SUMA 20
noviembre 1995, pp. 73-75

De la Astronomía a la Lingüística: una experiencia didáctica en torno a los logaritmos

Benito Hernández Bermejo
Juan Bosco Romero Márquez

IDEAS Y RECURSOS

Enun recorrido que empieza en las necesidades de los cálculos astronómicos y termina en la teoría de lenguajes formales, se propone un modelo que posee las mismas propiedades que los logaritmos, desde el punto de vista formal, aumque con ciertas limitaciones. Dicho modelo muestra que las propiedades de los logaritmos no son tan antinaturales como parece a primera vista, pudiendo no sólo ser aprendidads sino también ser aceptadas.

Queridos alumnos:

Como ya sabéis, hemos definido una función logaritmo de la siguiente manera:

$$f:\Re^{+}-\{0\}\rightarrow\Re$$
$$b\rightarrow\log_a b=c\Leftrightarrow a^c=b,$$

donde a>0, a≠1 es la llamada *base* del logaritmo, que habitualmente es 10 o el número *e*.

Aunque esta definición es perfectamente correcta, probablemente os ha parecido arbitraria: ¿Por qué definir el logaritmo de esta forma? ¿Por qué *definirlo?* Todo tiene una explicación...

Hace alrededor de tres siglos, John Neper definió por primera vez los logaritmos debido a que estaba buscando una función que simplificara de alguna forma los cálculos numéricos, que en aquella época eran largos y tediosos: ¡Entonces no había calculadoras! Tales cálculos habían empezado a proliferar, especialmente en Astronomía: el propio Kepler, en la misma época, se queja frecuentemente en este sentido.

Pues bien: ¿qué ocurriría si dispusiéramos de una función «mágica», una función capaz, nada menos, que de convertir las potencias en multiplicaciones y las multiplicaciones en sumas? ¿Acaso no sería una ayuda inmensa para nosotros si tuviésemos que calcular a mano?

Pues esta función existe, y es el logaritmo.

Esto es así debido a sus tres propiedades, que son las que justifican históricamente la utilidad de esta función:

$$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$$
$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y$$
$$\log_a(x^z)=z\log_a x,$$

para cualquier base a, con x, y reales positivos y z real.

Aunque los logaritmos tienen otras propiedades, estas son con diferencia las más importantes, y en ellas nos vamos a fijar: son las llamadas *propiedades funcionales* (hay un teorema por el cual se ve que estas tres propiedades, junto con $\log_a a = 1$ determinan a la función logaritmo)

¿No os parecen «diferentes»? Lo que quiero decir es que nunca antes habéis visto unas propiedades así: al principio resultan extrañas, poco evidentes. Normalmente uno no se encuentra nunca cosas concretas que se comporten de esta forma... ¿o sí?

Os voy a proponer un juego: vamos a jugar con las palabras. Suponed que yo tomo el alfabeto de las letras minúsculas (me olvido de las mayúsculas para no complicarlo todo inútilmente), es decir:

$$\{a, b, c, \ldots, z\}.$$

Pues bien: voy a dar mi definición de «palabra»: una palabra es un conjunto de letras puestas una a continuación de otra, como por ejemplo:

casa
alumno
ababccbd
wwwwww

Diremos que dos palabras son iguales cuando consten del mismo número de letras y coincidan entre sí letra por letra, en el orden natural. Otra forma de expresarlo es decir que una palabra es un *conjunto ordenado* de letras. Fijaos bien: a mí no me importa que la palabra como tal signifique algo o no. Sencillamente son letras que junto en cierto orden. Vamos a etiquetar las palabras con letras mayúsculas para darles un nombre:

A = caballo
B = vgekliut,

por ejemplo.

Cualquier palabra A tiene asociada una longitud, *lg A*, que es el número de caracteres que la componen. Así, si A = libro, además de ser una hermosa palabra, lg A = 5.

¿Qué podemos hacer con nuestro conjunto de palabras?

¿Podemos juntar unas con otras? ¡Pues claro! A esta operación le voy a llamar *producto* y lo designaremos con un asterisco: si A = auto y B = bus, A * B = autobus; y si C = ccc y D = ddd, C * D = cccddd. O sea, el producto de palabras consiste en unirlas o pegarlas (más propiamente concatenarlas) en el orden indicado. Notad como este producto es asociativo pero no conmutativo, es decir:

$$A * (B * C) = (A * B) * C$$
$$A * B \neq B * A, \quad A, B, C \text{ cualquiera.}$$

Hemos definido un producto. ¿Sería posible definir, por ejemplo, una *potenciación?* Si tenemos el producto elevar a una potencia es fácil: basta multiplicar tantas veces como indique el exponente. Es decir, para n entero positivo:

$$A^n = A * A * \overset{(n)}{\ldots} * A$$

Así, si A = tbo, $A^2 = A * A$ = tbotbo y $A^3 = A * A * A$= tbotbotbo.

Os voy a proponer un juego: vamos a jugar con las palabras. Suponed que yo tomo el alfabeto de las letras minúsculas...

¿Podríamos ir más lejos y definir una *división?* Si podemos, lo que ocurre es que dos palabras no van a poder dividirse siempre, esto es, a veces una no va a ser divisible por la otra. Diremos que A es divisible por C si y sólo si existe una B tal que A = B * C; en este caso A/C = B. Por ejemplo: si A = averia, puede dividirse entre C = ria, y A/C = = ave. También es posible dividirlo entre C' = ia, tal que A/C' = aver. Sin embargo no se puede dividir entre C'' = = ave, ya que la división se considera sólo desde el lado derecho (aunque, por supuesto es posible definirla por la izquierda de manera análoga: es tan sólo una cuestión de convenio).

Según esto, ¿qué pasaría si yo dividiera una palabra entre sí misma: A/A? ¡Aparentemente nos quedamos sin letras! Pues bien, para ser coherentes con nuestras propias definiciones vamos a admitir que esta es una palabra también, y levamos a llamar λ: una palabra, de longitud 0: lg λ = 0. Como tiene longitud 0 será el elemento neutro de nuestro producto:

$$A * \lambda = \lambda * A = A \ ,\forall A$$

Respecto a la potenciación, también salimos ganando, ya que podemos extenderla para el caso n = 0:

$$A^0 = \lambda, \forall A$$

Además $\lambda^n = \lambda$ sea cual sea n = 0, 1, 2... puesto que al concatenar n veces una palabra sin caracteres el resultado es claramente la misma palabra sin caracteres. También es fácil ver que $A/\lambda = A$ $\forall A$ ya que quitamos λ por la derecha y al ser λ vacía el resultado es la propia A.

El conjunto de palabras así definido, incluyendo λ, se llama *lenguaje universal* asociado al alfabeto de las letras minúsculas.

Recapitulemos: Hemos empezado formando palabras. No nos hemos preocupado de su significado, sino sólo de trabajar con ellas definiendo unas operaciones: producto, división y potenciación.

Desde un punto de vista lingüístico, esto es lo mismo que decir que estamos trabajando a un nivel *sintáctico*, al ocuparnos de cómo construir y manejar las palabras de acuerdo a unas reglas, y no teniendo en cuenta el aspecto *semántico*, esto es, si el lenguaje resultante está dotado de significado y puede emplearse como instrumento para la comunicación. Existe un tercer nivel, el nivel *pragmático*, que se ocupa de la relación existente entre el lenguaje y sus usuarios: en este caso se trata de un lenguaje que surge con finalidades educativas en el campo de la matemática. (Como nota curiosa, los lenguajes están clasificados de acuerdo a sus propiedades generativas, es decir, de acuerdo al tipo de reglas gramaticales que los generan, nuestro lenguaje pertenece a la «mejor» de todas, la de los «lenguajes regulares» o «lenguajes de Kleene». Por abstractas que os puedan parecer estas cuestiones, hoy en día poseen un amplio interés en relación con diversos problemas de la Informática, como el desarrollo de lenguajes de programación).

Ahora fijémonos en esa función lg o longitud que habíamos definido. Es sencillo ver que:

$$\lg(A * B) = \lg A + \lg B$$
$$\lg(A/B) = \lg A - \lg B$$
$$\lg(A^n) = n \cdot \lg A$$

siempre que, como en el caso de la división, la operación esté definida. Nótese que dentro de los argumentos de la función lg tenemos las operaciones entre cadenas {*, /, potenciación} y fuera de tales argumentos las operaciones habituales entre números reales $\{+, -, \cdot\}$.

Por ejemplo, demostremos la primera (las demás son análogas y os las propongo como un breve ejercicio):

Sea $A = a_1 \cdots a_n$ y $B = b_1 \cdots b_m$, con n, m enteros positivos (cero en el caso de la cadena vacía). Entonces $\lg A = n$ y $\lg B = m$. Además $A * B = a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m$ de modo que:

$$\lg(A * B) = n + m = \lg A + \lg B, \text{ Q.E.D.}$$

...las propiedades son formalmente idénticas a las de la función logaritmo, [...] no son tan antinaturales después de todo... No sólo pueden aprenderse, también pueden aceptarse.

Vemos que las propiedades son formalmente idénticas a las de la función logaritmo, que es lo que nos habíamos propuesto explorar. Luego, realmente, no es tan difícil llegar a un caso concreto y palpable que reproduzca fielmente las propiedades de los logaritmos. No son tan antinaturales después de todo... No sólo pueden aprenderse, también pueden aceptarse. Sólo hace falta imaginación.

Sin embargo, la matemática también es, a menudo, crítica. Hemos visto un modelo que posee unas propiedades idénticas a las de los logaritmos, pero, como todo modelo, debe tener limitaciones. ¿sois capaces de verlas? Si la respuesta es «no», os puedo señalar algunas: en primer lugar, el logaritmo tiene como conjunto imagen a todo $\mathfrak{R}$, mientras que nuestra «función» lg tan sólo puede tomar valores enteros no negativos. Por otra parte, la potenciación que hemos definido sólo puede efectuarse con exponentes (de nuevo) enteros no negativos; sin embargo, entre números reales no existen limitaciones en este sentido. Por tanto, este modelo es algo así como una versión con números enteros del original, o, por decirlo más precisamente, un *modelo discreto*. La comprensión de que lo que hacemos está limitado y el conocimiento de estas limitaciones es a menudo fundamental en la ciencia. Por eso os invito a que sigáis comparando nuestro ejemplo con el original en busca de diferencias y semejanzas. ¿qué podéis decir acerca del producto y de la división?

Pensadlo bien: hemos empezado por la Astronomía y terminado en la Lingüística, pero el objetivo era la Matemática. Nuestro vehículo durante este recorrido fueron las ganas de entender, de pensar y ¿por qué no? de divertirnos mediante juegos que nosotros mismos inventamos. La Matemática es todo eso. La Matemática puede, de hecho debe, ser así.

Benito Hernández
Departamento de Física Fundamental, UNED
Juan Bosco Romero
IB Isabel de Castilla
Ávila

Bibliografía

COLLETTE, J. P. (1985): *Historia de las Matemáticas*, vol. I, Siglo XXI, México.
FERNÁNDEZ, G. y F. SÁEZ (1987): *Fundamentos de Informática*, Alianza, Madrid.
GUZMÁN, M. (1986): *Aventuras matemáticas*, Labor, Barcelona.
KOESTLER, A. (1986): *Los sonámbulos*, vol. II, Salvat, Barcelona.
PIAGET, J. (1991): *Seis estudios de Psicología*, Labor, Barcelona.
POZO, J. I. (1987): *Aprendizaje de la Ciencia y pensamiento causal*, Visor Libros, Madrid.
RAPPOPORT, L. (1986): *La personalidad desde los 13 a los 25 años*, Paidós, Barcelona.
SPIVAK, M. (1988): *Calculus*, Reverté, Barcelona.
VAN HOUT, G. (1973): *La guía básica de la matemática moderna*, Daimon, Barcelona.