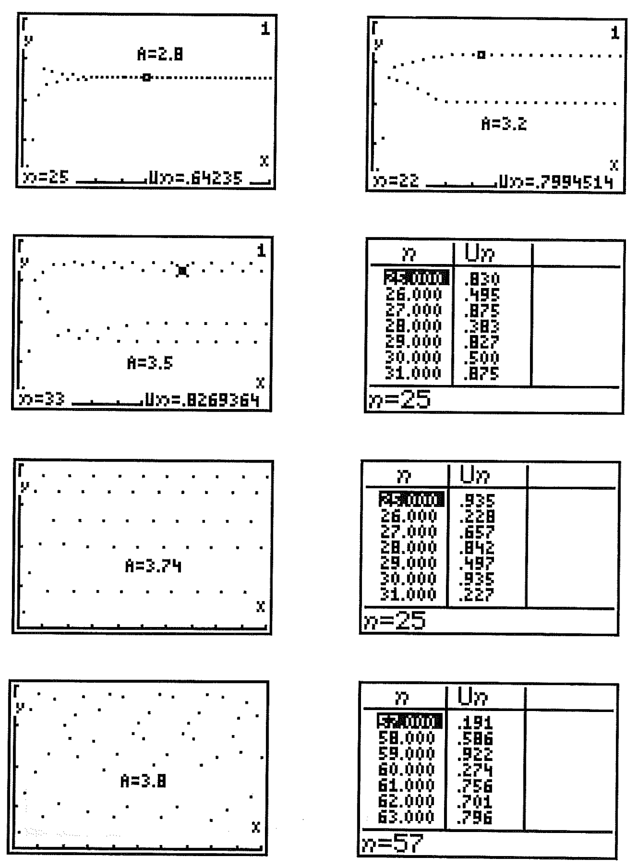

Gráfico 4

En los ejemplos del gráfico 4 tenemos algunos casos significativos de diversos comportamientos. Vemos, por ejemplo para el caso R = 2.8, que sigue habiendo un punto límite al que tiende la población. Para el caso R = 3.2 ya vemos como la gráfica se va moviendo entre dos valores, lo que significa un dos-ciclo. Esto significa que la población oscila cada dos años con los mismos valores; aumenta y disminuye, pero siempre a valores constantes. Para el caso R = 3.5 también se observa una repetición de valores pero cada cuatro años. Esto significa que la evolución de la población representa un 4-ciclo; también se ha dibujado la gráfica con algunos valores para comprobar que efectivamente se trata de un 4-ciclo. Para el caso R = 3.74, el 4-ciclo anterior pasa a ser un 5-ciclo; cada 5 años se vuelve al valor anterior y se van repitiendo de nuevo. Para el caso R = 3.8, cambia el comportamiento radicalmente; si hasta ahora todos los valores que habíamos probado nos daban un comportamiento predecible y, en cierto modo, «natural», ahora nos encontramos con que no apreciamos ninguna regularidad en los valores que van tomando los iterados. ¿Qué significa esto? ¿Resulta impredecible el comportamiento de la población con los años? Pues parece que sí; a la vista de la gráfica y, si investigamos un poco en la tabla de valores, no apreciamos regularidad alguna. Podríamos describir este comportamiento, en principio, como «caótico», entendiendo por caótico una falta de predictibilidad.

Para estudiar un poco más en profundidad todo esto, vamos a analizar el caso R = 4.

Caso particular R = 4

Antes de estudiar el caso R = 4 vamos a introducir el concepto de «iteración gráfica».

Supongamos que queremos iterar gráficamente Y= 4x (1-x) con el valor inicial 0.1. Para efectuar la iteración gráfica hacemos lo siguiente:

Partimos en el eje X del punto 0.1 y trazamos una recta perpendicular al eje X hasta que corta a la curva; después se mueve hacia izquierda o derecha paralelamente al eje X hasta cortar a la diagonal. Este es el primer iterado. Para obtener el siguiente iterado debemos repetir este proceso y así sucesivamente. El proceso geométrico aquí descrito es la secuencia repetida de estos pasos una y otra vez, usando cada vez el último punto final como el siguiente inicial. Lo vemos en el siguiente gráfico, en el que hemos iterado la función expuesta anteriormente.

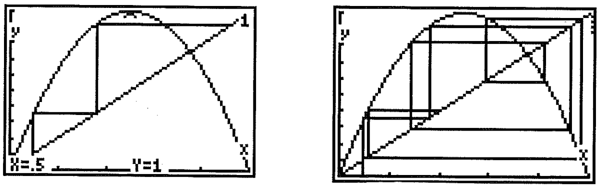

Gráfico 5

Veamos ahora que este proceso lo podemos hacer manualmente en la calculadora TI-82.

Podemos intentar visualizar manualmente qué va a ocurrir en este caso haciendo lo siguiente: podemos representar en la calculadora, la función Y = 4x (1–x) y tomar como valor inicial $x_{(0)}$ = 0.3, por ejemplo. Entonces podemos realizar manualmente la iteración a partir de la opción PEN apretando las teclas 2nd PRGM . Esto nos permite ir de la función a la recta y así reiteradamente estudiar el comportamiento de los puntos que obtenemos. El gráfico de lo que obtenemos está aquí.

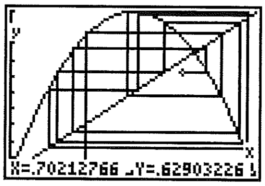

Gráfico 6

Podemos, si tenemos suficiente paciencia, ir anotando los valores de intersección de las curvas para, de esta manera, obtener los sucesivos iterados y analizar el comportamiento de la población con los años. Como vemos, si realizamos la iteración de esta forma vamos poco a poco «rellenando» todo el espacio. Esto nos lleva a pensar que no existe una «regularidad» en cuanto a los valores que vamos a ir obteniendo si calculamos los iterados mediante una sucesión. ¿Significa esto que el comportamiento de esta determinada población, bajo estas características, es caótico e impredecible? Pues sí, en cierto sentido podemos afirmar que no somos capaces de prever el desarrollo de la población ni su evolución. Pero nos interesa profundizar un poco en el concepto de caos aplicado a este problema. ¿Qué significa para nuestra población una evolución caótica? Pues significa que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden provocar comportamientos totalmente distintos en la evolución de la población. Pero esto es algo que podemos comprobar. Vamos a estudiar los casos en que R = 4 y vamos a dar condiciones iniciales de 0.300 y 0.301, lo que significaría dejar en una charca 300 peces y en otra, al lado, 301 peces. Pues bien, una diferencia tan ínfima como es de un pez ¿puede provocar resultados distintos?

Como podemos apreciar en el gráfico 7, hemos dibujado la iteración gráfica para los casos con condiciones iniciales 0.3 y 0.301. Hemos utilizado también un programa para que nos vaya representando gráficamente los puntos de la iteración a partir del valor x = 25, para de esta manera poder visualizar mejor la evolución cuando ya han pasado 25 años. Pues bien, como vemos los resultados no son ni mucho menos iguales. Los últimos dibujos recogen la tabla de valores desde el 25 al 31 de los dos casos con condiciones iniciales estudiados, y se observa que ambos resultados no son iguales, ni tan siquiera aproximados.

Todo esto nos conduce a reflexionar sobre el fenómeno del caos como falta de predictibilidad en un sistema que evoluciona con el tiempo. También podemos hacer otra reflexión. El fenómeno al que estamos denominando caos se da paralelamente al fenómeno que entendemos como evolución predecible y «natural». Es decir, que una serie muy consistente de condiciones favorables a predecir la evolución de este sistema, no me asegura de ningún modo que en cualquier momento no aparezcan condiciones iniciales caóticas. El caos y el «orden» parece que se encuentran tan cerca uno de otro que la frontera entre ambos es imperceptible.

Podemos formar la tabla siguiente con los valores estudiados hasta ahora:

Parámetro a	2.0	2.95	3.05	3.24	3.5	3.68	3.74	3.8	3.84
Atractor período 5							•		
Atractor periodo 4					•				
Atractor periodo 3									•
Atractor periodo 2			•	•					
Punto fijo	•	•							
CAOS						•		•	

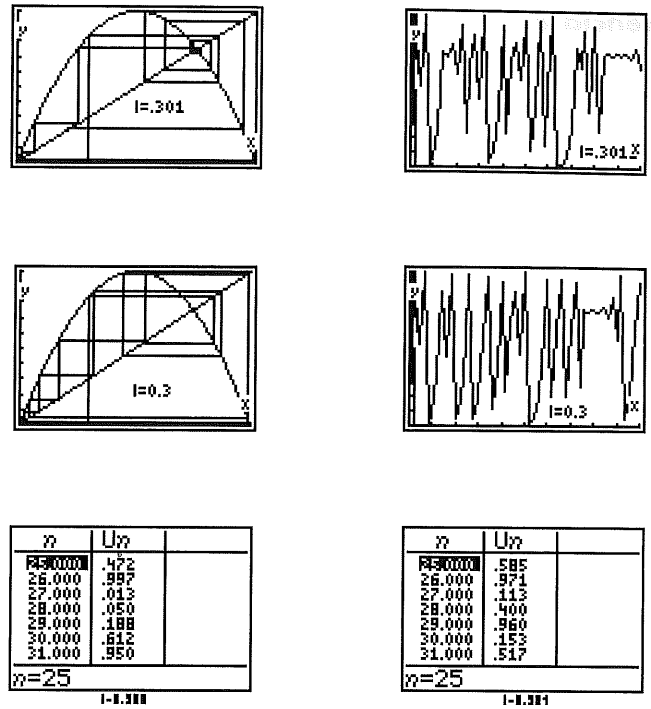

Gráfico 7

Si quisiéramos representar en una figura todas las posibilidades para los distintos valores de R, obtendríamos la figura siguiente, que se conoce con el nombre de gráfica de bifurcaciones

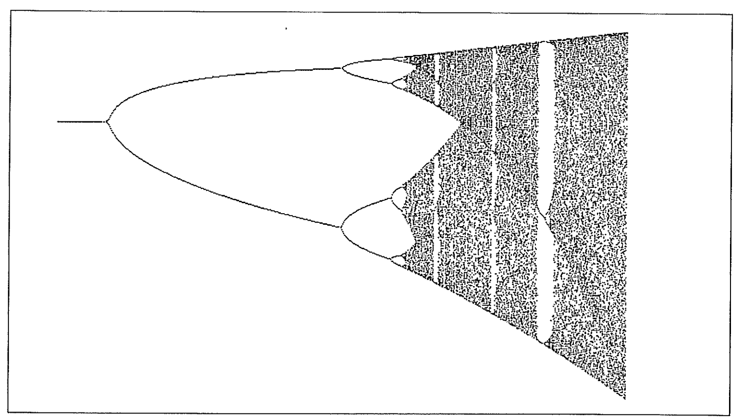

Gráfico 8

Como vemos en el dibujo del gráfico que obtenemos, se trata de un conjunto de características fractales, que resume todo el conjunto de comportamientos de la función logística.

Experiencia en clase

El trabajo aquí expuesto ya se ha comentado al inicio que fue realizado con alumnos de 4.° curso de ESO. La experiencia en conjunto ha resultado muy positiva. En cuanto al trabajo con las calculadoras, que el CEP de Alicante nos prestó durante dos semanas, fue muy positivo; queda muy claro que a los alumnos les «engancha» el trabajo con calculadoras, y mucho más si tienen las posibilidades gráficas que este modelo entre otros, poseen. Les encanta representar gráficamente las funciones y «manipularlas». Todos los alumnos mostraron un gran interés en aprender rápidamente su manejo y, en poco tiempo, le tomaron la medida y ya ellos solos se apañaban con los ejercicios. Los problemas en cuanto al manejo de la misma venían del lado de los valores de la ventana de representación. Lo que más les costó fue comprender la ventana WINDOW cuando estábamos trabajando en modo Seq. Algunos introducían mal los datos y se «perdía» la representación. Estuvieron durante unas clases estudiando iteraciones para diversos valores de R y comprobando los valores que aparecían en las tablas. También hicieron iteraciones gráficas en modo manual, ya que no dio tiempo a hablar sobre algún programa que realizara esto de forma sistemática.

Por lo tanto, la experiencia en cuanto al uso y manejo de la calculadora gráfica fue muy positivo, expresando la mayoría de los alumnos su deseo de continuar trabajando en otros temas con la misma herramienta.

En cuanto a la experiencia del planteamiento de un problema general concreto y real y su desarrollo a lo largo de bastante tiempo, la experiencia resultó también positiva. A los alumnos les interesa mucho más el planteamiento de problemas «reales», con los que se pueden familiarizar y discutir *a priori* y *a posteriori*. Además, todo aquello a lo que le encuentran una aplicación, les satisface bastante, y se muestran menos pasivos. La única dificultad radicaba en problemas de comprensión en torno al concepto de «iteración gráfica»; al alumno, en general, le resulta muy costoso el paso de una iteración numérica a una iteración de tipo gráfico. No se acaba de entender muy bien eso de que haya que representar la diagonal también y luego realizar ese «baile» de rectas hacia uno y otro lado.

Para terminar, es preciso indicar que, en una breve encuesta que les pasé, un 95% de los alumnos se mostraron partidarios del uso de la calculadora gráfica y pensaban que había resultado muy interesante este tema y el estudio de este problema.

Leandro Tortosa
IFP Canastell
San Vicente de Raspeig
(Alicante)

La cuadratura del círculo
(VI Olimpiada Matemática Nacional)