SUMA 20
noviembre 1995, pp. 29-35

Sistemas de representación en la resolución de problemas algebraicos

M. Mercedes Palarea Medina
Martín M. Socas Robayna

ARTÍCULOS

En este trabajo analizamos, mediante el uso de diferentes representaciones, la resolución de algunos problemas verbales de varias operaciones que consideramos límite entre lo aritmético y lo algebraico, como los de grifos, proporcionalidad, móviles y otros, con el fin de ver qué hace a un método de resolución ser más algebraico que aritmético.

En la agenda de investigación sobre la enseñanza y aprendizaje del Álgebra (Wagner y Kieran, 1989), aparecen varias preguntas acerca de la naturaleza aritmética o algebraica de los problemas verbales. Algunas preguntas en concreto son las siguientes:

1. ¿Qué es un problema verbal algebraico? ¿Hay problemas verbales que son intrínsecamente más algebraicos que aritméticos?
2. ¿Qué hace a un método de resolución ser más algebraico que aritmético? ¿Hay jerarquías cognitivas con respecto a modos de representación (lenguaje natural, gráfico, numérico, simbólico, etc., que justifiquen un análisis en resolución de problemas algebraicos?

Contestar a estas preguntas es interesante al menos para conocer los puntos de corte entre la aritmética y el álgebra en el currículo escolar, prever los obstáculos que pueden presentarse en el tránsito de la aritmética al álgebra, comprender la naturaleza del proceso de resolución de los problemas verbales y desarrollar estrategias de enseñanza (Puig y Cerdán, 1991).

Para ello analizaremos mediante el uso de diferentes representaciones la resolución de algunos problemas como los de grifos, proporcionalidad, móviles y otros, con el fin de ver la posibilidad de encuadrarlos como problemas aritméticos o algebraicos.

Examinemos diferentes representaciones en el siguiente problema verbal:

Problema 1

Juan es 3 cm más bajo que Víctor, y éste es 8 cm más alto que Pedro. Sabiendo que Pedro mide 160 cm, ¿cuánto mide Juan?

El problema está dado en el sistema de representación verbal-sintáctico y su comprensión, que parte de una lectura adecuada, exige toda una serie de habilidades lingüísticas, reconocimiento de nombres, adjetivos, verbos, etc., y permite identificar lo que se sabe y lo que se quiere encontrar, y con ciertas dificultades podríamos propiciar un procesamiento verbal-sintáctico que nos permita su resolución.

Pedro mide 160 cm.

Víctor es 8 cm más alto que Pedro. (La palabra «éste» en el texto se refiere a Víctor).

Por lo tanto, Víctor mide 168 cm. (Si Víctor es 8 cm más alto que Pedro, entonces hay que añadir 8 cm a la altura de Pedro).

Juan es 3 cm más bajo que Víctor. (Invirtiendo la frase: Víctor es 3 cm más alto que Juan).

Víctor mide 168 cm. (Recordar lo procesado anteriormente).

Por lo tanto, Juan mide 165 cm. (Si Juan es 3 cm más bajo que Víctor, entonces hay que quitar 3 cm a la altura de Víctor).

Una persona que sepa álgebra puede utilizar un sistema de representación formal. He aquí una secuencia posible:

J = V - 3,	Juan es 3 cm más bajo que Víctor
V = P + 8,	Víctor es 8 cm más alto que Pedro
P = 160,	Pedro mide 160 cm
J = ?,	¿Cuánto mide Juan?

Se ha realizado un proceso de traslación de un sistema de representación a otro, proceso que implica mucho más que una simple traducción. Ahora, el problema está en condiciones de poderlo resolver aplicando reglas algebraicas.

Todavía existe al menos otro sistema de representación, que denominaremos físico-visual y que contiene diferentes subsistemas de representación para este sencillo problema: representación física, icónica, geométrica y diagramática.

Un buen ejemplo de una representación del problema mediante diagramas viene dado en la figura 1, basado en método de análisis-síntesis (Puig y Cerdán, 1989). El paso desde la incógnita a través de incógnitas auxiliares, hasta reducir todo a datos del problema, es el análisis; el camino inverso es la síntesis, es decir efectuar los cálculos que aparecen en el diagrama: (8 + 160) - 3.

Una representación geométrica puede ser dada por la figura 2.

A partir de esta representación y mediante el esquema partes-todo (inclusión de clases y comparación) así como de los sistemas de representación verbal-sintáctico y aritmético, se puede generar un sencillo proceso de solución: (figura 3).

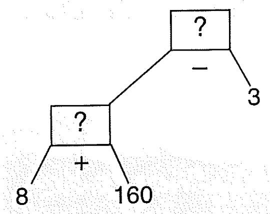

Figura 1

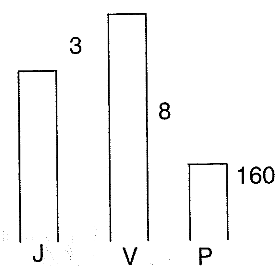

Figura 2

Observemos que no existe una correspondencia unívoca entre un sistema de representación y la estructura del problema, y que los cuatro sistemas de representación son ejecutables, es decir, se pueden desencadenar en ellos procedimientos de solución diferentes, aunque equivalentes.

Resnick y Ford (1990) señalan que el primer paso en cualquier situación de resolución de problemas es elaborar una representación del mismo, entendiendo por tal elaboración, el proceso que establece vínculos entre el planteamiento del problema y la red semántica de la persona, su conocimiento general acerca de las relaciones matemáticas y espaciales, y su conocimiento de los procedimientos, con el fin de detectar las características del problema y codificarlas para poderlas interpretar por el sistema de procesamiento de la información.

Cuando se ha elaborado una representación del problema, la probabilidad de que se lleve a cabo una solución correcta va a depender de que el resolutor posea en la memoria un conjunto adecuado de procedimientos que se ajusten al problema, tal como se presenta.

Sabemos que la resolución de problemas es una actividad dirigida a una meta y los estudiantes necesitan aprender acciones específicas de resolución de problemas relacionadas con las metas y, a veces, la falta de una buena representación del problema constituye la dificultad central para muchos estudiantes incompetentes en álgebra.

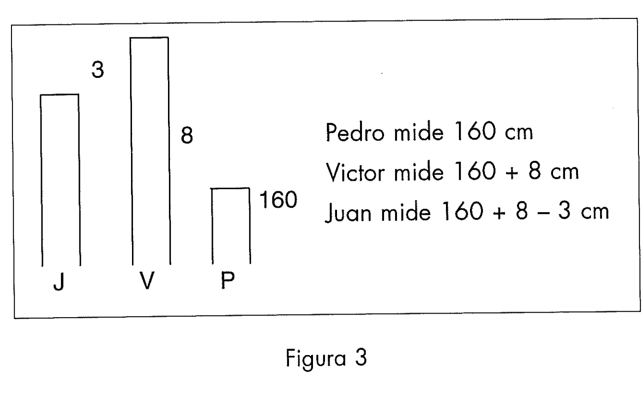

Figura 3

La representación tiene un carácter semántico, pues afecta al plano del contenido, y no debe limitarse el proceso de traducir problemas verbales de álgebra, a la simple traducción de un lenguaje a otro. La traducción va más allá, se trata de la elaboración de una representación en el sistema de representación elegido.

Es necesario considerar con el auxilio de papel y lápiz los tres sistemas de representación posibles en matemáticas: el lingüístico, el físico-visual y el algebraico. Cada uno de ellos puede hacer entrar en juego diferentes representaciones mentales de los objetos o estructuras considerados. Tampoco se debe olvidar los dos sistemas de representación que pertenecen al mundo de las representaciones mentales: la heurística y las creencias (Goldin, 1987). O como señala Kaput (1989) las matemáticas son, entre otras cosas, una colección de lenguajes y éstos tienen un doble papel: son instrumentos de comunicación e instrumentos de pensamiento. Sus puntos de partida son:

a) la noción de representación mental como el medio por el cual un individuo organiza y maneja el flujo de su experiencia,

b) la noción de sistema de representación o sistema simbólico como un artefacto lingüístico o cultural, materialmente realizable.

Los sistemas de representación, cuando se aprenden, son usados por los individuos para estructurar la creación y elaboración de sus representaciones mentales.

Sin embargo, en la práctica hay que reconocer que se ha potenciado más una enseñanza sintáctica del álgebra que una enseñanza semántica, como consecuencia de dificultades inherentes en el trato con los símbolos formales del álgebra, que son muy concisos y de sintaxis implícita, y de la ausencia de representaciones que puedan proveer información de retroalimentación.

Consideremos el siguiente problema:

Problema 2

Un grifo tarda en llenar un depósito 2 horas. Otro grifo llena el mismo depósito en 3 horas. ¿Cuánto tardan los dos juntos en llenar el depósito?

Ahora, este problema verbal tiene mayores dificultades para desencadenar un procesamiento verbal-sintáctico que nos permita su resolución.

Una representación mediante diagramas basada en una generalización del método análisis-síntesis, es decir, tratando lo conocido y lo desconocido de la misma forma es:

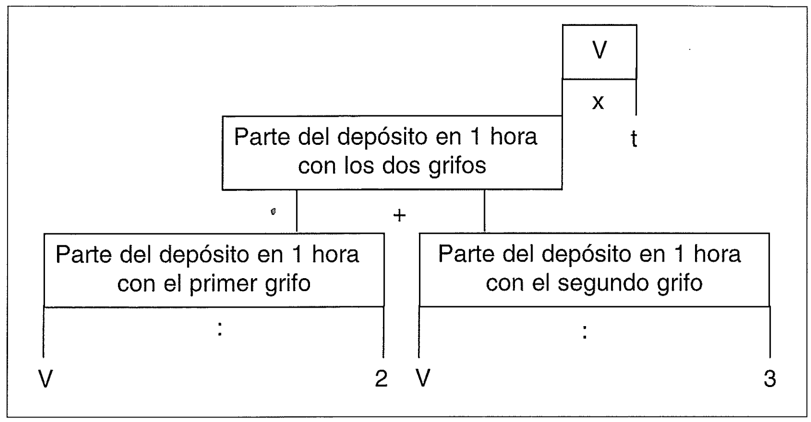

Figura 4

El método se muestra aparentemente algebraico con la presencia de una nueva incógnita que en el diagrama la consideramos como un dato útil para establecer, en la síntesis, la relación definitiva que nos permite obtener el resultado.

Una persona que sepa álgebra podría, utilizando el sistema de representación formal, escribir: $V = (V/2 + V/3)\ t$ o, simplemente, $1/2 + 1/3 = 1/t$.

Desencadenar, en ambos casos, un proceso de solución requiere necesariamente aplicar reglas algebraicas. No ocurría así en el problema 1.

Una representación geométrica sencilla puede ser dada por la siguiente figura:

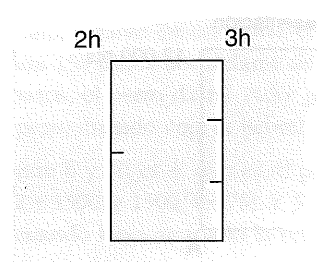

Figura 5

¿Se podría desencadenar un proceso de solución, a partir de esta representación? Obviamente, sí, teniendo en cuenta algunos esquemas como la relación partes-todo, reducción a la unidad y equivalencia, así como a los sistemas de representación verbal-sintáctico y aritmético.

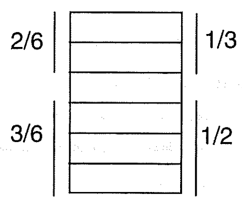

Figura 6

1/2 y 1/3

son equivalentes a

3/6 y 2/6

Luego llenan 5/6 del depósito en 1 hora y el 1/6 restante lo llenan en 1/5 h.

No hemos tenido que recurrir en todo el proceso de resolución a ninguna regla algebraica.

En la resolución de problemas, como hemos indicado, un primer paso es elaborar una representación del problema que tiene un carácter marcadamente semántico, sin embargo esta fase en los problemas verbales algebraicos se ha entendido como una traducción del sistema de representación lingüístico al sistema de representación formal que, generalmente, se concreta en una ecuación, cuyo contenido semántico, por la propia dificultad de los símbolos formales, es escaso, olvidándose del sistema de representación físico-visual como un sistema de representación útil en la elaboración de representaciones del problema.

Problema 3

Andrés tiene 12.000 pesetas y Pedro el 75% del dinero de Andrés. ¿Cuánto dinero tiene Pedro?

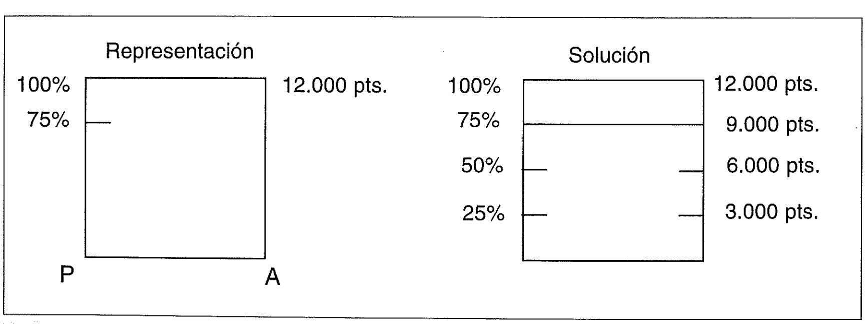

Figura 7

Reducción a la unidad o escala del 25 %.

Resultado: Pedro tiene 9.000 pesetas.

El sistema de representación formal nos conduce a dos tipos de razonamiento en la proporción (comparación por cociente), el razonamiento horizontal (llamado método de la ecuación) y el razonamiento vertical (llamado método proporcional), formuladas respectivamente como:

x = 75% de 12.000 o

75/100 = x/12.000

Problema 4

Antes de recibir la paga semanal Víctor tenía 12.000 pesetas. Después de la paga semanal tiene 13.800 pesetas. ¿Cuál es el porcentaje de aumento?

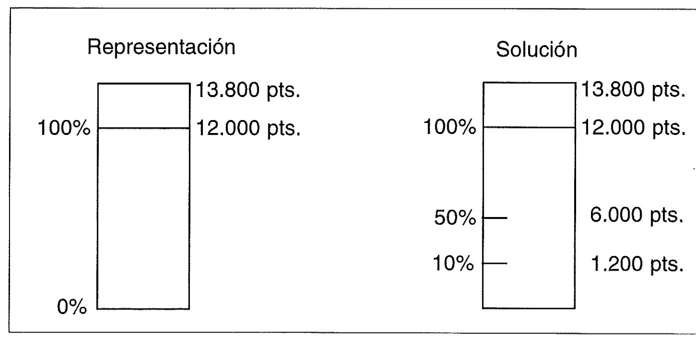

Figura 8

Reducción a la unidad o escala del 10%.

Resultado: El porcentaje de aumento es 15%.

Razonamiento horizontal:

x% de 12.000 = 13.800

Razonamiento vertical:

x/100 = 13.800/12.000

Resultado: 115% - 100%.

Una representación de los problemas 3 y 4 mediante el método análisis-síntesis nos llevaría a interpretar estos problemas como aritméticos, donde lo conocido y desconocido puede ser tratado de formas diferentes.

Los métodos de la proporción y de reducción a la unidad se pueden concretar en: el método de la proporción supone plantear una proporción en cuyo primer miembro figuran las dos cantidades conocidas de una magnitud, expresando que su razón es igual a la razón directa o inversa de la cantidad conocida y de la desconocida de la otra magnitud. Finalmente consiste en trasladar la información a expresiones del tipo:

$$a/b = x/d$$

Reducción a la unidad supone calcular el valor de la segunda magnitud que corresponde a la unidad de la primera, y entonces el valor que corresponde a n, según que la proporcionalidad sea directa o inversa.

Formalmente consiste en trasladar la información a una expresión del tipo: $m = a \cdot n$, para las magnitudes directamente proporcionales o $m \cdot n = a$, para las magnitudes inversamente proporcionales.

Veamos el caso de reducción a la unidad, para situaciones de proporcionalidad inversa, en el siguiente problema.

Problema 5

20 obreros hacen una obra en 6 días, ¿cuántos días tardarán en hacer la obra 15 obreros?

Se origina con relación al producto de las dos magnitudes (figura 9):

$1/20 \cdot 6$, parte de la obra, por obrero y día.

El resultado está asociado a un proceso de recuento hasta llegar a la unidad.

8)

$$\frac{15}{20}\cdot 6 + \dots + \frac{15}{20}\cdot 6 = 1$$

Un ejemplo interesante de problemas que parece señalar el tránsito de la aritmética al álgebra lo constituye los problemas de «móviles».

Problema 6

Un automóvil parte del punto A con velocidad uniforme de 40 km/h hacia otro punto B. Dos horas después sale de A hacia B otro automóvil con velocidad uniforme de 60 km/h. Dígase cuánto tiempo tardarán en encontrarse.

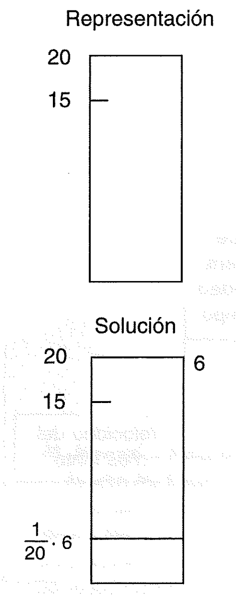

Figura 9

Una versión de este problema es utilizada en Puig y Cerdán (1991) como un posible ejemplo de problema de varias operaciones combinadas que debe situarse en el terreno de álgebra, y lo relacionan con los trabajos de Filloy y Rojano (1985) que han determinado en el terreno de la resolución de ecuaciones un corte entre la aritmética y el álgebra en el momento en que es necesario operar con la incógnita para resolver la ecuación.

Al aplicar al problema 6 el método de análisis-síntesis, para llegar desde los datos a la incógnita, es necesario considerar tanto a datos como incógnitas como si fueran datos, es decir, es necesario operar formalmente con ellos. El examen de las relaciones que se obtienen no ha de comenzar necesariamente en la incógnita y terminar en su reducción a los datos. Lo que se hace es buscar una cantidad, que no tiene por qué coincidir con la incógnita del problema y que pueda expresarse de dos maneras distintas (método cartesiano).

Una representación mediante diagrama, utilizando el método de análisis-síntesis es:

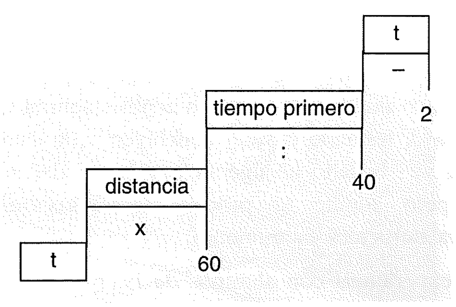

Figura 10

En la Aritmética de Treviso aparece enunciada la regla para resolver problemas de dos objetos que se persiguen y después se alcanzan (Paradés y Malet, 1989, pp.112-114), dando como ejemplo:

«Una liebre se halla delante de un perro, el cual la persigue; se encuentra 150 pasos por delante de él y mientras la liebre da 6 pasos, el perro da 10. Pido: ¿cuántos pasos habrá dado el perro cuando coja la liebre?

La diferencia entre 6 y 10 es 4, que es el partidor. Según la regla, 150 x 2 = 1500 [y 1500/4=375]. Y 375 pasos habrá dado el perro cuando haya atrapado la liebre».

Este tipo de problemas y en particular el problema 6 pueden ser traducidos, como señalan Puig y Cerdán, a una expresión aritmética, mediante el método de análisis-síntesis.

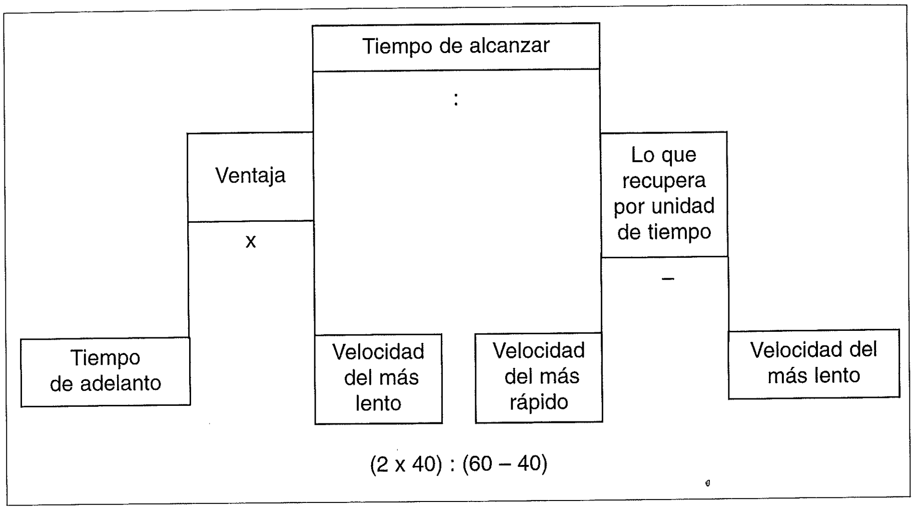

Figura 11

Sin embargo, argumentan que las incógnitas auxiliares necesarias para que el proceso de traducción pueda ser aritmético son más difíciles de establecer que las que aparecieron en el análisis algebraico, y añaden que el análisis algebraico puede calificarse de análisis natural y éste, de complejo, refinado o sutil; concluyen, que este problema se ve abocado al álgebra por la vía del análisis natural, pero «admite» un proceso de traducción, más sutil, cuya estructura es aritmética.

Nuestra experiencia con alumnos de bachillerato y universitarios (Escuela Universitaria de Formación del Profesorado y Facultad de Matemáticas de La Laguna) se ha realizado con una versión del problema en términos de dinero.

En él se prohibe expresamente, su resolución en términos algebraicos.

Problema 7

Juan encontró trabajo y gana 30.000 pesetas semanales. Seis semanas más tarde Pedro encontró trabajo y gana 45.000 pesetas a la semana. ¿Cuántas semanas tardará Pedro en obtener unos ingresos idénticos a los de Juan?

Aparece con cierta facilidad la resolución aritmética mediante comparación por diferencias y otra por cociente con la ventaja obtenida que responde al diagrama aritmético del método análisis-síntesis.

En el sistema de representación visual-geométrico que hemos venido utilizando nos llevaría a la figura 12.

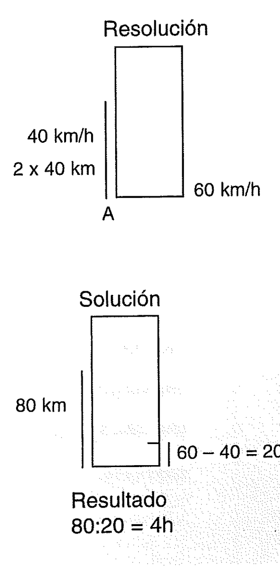

Figura 12

O, también, a la representación algebraica

$$2 \cdot 40 + 40\ t = 60\ t$$

Parece claro que no tenemos elementos suficientes para clasificar un problema verbal en aritmético o algebraico. Vemos como el proceso de traslación puede realizarse mediante varios sistemas de representación (formal, visual-geométrico, diagramas, etc.), que siendo cualitativamente distintos conducen a expresiones equivalentes. Determinar, entonces, entre los problemas verbales de varias operaciones que consideramos límite entre lo aritmético o algebraico, cuál tiene una estructura más aritmética que algebraica, o al revés, depende de los sistemas de representación elegidos que provocan en el resolutor un tipo de imagen mental que desencadena la necesidad de un pensamiento aritmético o algebraico para su solución.

El sistema de representación de imágenes (físico-visual) aporta elementos de análisis en la resolución de problemas, permitiendo en muchos casos una representación y solución del mismo. Este sistema de representación necesita de una mayor presencia en el sistema educativo, organizado y sistematizado como subsistemas de representación locales que permitan enseñarlos con carácter autónomo, es decir, como autosuficientes.

El que hemos venido mostrando en estos problemas como un sistema de representación visual geométrico (S.R.V.G.) es un sistema mixto que combina el esquema de relación partes-todo y sus relaciones posibles: combinar, cambiar, comparar e igualar, con el sistema decimal, mediante una representación bidimensional continua (rectángulos) que facilita el paso a los esquemas aditivo, multiplicativo y proporcional.

Referencias bibliográficas

FILLOY, E. y T. ROJANO (1989): «Solving equations: the transition from Arithmetic to Algebra», *For the Learning of Mathematics*, vol.9/2, Publishing Association Montreal, Canadá, 19-25.

GOLDIN, G. A. (1987): «Cognitive Representational Systems for Mathematical Problem Solving», en JANVIER, C. (ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics*, Lawrence Erlbaum, Hillsdale N. J.

KAPUT, J. (1989): «Linking Representations in the Symbol Systems of Algebra», en S. WAGNER y C. KIERAN (eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra*, Lawrence Erlbaum Asocciates, National Council of Teachers of Mathematics, Hillsdale, NJ. Reston, VA, 167-194.

PALAREA, M. M. y M. M. SOCAS (1994): «Elaborations Semantiques VS Elaborations Syntactiques dans L'Enseignement-apprentissage de L'Algèbre scolaire (12-16 ans)», en Actas de la 46 CIEAM, IREM-118, Toulouse, France.

PALAREA, M. M. y M. M. SOCAS (1995): «El uso de sistemas de representación con imágenes en la Enseñanza-aprendizaje del Algebra escolar», en *Actas del Simposium Internacional sobre la «Matemática Actual»*, XXV aniversario de los estudios de Matemáticas en la Universidad de La Laguna (en prensa).

PARADIS, J. y A. MALET (1989): *Los orígenes del álgebra: de los árabes al Renacimiento*, PPU, Barcelona.

PUIG, L. y F. CERDAN (1989): *Problemas aritméticos escolares*, Síntesis, Madrid.

PUIG, L. y F. CERDAN (1991): «Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales», en *Segundo Simposio Internacional de Educación Matemática. Aprendizaje y Enseñanza del Algebra*, Cuernavaca, Morelos, México, 35-48.

RESNICK, L. B. y W. W. FORD (1990): *La enseñanza de las matemáticas y su fundamento psicológico*, Paidós-MEC, Barcelona.

WAGNER, S. y C. KIERAN (1989): «An Agenda for Research on the Learning and Teaching of Algebra», en WAGNER, S. y C. KIERAN, C. (eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, Lawrence Eribaum Associates, NCTM: Hillsdale, NJ. Reston, VA, 220-237.

M. Mercedes Palarea
Martín M. Socas
Área de Didáctica
de las Matemáticas de
la Universidad de La Laguna.
Sociedad Canaria Isaac
Newton de Profesores
de Matemáticas

Concurrencia orientativa
(VI Olimpiada Matemática Nacional)