SUMA 20
noviembre 1995, pp. 69-72

Fractales y azar. Un acercamiento mediante la calculadora gráfica

Juan Gallardo Calderón

IDEAS Y RECURSOS

Mientras la intuición nos lleva a suponer que un proceso aleatorio debe conducir a una estructura arbitraria y desordenada, la experiencia que mostramos en el artículo pone de manifiesto que no siempre es así.
Las calculadoras gráficas proporcionan un instrumento muy útil para acercarse en el aula, de modo experimental, a los fractales y al caos.

Desde que en 1975 Mandelbrödt introdujera el término fractal para referirse a los objetos matemáticos obtenidos a través de la repetición infinita de un proceso geométrico generalmente de naturaleza muy simple y que, sin embargo, da lugar a una estructura final aparentemente compleja, puede decirse que las matemáticas han encontrado una herramienta que, por su poder creativo y de aplicación a otras ciencias, está dando lugar a experiencias interdisciplinares de sumo interés.

Como consecuencia, los fractales, y el caos, atraen cada vez más la atención de la sociedad en general, y no sólo la del matemático que encuentra en la geometría fractal un puente entre la geometría clásica y el análisis moderno. Así, el color y la belleza de sus formas geométricas despiertan en el artista un interés estético por las matemáticas que rara vez había ocurrido antes. Para el experto en informática los fractales y el caos ofrecen un extraordinario entorno en el que explorar, crear y construir un nuevo mundo visual. A los estudiantes interesados les da la posibilidad de introducirse en las matemáticas del siglo XXI y... a los profesores y profesoras se nos presenta así una oportunidad única de poner de manifiesto el dinamismo de nuestra materia y las múltiples relaciones entre sus distintas partes.

Parece, por tanto, conveniente ofrecer a los alumnos y alumnas de Bachillerato la posibilidad de acercarse a las nociones básicas del caos y los fractales. Esa aproximación puede hacerse a través de actividades exploratorias en las que juegan un papel de gran utilidad los ordenadores –o las calculadoras gráficas– al permitir un contraste rápido de sus intuiciones.

Las oportunidades para introducir elementos de geometría fractal en clase de secundaria son muchas, ya que muchas son las conexiones con tópicos clásicos en los programas actuales.

Entre esas conexiones merece destacarse, junto a las más conocidas que relacionan los fractales con los conceptos de semejanza, iteración, límite, etc. la que se refiere a la conexión entre los fractales y el azar.

El juego del caos

Los importantes avances científicos y tecnológicos habidos durante el siglo XX hacen pensar con frecuencia que el mundo funciona como un mecanismo de relojería, cuyas leyes pueden ser descifradas paso a paso. Sin embargo, el desarrollo de las nuevas teorías científicas nos lleva justamente a la conclusión de que esa ilusión está injustificada; el determinismo estricto y el desarrollo aparentemente aleatorio *no* son mutuamente excluyentes, sino que coexisten abundantemente en la naturaleza.

La relación entre caos y fractales se mueve en esa dirección. Nuestra idea intuitiva de azar nos hace suponer que una figura que se genere aleatoriamente debe poseer una estructura arbitraria y desordenada. El llamado «juego del caos» puede servir para poner de manifiesto como, mediante un procedimiento aleatorio, se obtiene una figura de estructura determinística (caos determinista), lo cual, a la vista de lo apuntado en el párrafo anterior, justifica su interés para ser conocido por los alumnos y alumnas de enseñanza secundaria.

Para poner en práctica el juego del caos necesitamos un dado de tres caras señaladas con A, B y C. Puede servirnos un dado ordinario sin más que asociar, por ejemplo, las caras del 1 y del 2 con A, las del 3 y del 4 con B y las del 5 y del 6 con C. Tendremos así un generador de secuencias aleatorias de A, B y C, tales como B, C, B, B, A, B, C, B, C, A... Las reglas del juego son muy simples. Dibujamos un triángulo de vértices A, B, C y señalamos un punto cualquiera del plano, x_0; tiramos el dado y si sale por ejemplo A, nos desplazamos al punto medio entre x_0, y A; llamamos a ese punto x_1. Tiramos de nuevo el dado y señalamos como punto siguiente el situado a medio camino entre x_1 y el vértice indicado por el dado, y así sucesivamente. La figura 1 ejemplifica las tres primeras tiradas del juego, en el caso de que el punto inicial se haya elegido interior al triángulo; la secuencia correspondiente a las tres tiradas representadas sería: C, A, B.

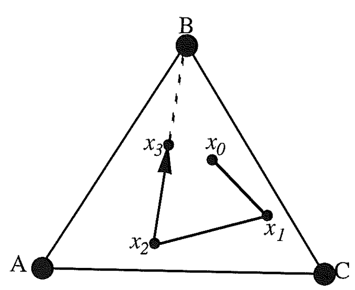

Figura 1

```
ClrDraw
0 → Xmin
1 → Xmax
0 → Ymin
0 → Ymax
Disp «X=»
Input X
Disp «Y=»
Input Y
0 → C
Disp «J=»
Input J
Lbl 1
C+1 → C
PT - On (X,Y)
If C > J
End
Rand → N
If N < .3333
Goto 2
If N > .6666
Goto 3
.5X → X
.5Y → Y
Goto 1
Lbl 2
.5(X+1) → X
.5Y → Y
Goto 1
Lbl 3
.5(X+.5) → X
.5(Y+1) → Y
Goto 1
```

La cuestión es si en el caso que jugáramos infinitas veces, los puntos x_n se colocarían aleatoriamente o por el contrario se agruparían de alguna manera especial.

Puede demostrarse que los puntos convergen hacia un conjunto fractal muy conocido. Naturalmente, sería pretencioso intentar esa demostración en los niveles de enseñanza en que nos movemos, pero sí es posible acercarnos a este hecho de un modo relativamente sencillo, usando calculadoras gráficas, que cada uno o dos alumnos pueden tener a su disposición con más facilidad que un ordenador y que, de manera análoga a éste, permiten llevar a cabo realmente y en un escaso periodo de tiempo, lo que sin ellas se quedaría en un experimento mental de dificultades seguramente insalvables.

Sin embargo, en primer lugar, conviene animar a los alumnos y alumnas a que jueguen manualmente algunas partidas y a que dibujen los resultados correspondientes a cuatro o cinco tiradas, lo cual les permitir además de hacerse con las reglas del juego, lanzar sus primeras conjeturas.

A continuación, puede simularse el juego para un número mayor de partidas utilizando una calculadora gráfica. Por ejemplo, con «Texas Instruments, mod. 81», un programa que nos permite dicha simulación viene en el cuadro adjunto.

La elaboración de este programa necesita, claro está, el conocimiento del lenguaje de programación específico de la calculadora utilizada (por otra parte, similar al Basic), pero sólo en su última fase; es decir, el diseño del proceso, que es lo realmente importante, es sobre todo un ejercicio relacionado con el carácter algorítmico de las matemáticas, y proporciona ocasión para enlazar con diversos conceptos y procedimientos.

Esos pasos esenciales en el programa concreto que nos ocupa son:

1. «Dibujar» un triángulo, por ejemplo de vértices A(0,0), B(0.5, 1), C(1,0)

2. «Elegir» el punto P con el que iniciar el juego; le daremos unas coordenadas genéricas P(X,Y).

3. Decidir cuantas veces queremos jugar (J), e introducir un contador (C) que controle el número de ellas que se llevan jugadas.

A estas tres etapas previas están fundamentalmente dedicadas las instrucciones 1 a 17. En las siguientes, «jugaremos al caos»:

4. «Cogemos el dado de tres caras» mediante la definición de una variable que toma como valor en cada tirada un número aleatorio comprendido entre 0 y 1 (línea 18). Si el número obtenido está entre 0 y 1/3, diremos que ha salido C; si está entre 2/3 y 1, que ha salido B; en otro caso supondremos que ha salido A.

5. Si sale C, debemos desplazarnos al punto medio entre P y C (lineas 26, 27, 28, 29). Si ha salido B, iremos al punto medio entre P y B (lineas 30, 31, 32, 33). En otro caso, el punto siguiente a P se hallar a medio camino entre P y A (lineas 23, 24, 25).

La figura 2 muestra los resultados del Juego del Caos, simulado con el programa, para 100, 500, 1.000 y 10.000 tiradas.

En un aula con alumnos poco habituados a trabajar con programación en la calculadora gráfica, es seguro que estas explicaciones habrá que darlas *a posteriori* una vez que se les ha facilitado el programa y lo han ejecutado, pero a continuación se les puede proponer variaciones sobre el programa, para que ellos mismos lo modifiquen adecuadamente y además les proporcione un mejor conocimiento del juego y sus consecuencias. Variaciones tales como ¿qué ocurre si «dibujamos» un triángulo de otra clase?, o, ¿qué ocurre si el dado tiene «cargada» una de sus caras?. En cualquier caso, ¿qué características tendrá la figura resultante cuando el juego se realizara infinitas veces?

El triángulo de Sierpinski

Si repitiéramos el proceso infinitas veces es de esperar que apareciera el llamado *triángulo de Sierpinski*, que de esta forma diremos que es la figura límite o *atractor*, del juego del caos.

Se trata de un fractal clásico que fue introducido, en 1916 por el matemático polaco Waclaw Sierpinski, como el conjunto de puntos que queda después de realizar infinitas veces el proceso geométrico siguiente:

Dibujamos un triángulo en el plano y le aplicamos el siguiente esquema iterativo:

a) unir mediante segmentos los puntos medios de sus lados y

b) eliminar el triángulo central de entre los cuatro formados.

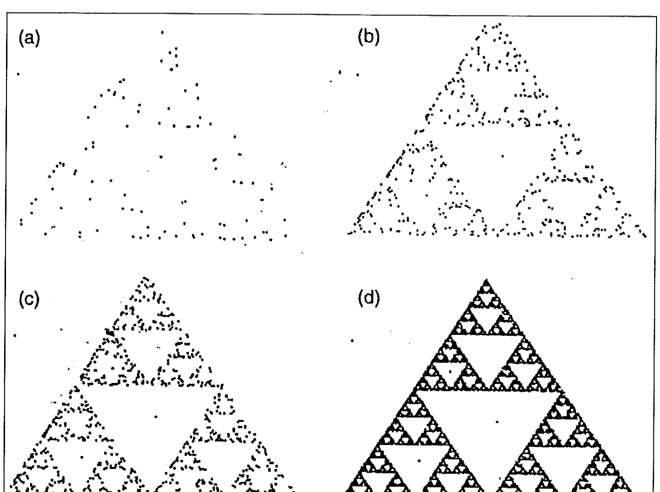

Figura 2

En cada una de las etapas del proceso se van generando cuatro triángulos congruentes de los que eliminamos el del medio. Concretamente, después del primer paso tenemos tres triángulos congruentes cuyos lados miden exactamente la mitad del inicial; siguiendo el mismo procedimiento con los tres triángulos restantes, obtendremos 3, 9, 27, 81... triángulos, cada uno de los cuales es una versión reducida a escala de los triángulos de la etapa anterior. La figura 3 muestra las primeras etapas de la construcción:

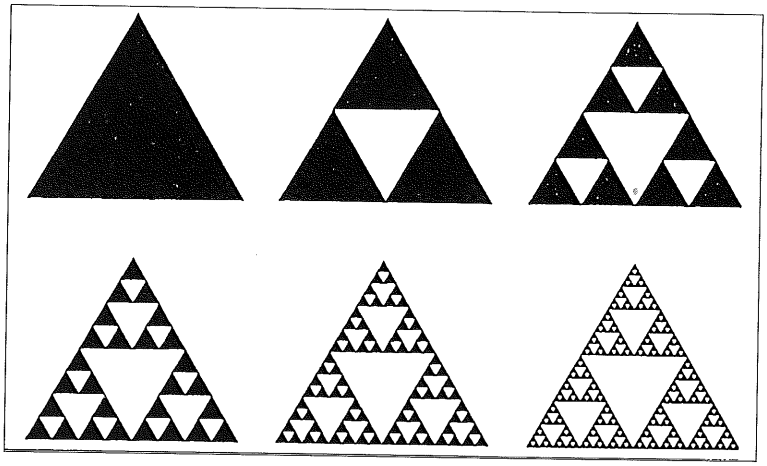

Figura 3

La construcción del triángulo de Sierpinski desde este otro punto de vista, puede ser trabajada también por alumnos de bachillerato, proporcionando una aproximación a la noción de autosemejanza, característica esencial de ciertos fractales, a la vez que permite mediante el estudio de las sucesiones de las áreas, concluir que la figura límite tendrá área nula, lo que por otra parte vendría a poner de manifiesto que la figura correspondiente a cualquier etapa del proceso, por avanzada que sea, será siempre una aproximación finita al triángulo de Sierpinski, toda vez que al tratarse de una figura límite no es posible su representación exacta.

Conclusión

Lo expuesto hasta aquí permite un acercamiento, intuitivo y basado en la experiencia, al hecho aparentemente paradójico de que una figura fractal de estructura muy elaborada tal como es el triángulo de Sierpinski puede obtenerse mediante un proceso aleatorio tal como son las infinitas tiradas del juego del caos.

Es evidente que no puede decirse que hayamos establecido plenamente ese resultado. Un análisis riguroso (Peitgen y otros, 1992) tiene como punto de partida la consideración de que una sucesión de tiradas puede representarse, como ya dijimos, mediante una sucesión de las letras A, B y C; cuando se leen de derecha a izquierda cada una de esas secuencias indica un procedimiento para asociar la posición del punto con un subtriángulo correspondiente a una determinada etapa de la construcción del triángulo de Sierpinski por autosemejanza, y recíprocamente.

Además, son muchas las cuestiones que quedan pendientes, por ejemplo, la referente a si habrá «juegos de caos» que produzcan fractales diferentes del triángulo de Sierpinski.

Sin embargo, creo que lo importante desde el punto de vista pedagógico es que el alumno habrá tenido, quizás por primera vez, la oportunidad de intuir que caos y determinismo son las dos caras de una misma moneda.

Juan Gallardo
IB Santa Eulalia. Mérida
Sociedad Extremeña
de Educación Matemática
Ventura Reyes Prósper

Bibliografía

GUZMÁN, M. y otros (1993): *Estructuras fractales y sus aplicaciones*, Labor.

PEITGEN, H. y otros (1992): *Fractals for the classroom*, Springer-Verlag.